Logik und Modelltheoretische Semantik
Vorlesung SS 2011

Hans Leiß
Universität München
Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung

23. Juli 2011

Organisatorisches

Vorlesung

- Zeit: Do, 14-16 Uhr
- Ort: Raum B254, Eduard-Rumpler-Str. 13
- Voraussetzung: Kurs über Mathematische Grundlagen der CL
- Abschlußklausur: letzte Semesterwoche

Tafelübung:

- Zeit: Di 14-16
- Ort: Raum 227, Schellingstr. 3
- Hausaufgaben:

Literatur

Boole'sche Algebra

Eine Boole'sche Algebra $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ ist eine Struktur, in der folgende Aussagen gelten:

1. $+$ ist assoziativ: $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + x)$
2. $+$ ist kommutativ: $\forall x \forall y (x + y = y + x)$
3. $+$ ist idempotent: $\forall x (x + x = x)$
4. 0 ist neutral bzgl. $+$: $\forall x (x + 0 = x)$
5. Gegenteile sind erschöpfend: $\forall x (x + \overline{x} = 1)$
6. $\cdot$ ist assoziativ: $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot x)$
7. $\cdot$ ist kommutativ: $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$
8. $\cdot$ ist idempotent: $\forall x (x \cdot x = x)$
9. 1 ist neutral bzgl. $\cdot$: $\forall x (x \cdot 1 = x)$
10. Gegenteile sind ausschließend: $\forall x (x \cdot \overline{x} = 0)$
11. $+$ distribuiert über $\cdot$: $\forall x \forall y \forall z (x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z))$
12. $\cdot$ distribuiert über $+$: $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$

Auf jeder BA gibt es eine partielle Ordnung $\leq$, definiert durch

$$a \leq b :\iff a + b = b.$$

Bezüglich $\leq$ ist 0 das kleinste Element (wegen $0 + a = a$) und 1 das größte (wegen $a + 1 = a + (a + \overline{a}) = a + \overline{a} = 1$). In jedem Argument sind $+$ und $\cdot$ monoton, z.B.

$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Rightarrow \quad ac + bc = (a + b)c = bc \\ &\Rightarrow \quad ac \leq bc \end{aligned}$$

Außerdem ist $a \cdot 0 = a \cdot (a \cdot \overline{a}) = (a \cdot a) \cdot \overline{a} = a \cdot \overline{a} = 0$.

Beispiele:

- Die Algebra der Wahrheitswerte:
  $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \max, \min, \overline{}, 0, 1)$ mit $\overline{0} := 1$, $\overline{1} := 0$
- Die Algebra aller Teilmengen einer Menge M:
  $\mathcal{P}(M) = (P(M), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, M)$ mit $\overline{A} := \{\, m \in M \mid m \notin A \,\}$

Aussagen, die man aus den Axiomen beweisen kann, gelten in allen Boole'schen Algebren.

Proposition: Sei $\mathcal{A}$ eine Boole'schen Algebra, und $a, b \in A$.

1. Gelten $a \cdot b = 0$ und $a + b = 1$, so ist $a = \overline{b}$.
2. (De Morgan) $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$ und $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

Beweis:

1. $$\begin{aligned} a &= a1 = a(b + \overline{b}) = ab + a\overline{b} = 0 + a\overline{b} = a\overline{b} \\ &= a\overline{b} + 0 = a\overline{b} + b\overline{b} = (a + b)\overline{b} = 1\overline{b} = \overline{b}. \end{aligned}$$
2. Nach 1. genügt es, folgende zwei Gleichungen zu zeigen:

$$\begin{aligned} (ab)(\overline{a} + \overline{b}) &= ab\overline{a} + ab\overline{b} = a\overline{a}b + a0 = 0b + 0 = 0 \\ (ab) + (\overline{a} + \overline{b}) &= ab + \overline{a}1 + 1\overline{b} = ab + \overline{a}(b + \overline{b}) + (a + \overline{a})\overline{b} \\ &= ab + \overline{a}b + \overline{a}\overline{b} + a\overline{b} + \overline{a}\overline{b} \\ &= (a + \overline{a})b + (\overline{a} + a)\overline{b} = b + \overline{b} = 1 \end{aligned}$$

Was bedeuten die Aussagen in $\mathbb{B}$ und $\mathcal{P}(M)$?

Lemma: Ist $\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, {}^{-\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$ eine Boole'sche Algebra und $I \neq \emptyset$ eine Menge, so ist auch

$$\mathcal{A}^I := (A^I, +, \cdot, {}^-, 0, 1)$$

eine Boole'sche Algebra, wobei

$$\begin{array}{rcl}
A^I & := & \{ f \mid f : I \to A \}, \\
0 & := & \text{das } f \in A^I \text{ mit } f(i) = 0^{\mathcal{A}} \text{ für alle } i \in I \\
1 & := & \text{das } f \in A^I \text{ mit } f(i) = 1^{\mathcal{A}} \text{ für alle } i \in I \\
(f+g)(i) & := & f(i) +^{\mathcal{A}} g(i), \text{ für alle } i \in I \\
(f \cdot g)(i) & := & f(i) \cdot^{\mathcal{A}} g(i), \text{ für alle } i \in I \\
\overline{f}(i) & := & \overline{f(i)}^{\mathcal{A}}, \text{ für alle } i \in I.
\end{array}$$

Beweis: Man prüft die Axiome durch Nachrechnen, z.B.

$$\begin{array}{rcl}
((f+g) \cdot h)(i) & = & (f(i) +^{\mathcal{A}} g(i)) \cdot^{\mathcal{A}} h(i) \\
& = & (f(i) \cdot^{\mathcal{A}} h(i)) +^{\mathcal{A}} (g(i) \cdot^{\mathcal{A}} h(i)) \\
& = & ((f \cdot h) + (g \cdot h))(i).
\end{array}$$

Die Boole'schen Operationen $+$ (*oder*), $\cdot$ (*und*) und $^-$ (*nicht*) treten in der natürlichen Sprache bei mehreren Ausdrucksarten auf:

1. bei Satzverbindungen werden sie in $\mathbb{B}$ interpretiert: *Weder (arbeitet Fritz) noch ((scheint die Sonne) oder (leuchtet der Mond))* $\simeq \neg\varphi_1 \wedge \neg(\varphi_2 \vee \varphi_3)$
2. bei Verbindungen von (einstelligen) Prädikaten werden sie in $\mathcal{P}(I) = \mathbb{B}^I$ interpretiert, wenn I die Menge der Individuen ist: *Fritz (arbeitet und (geht nicht baden))* $\simeq f\ (A \cdot^{\mathbb{B}^I} \overline{B}^{\mathbb{B}^I}) \simeq (f\ A) \cdot^{\mathbb{B}} \overline{f\ B}^{\mathbb{B}}$.
   Bei zweistelligen Prädikaten analog in $\mathcal{P}(I \times I) = \mathbb{B}^{I \times I}$: *Fritz (liest oder schreibt) einen Aufsatz.*
3. bei Nominalphrasen (in Subjektsposition) werden sie in $\mathbb{B}^{(\mathbb{B}^I)}$ interpretiert: *(Weder Fritz noch Maria) arbeitet*
   $\simeq \overline{(f \cdot^{\mathbb{B}^{\mathbb{B}^I}} m)}^{\mathbb{B}^{\mathbb{B}^I}} \ A = \overline{(f\ A)}^{\mathbb{B}} \cdot^{\mathbb{B}} \overline{(m\ A)}^{\mathbb{B}}$

Eine n-stellige *Wahrheitsfunktion* ist eine Funktion $f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$.

Einige der Konjunktionen und Subjunktionen der natürlichen Sprache können durch Wahrheitsfunktionen interpretiert werden, andere nicht. Neben *und*, *oder*, *nicht* können z.B. *wenn - dann*, *weder – noch* auf Kombinationen von *und*, *oder*, *nicht* zurückgeführt werden, z.B.

$$\textit{Wenn } S_1\textit{, dann } S_2. := (\textit{nicht } S_1) \textit{ oder } S_2.$$

Konjunktionen, die nicht durch eine Wahrheitsfunktion interpretiert werden können, sind z.B. *weil* oder *damit*.

Zeige, daß es keine Wahrheitsfunktion $f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{B}$ gibt mit

$$(p \textit{ deshalb, weil } q) = f(p, q).$$

Hinweis: man finde umgangssprachliche Aussagen p_1, p_2 mit gleichem Wahrheitswert und Aussagen q_1, q_2 mit gleichem Wahrheitswert, wo aber $(p_1$ *deshalb, weil* $q_1)$ und $(p_2$ *deshalb, weil* $q_2)$ verschiedene Wahrheitswerte haben.

Modallogik

Komplexe Sätze können nicht nur durch Koordinationen, sondern auch durch Satzadverbien wie *möglicherweise* oder *wahrscheinlich* aus einfachen Sätzen aufgebaut werden.

Leibniz hat die *wirkliche* von *möglichen* Welten unterschieden. Nach ihm gilt eine Aussage *notwendigerweise*, wenn sie in allen möglichen Welten wahr ist, und *möglicherweise*, wenn sie in mindestens einer möglichen Welt wahr ist.

Modallogische Formeln:

$$
\begin{array}{rcll}
\varphi, \psi & := & \bot & (\textit{Falsum}) \\
 & | & p & (\textit{Aussagevariable}) \\
 & | & \neg\varphi & (\text{nicht } \varphi) \\
 & | & (\varphi \wedge \psi) & (\varphi \text{ und } \psi) \\
 & | & \Box\varphi & (\text{es ist notwendig, daß } \varphi)
\end{array}
$$

Abkürzung: $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$ für *es ist möglich, daß* φ

Einfache Interpretation: Eine mögliche Welt ist eine Belegung $h : Var \to \mathbb{B}$. φ ist in h wahr, oder $h \models \varphi$, wenn $[\![\varphi]\!]_h = 1$. Das gibt

$$\begin{aligned} h \models \Box\varphi \quad &\iff \quad \text{für alle } h' : Var \to \mathbb{B} : h' \models \varphi \\ h \models \Diamond\varphi \quad &\iff \quad \text{für ein } h' : Var \to \mathbb{B} : h' \models \varphi \end{aligned}$$

Für aussagenlogische φ hieße das: $\Box\varphi =$ „φ ist allgemeingültig“, $\Diamond\varphi =$ „φ ist erfüllbar“.

Feinere Interpretation: die Möglichkeiten sind *relativ* zur Wirklichkeit (S. Kripke, 1957).

Ein Modell-Rahmen $\mathcal{M} = (W, R)$ besteht aus einer Menge $W \neq \emptyset$ und einer Erreichbarkeitsrelation $R \subseteq W \times W$. Eine Belegung über $\mathcal{M}$ ist eine Abbildung $h : W \times Var \to \mathbb{B}$.

Der (Wahrheits-) Wert $[\![\varphi]\!]_h^{\mathcal{M},w}$ von φ in der Welt w von $\mathcal{M}$ bei h ist dann definiert (mit $\min\emptyset := 1$) durch

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\bot]\!]_h^{\mathcal{M},w} & := & 0 \\
[\![p]\!]_h^{\mathcal{M},w} & := & h(w,p) \\
[\![\neg\varphi]\!]_h^{\mathcal{M},w} & := & \overline{[\![\varphi]\!]_h^{\mathcal{M},w}}, \\
[\![\varphi\wedge\psi]\!]_h^{\mathcal{M},w} & := & [\![\varphi]\!]_h^{\mathcal{M},w}\cdot[\![\psi]\!]_h^{\mathcal{M},w} \\
[\![\Box\varphi]\!]_h^{\mathcal{M},w} & := & \min\{\, [\![\varphi]\!]_h^{\mathcal{M},v} \mid v\in W, wRv \,\}.
\end{array}
$$

Insbesondere:

$$\mathcal{M},w,h\models\Box\varphi \quad\iff\quad \mathcal{M},w,h\models\varphi$$

für alle von w aus erreichbaren $v\in W$.

Prädikatenlogik 1.Stufe

Syntax: Sei $Var = \{x_0, x_1, \ldots\}$ eine unendliche Menge von Variablen, $L = Fun \cup Rel$ eine (endliche) Menge von (mit einer Stelligkeit versehenen) Funktions- bzw. Relationszeichen.

L-Terme:

$$
\begin{array}{rcll}
s, t & := & x & \\
 & | & c & c \in Fun \text{ 0-stellig} \\
 & | & f(t_1, \ldots, t_n) & f \in Fun \ n\text{-stellig}, \ n \geq 1
\end{array}
$$

L-Formeln:

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi, \psi & := & \bot \ | \ s \doteq t \\
 & | & R(t_1, \ldots, t_n) \\
 & | & \neg\varphi \\
 & | & (\varphi \wedge \psi) \\
 & | & \exists x \varphi
\end{array}
$$

Abkürzungen: $(\varphi \vee \psi) := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ usw., $\forall x \varphi := \neg\exists x \neg\varphi$

Pränexe Normalform

Eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist in pränexer Normalform (PNF), wenn

$$\varphi = Q_1 y_1 \ldots Q_k y_k \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$$

für Quantoren $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ und eine quantorenfreie Formel ψ.

Lemma Jede Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist zu einer Formel $\varphi'(x_1, \ldots, x_n)$ in pränexer Normalform äquivalent.

Beweis durch Induktion über den Formelaufbau.

- φ ist atomar: dann ist es schon in PNF, also $\varphi^{PNF} := \varphi$.
- $\neg\varphi$: Sei $\varphi^{PNF} = Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi$. Dann ist $\neg\varphi$ äquivalent zu $(\neg\varphi)^{PNF} := \overline{Q}_1 x_1 \ldots \overline{Q}_k x_k \neg\psi$, mit $\overline{\forall} = \exists, \overline{\exists} = \forall$.
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$: Sei oBdA $\varphi_i^{PNF} = Q_i x_i \psi_i$, $x_i \notin frei(\psi_{3-i})$. Wähle

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^{PNF} := Q_1 x_2 Q_2 x_2 (\psi_1 \wedge \psi_2).$$

- $\exists x \varphi$: Wähle $(\exists x \varphi)^{PNF} := \exists x(\varphi^{PNF})$.

Skolem'sche Normalform

Lemma Sei $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \varphi$ eine L-Aussage, $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und f ein neues Funktionszeichen. Äquivalent sind:

1. $\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \varphi$,
2. Es gibt eine Funktion $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$ mit

$$(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \models \forall x_1 \ldots \forall x_n . \varphi(y/f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Bew. 2.$\Rightarrow$ 1.: Benutze das Ersetzungslemma,

$$\varphi(y/f(x_1, \ldots, x_n))^{(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}})}_{[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]} = \varphi^{\mathcal{M}}_{[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n, y/f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)]}.$$

1. $\Rightarrow$ 2.: Für alle $a_1, \ldots, a_n$ ist $\mathcal{M} \models \exists y \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$.
Definiere $f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ durch ein für y geeignetes $b \in M$. $\square$

Ein solches f heißt Skolemfunktion für $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \varphi$.

Satz (Skolem-Normalform) Zu jeder L-Formel $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ gibt es neue Funktionszeichen $f_1, \ldots, f_k$ und eine quantorenfreie Formel $\psi(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ von $L \cup \{f_1, \ldots, f_k\}$, sodaß

$$\varphi \textit{ ist erfüllbar } \iff \forall y_1 \ldots \forall y_m \psi \textit{ ist erfüllbar.}$$

Bew: Das Lemma sagt:

$$\forall \vec{x} \exists y \varphi' \textit{ ist erfüllbar } \iff \forall \vec{x}. \varphi'(y/f(\vec{x})) \textit{ erfüllbar ist.}$$

Wende das wiederholt auf φ^{PNF} an. □

$$\begin{array}{lcl} \text{Beispiel:} & & \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \psi \text{ ist erfüllbar} \\ & \iff & \forall x_1 \forall x_2 \exists y_2 . \psi(y_1/f(x_1)) \text{ ist erfüllbar} \\ & \iff & \forall x_1 \forall x_2 . \psi(y_1/f(x_1))(y_2/g(x_1, x_2)) \text{ ist erfüllbar} \end{array}$$

Korollar Zu jeder L-Formel $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ gibt es Funktionszeichen $\vec{f} \notin L$ und eine quantorenfreie $L \cup \{\vec{f}\}$-Formel $\varphi'(\vec{x}, \vec{z})$, sodaß

$$\varphi \textit{ ist allgemeingültig} \iff \exists \vec{x} \varphi' \textit{ ist allgemeingültig.}$$

Bew: Sei $\varphi = \exists \vec{x} \forall y \psi$.

$$\begin{aligned}
&\varphi \text{ ist allgemeingültig} \\
&\quad \iff \quad \neg\varphi \text{ ist nicht erfüllbar} \\
&\quad \iff \quad \forall \vec{x} \exists y \neg\psi \text{ ist nicht erfüllbar} \\
&\quad \iff \quad \forall \vec{x} \neg\psi(y/f(\vec{x})) \text{ ist nicht erfüllbar (mit neuem } f) \\
&\quad \iff \quad \neg\exists \vec{x} \psi(y/f(\vec{x})) \text{ ist nicht erfüllbar} \\
&\quad \iff \quad \exists \vec{x} \psi(y/f(\vec{x})) \text{ ist allgemeingültig.}
\end{aligned}$$

Entsprechend für längere Quantorenpräfixe. Beachte, daß hier die Allquantoren durch Skolemfunktionen ersetzt werden.

Herbrand-Modelle

Ein L-Term t bzw. eine L-Formel φ ist geschlossen, wenn $\mathit{frei}(t) = \emptyset$ bzw. $\mathit{frei}(\varphi) = \emptyset$. Das Herbrand-Universum für L ist

$$H(L) := \{\, t \in L\text{-term} \mid t \text{ ist geschlossen} \,\}.$$

Eine Herbrand-Struktur für L ist eine L-Struktur

$$\mathcal{H} = (H, f^{\mathcal{H}}, \ldots, R^{\mathcal{H}}, \ldots)$$

sodaß $H = H(L)$ und

$$f^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) \quad := \quad f(t_1, \ldots, t_n)$$

für alle n-stelligen Funktionszeichen f von L und $t_1, \ldots, t_n \in H$.

Ein Herbrand-Modell der L-Theorie T ist eine Herbrandstruktur $\mathcal{H}$, die alle Aussagen von T erfüllt, d.h. mit $\mathcal{H} \models T$.

Satz Sei φ eine L-Aussage ohne $\doteq$ in Skolem'scher Normalform. φ ist erfüllbar genau dann, wenn φ ein Herbrand-Modell hat.

Beweis: OBdA enthalte L nur die Funktions- und Relationszeichen in φ und eine Konstante c. Dann ist $H \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{A} \models \varphi$. Interpretiere n-stellige Relationszeichen R durch

$$R^{\mathcal{H}} := \{ (t_1, \ldots, t_n) \in H^n \mid \mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n) \}.$$

Beh: Ist ψ eine L-Aussage in Skolem'scher Normalform, so gilt

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \models \psi.$$

Für atomare Aussagen ist nach Def. von $R^{\mathcal{H}}$ sogar

$$\mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n) \iff \mathcal{H} \models R(t_1, \ldots, t_n);$$

das überträgt sich mit Induktion auf alle quantorenfreien Aussagen.

Sei nun $\psi = \forall x \psi'$ und $\mathcal{A} \models \psi$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \psi'[x/a]$ für jedes $a \in A$. Für jedes $a = [\![t]\!]^{\mathcal{A}}$ mit $t \in H$ ist $1 = [\![\psi']\!]_{[x/a]} = [\![\psi'(x/t)]\!]$. Nach Induktion wissen wir

$$\mathcal{A} \models \psi'(x/t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \models \psi'(x/t),$$

also $\mathcal{H} \models \psi'(x/t)$ und $\mathcal{H} \models \psi'[x/t]$. Das ist für alle $t \in H$ so, also

$$\mathcal{H} \models \forall x \psi'.$$

$\Leftarrow$: Sei $\mathcal{H}$ ein Herbrand-Modell von φ. Dann wird φ von $\mathcal{H}$ erfüllt.

Sei nun $\psi = \forall x \psi'$ und $\mathcal{A} \models \psi$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \psi'[x/a]$ für jedes $a \in A$. Für jedes $a = [\![t]\!]^{\mathcal{A}}$ mit $t \in H$ ist $1 = [\![\psi']\!]_{[x/a]} = [\![\psi'(x/t)]\!]$. Nach Induktion wissen wir

$$\mathcal{A} \models \psi'(x/t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \models \psi'(x/t),$$

also $\mathcal{H} \models \psi'(x/t)$ und $\mathcal{H} \models \psi'[x/t]$. Das ist für alle $t \in H$ so, also

$$\mathcal{H} \models \forall x \psi'.$$

$\Leftarrow$: Sei $\mathcal{H}$ ein Herbrand-Modell von φ. Dann wird φ von $\mathcal{H}$ erfüllt.

Bem. Enthält L die Gleichheit $\doteq$, so ist für $s, t \in H$ nur

$$\mathcal{A} \models s \doteq t \quad \Leftarrow \not\Rightarrow \quad \mathcal{H} \models s \doteq t.$$

Der Satz gilt dann auch, wenn man statt $\mathcal{H}$ einfach $\mathcal{H}/_{\doteq_{\mathcal{A}}}$ nimmt, also die Äquivalenzklassen $[t] := \{\, s \in H \mid \mathcal{A} \models s \doteq t \,\}$ mit

$$P([t], \ldots) :\Longleftrightarrow \mathcal{A} \models P(t, \ldots) \quad \text{und} \quad f([t], \ldots) := [f(t, \ldots)].$$

Macht man dasselbe für eine abzählbare Menge von Aussagen, so erhält man:

Satz (Löwenheim und Skolem) Sei T eine L-Theorie in einem L mit höchstens abzählbarem Vokabular. Dann gilt:

$$\text{T hat ein Modell} \iff T \text{ hat ein höchstens abzählbares Modell } \mathcal{H}$$

Macht man dasselbe für eine abzählbare Menge von Aussagen, so erhält man:

Satz (Löwenheim und Skolem) Sei T eine L-Theorie in einem L mit höchstens abzählbarem Vokabular. Dann gilt:

$$\text{T hat ein Modell} \iff T \text{ hat ein höchstens abzählbares Modell } \mathcal{H}$$

Bew.: $\Rightarrow$: Sei φ^{SNF} eine Skolem-Normalform von φ,

$$T^{SNF} := \{ \varphi^{SNF} \mid \varphi \in T \}.$$

T ist erfüllbar gdw. T^{SNF} ist erfüllbar gdw. T^{SNF} hat ein Herbrand-Modell $\mathcal{H}$. Da T^{SNF} abzählbar ist, ist es auch $\mathcal{H}$. Weglassen der Skolemfunktionen liefert ein abzählbares $\mathcal{H}' \models T$.

Macht man dasselbe für eine abzählbare Menge von Aussagen, so erhält man:

Satz (Löwenheim und Skolem) Sei T eine L-Theorie in einem L mit höchstens abzählbarem Vokabular. Dann gilt:

$$\text{T hat ein Modell} \iff T \text{ hat ein höchstens abzählbares Modell } \mathcal{H}$$

Bew.: $\Rightarrow$: Sei φ^{SNF} eine Skolem-Normalform von φ,

$$T^{SNF} := \{ \varphi^{SNF} \mid \varphi \in T \}.$$

T ist erfüllbar gdw. T^{SNF} ist erfüllbar gdw. T^{SNF} hat ein Herbrand-Modell $\mathcal{H}$. Da T^{SNF} abzählbar ist, ist es auch $\mathcal{H}$. Weglassen der Skolemfunktionen liefert ein abzählbares $\mathcal{H}' \models T$.

Bem.: (Skolem'sches Paradox) Auch die übliche Mengenlehre ist ein solches T. Sie hat also ein abzählbares Modell – obwohl sie über überabzählbare Mengen wie $\mathbb{R}$ spricht.

Vollständigkeitssatz

Def. Die Herbrand-Expansion der L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist

$$E(\varphi) := \{ \varphi(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n) \mid t_1, \ldots, t_n \in H \}.$$

Satz (Gödel,Herbrand,Skolem) Eine Aussage $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ in Skolem'scher Normalform ist genau dann erfüllbar, wenn $E(\varphi)$ (aussagenlogisch) erfüllbar ist.

Bew. OBdA sei φ ohne $\doteq$. Für jede Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H} \models \forall x_1 \ldots x_n . \varphi \\
&\quad\iff \quad \text{für alle } t_1, \ldots, t_n \in H : \ \mathcal{H} \models \varphi[x_1/t_1, \ldots] \\
&\quad\iff \quad \text{für alle } t_1, \ldots, t_n \in H : \ \mathcal{H} \models \varphi(x_1/t_1, \ldots) \\
&\quad\iff \quad \mathcal{H} \models E(\varphi).
\end{aligned}$$

Endlichkeitssatz der Aussagenlogik: Eine Menge T von Formeln der Aussagenlogik ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.

Beweis $\Rightarrow$ ist offenbar. Für $\Leftarrow$ sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Aufzählung aller Aussagevariablen, $\mathit{Var}_n := \{A_1, \ldots, A_n\}$, und

$$T_n := \{\, \varphi \in T \mid \mathit{Var}(\varphi) \subseteq \mathit{Var}_n \,\}.$$

Zu n gibt es nur 2^n Belegungen $g : \mathit{Var}_n \to \mathbb{B}$, also nur $k \leq 2^{2^n}$ Wertverläufe (Wahrheitstafeln) $[\![\cdot]\!] : (\mathit{Var}_n \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$

$A_1 \cdots A_n$	$[\![\cdot]\!]$
g_1	v_1
$\vdots$	$\vdots$
g_{2^n}	v_{2^n}

Also gibt es $E_n := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \subseteq T_n$, und *jedes* $\varphi \in T_n$ ist zu einem aus $\varphi_i \in E_n$ äquivalent.

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem n ein $h_n : Var_n \to \mathbb{B}$, das E_n und damit ganz T_n erfüllt. Definiere daraus eine Belegung g, die T erfüllt. Ist $g(A_k)$ für $1 \leq k < j+1$ schon definiert, so sei

$$g(A_{k+1}) := \begin{cases} 1, & \text{falls es } \infty \text{ viele } i \text{ mit } h_i(A_{j+1}) = 1 \text{ und} \\ & h_i =_j g \text{ (dh. } h|_{Var_j} = g|_{Var_j}\text{) gibt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beh.: g erfüllt jedes $\varphi(A_1, \ldots, A_m) \in T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Beh.: g erfüllt jedes $\varphi(A_1, \dots, A_m) \in T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Bew.: Jedes h_n mit $n \geq m$ erfüllt $T_n \supseteq T_m$, also auch das $\varphi \in T_m$.

Bleibt zu zeigen, daß es ein h_n mit $h =_m g$ gibt. Angenommen, für ein $k < m$ gelte schon

$$h_i =_k g \text{ für } \infty \text{ viele } i \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Fall 1: $g(A_{k+1}) = 1$. Dann gilt $(*)$ für $k+1$ nach Def. von g.

Fall 2: $g(A_{k+1}) = 0$. Dann gibt es nur endlich viele i mit $h_i =_k g$ und $h_i(A_{k+1}) = 0$. Alle anderen h_i mit $h_i =_k g$ haben $h(A_{k+1}) = 0$, also $h_i =_{k+1} g$. Nach $(*)$ gib es ∞ viele davon.

Satz (Herbrand 1932) Eine Aussage $\forall x_1 \dots \forall x_n.\varphi$ in Skolem'schre Normalform ist unerfüllbar genau dann, wenn $E(\varphi)$ eine unerfüllbare *endliche* Teilmenge hat.

Vollständigkeitssatz (abstrakt) der Prädikatenlogik (Gödel 1930) Die Menge der allgemeingültigen Aussagen der Prädikatenlogik ist semi-entscheidbar: es gibt ein Verfahren $V : L$-Aussagen $\dot{\to} \mathbb{B}$, sodaß für jede L-Aussage φ die Berechnung von $V(\varphi)$

- in endlich vielen Schritten 1 ergibt, falls φ allgemeingültig ist,
- in endlich vielen Schritten 0 ergibt oder nicht endet, sonst.

V kann also von allgemeingültigen φ erkennen, *daß* sie es sind, aber nicht von beliebigen φ, *ob* sie es sind.

Vollständigkeitssatz (konkret) der Prädikatenlogik (Gödel 1930):
Für bestimmte Beweiskalküle $\vdash$ gilt für erststufige Theorien T und Aussagen φ: „Wenn φ aus T folgt, so ist φ aus T beweisbar“,

$$T \models \varphi \quad \Longrightarrow \quad T \vdash \varphi.$$

Beweis-Kalkül für die Prädikatenlogik

Wir erlauben in den Sequenzen $\Gamma \triangleright \Delta$ des Gentzenkalküls jetzt endliche Mengen Γ und Δ von *prädikatenlogischen* Formeln.

Als Axiome für $\doteq$ nimmt man folgende Sequenzen: für jede Formel φ, alle Terme s, t und Variable x:

$$\Gamma \triangleright \Delta, t \doteq t \quad (\doteq_1)$$

$$\Gamma, s \doteq t, \varphi(x/s) \triangleright \Delta, \varphi(x/t) \quad (\doteq_2)$$

$$\Gamma, s \doteq t, \varphi(x/t) \triangleright \Delta, \varphi(x/s) \quad (\doteq_3).$$

Zum Beispiel bekommt man damit die Transitivität von $\doteq$ durch

$$\frac{(\varphi := r \doteq x)}{s \doteq t, r \doteq s \triangleright r \doteq t} (\doteq_2)$$

Für die Quantoren kommen folgende Regeln hinzu:

$$\frac{\Gamma, \varphi(x/t) \triangleright \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \triangleright \Delta}\,(\forall L) \qquad \frac{\Gamma \triangleright \Delta, \varphi}{\Gamma \triangleright \Delta, \forall x \varphi}\,(\forall R),$$

falls $x \notin \mathit{frei}(\Gamma, \Delta)$

$$\frac{\Gamma, \varphi \triangleright \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \triangleright \Delta}\,(\exists L), \qquad \frac{\Gamma \triangleright \Delta, \varphi(x/t)}{\Gamma \triangleright \Delta, \exists x \varphi}\,(\exists R)$$

falls $x \notin \mathit{frei}(\Gamma, \Delta)$

Außerdem nimmt man noch die sogenannte *Schnittregel* hinzu:

$$\frac{\Gamma_1 \triangleright \Delta_1, \varphi \qquad \varphi, \Gamma_2 \triangleright \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \triangleright \Delta_1, \Delta_2}\,(\mathit{Cut}).$$

Bem.: Man kann zeigen, daß man diese Regel nicht braucht.

Lemma

(Korrektheit) Jede im Gentzenkalkül beweisbare Sequenz ist allgemeingültig.

Bew. Man zeigt die Allgemeingültigkeit der Axiome und die Korrektheit der Regeln, d.h. daß bei jeder Interpretation und Belegung, die die Obersequenz(en) erfüllt, auch die Untersequenz erfüllt ist. Die Behauptung folgt dann durch Induktion über die Beweistiefe.

Beispiel Alle (einstelligen) Funktionen gelten in der PL als total:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\rhd f(x) \doteq f(x)}\,(=_1)}{\rhd \exists z(z \doteq f(x))}\,(\exists R)}{\rhd \forall x \exists z(z \doteq f(x))}\,(\forall R\ x!)$$

Im zweiten Schritt benutze $\varphi(f(x)/z) := (z \doteq f(x))(z/f(x))$.

Die Quantorenregeln legen „Rezepte“ zur Konstruktion von Beweisen nahe. Der Spezialfall der Regel

$$\frac{\Gamma \triangleright \Delta, \varphi}{\Gamma \triangleright \Delta, \forall x \varphi} (\forall R), \text{ falls } x \notin \mathit{frei}(\Gamma, \Delta)$$

mit leerem Δ besagt: um $\forall x \varphi$ aus den Annahmen Γ zu beweisen, genügt es, aus Γ die Aussage φ für ein „beliebiges“ Objekt x zu zeigen („beliebig“ heißt also: über x wird nichts vorausgesetzt.)

Bem. Umbenennbarkeit gebundener Variablen: ist $y \notin \mathit{frei}(\varphi)$, so ist

$$\triangleright \forall x \varphi \leftrightarrow \forall y\, \varphi(x/y)$$

Hier ist ein Beweis für einen Teil, der andere geht analog:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi(x/y) \triangleright \varphi(x/y)}{\forall x \varphi \triangleright \varphi(x/y)} (\forall L)}{\forall x \varphi \triangleright \forall y\, \varphi(x/y)} (\forall R, y!)}{\triangleright \forall x \varphi \to \forall y\, \varphi(x/y)} (\to R)$$

Beispiel Die Aussage $\exists y \forall x R(x,y) \longrightarrow \forall x \exists y R(x,y)$ ist allgemeingültig (die umgekehrte aber nicht!). Ein Beweis ist:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(x,y) \triangleright R(x,y)}{\forall x\, R(x,y) \triangleright R(x,y)}\,(\forall L)}{\forall x\, R(x,y) \triangleright \exists y\, R(x,y)}\,(\exists R)}{\forall x\, R(x,y) \triangleright \forall x\, \exists y\, R(x,y)}\,(\forall R, x!)}{\exists y\, \forall x\, R(x,y) \triangleright \forall x\, \exists y\, R(x,y)}\,(\exists L, y!)}{\triangleright\, \exists y\, \forall x\, R(x,y) \longrightarrow \forall x\, \exists y\, R(x,y)}\,(\longrightarrow R)$$

Satz (Vollständigkeit des Gentzenkalküls) Jede allgemeingültige Sequenz $\Gamma \triangleright \Delta$ ist mit den Kalkülregeln beweisbar.

Verallgemeinerte Quantoren

In der Umgangssprache gibt es neben den Quantoren „jedes“ und „mindestens ein“ (bzw. „für alle“ und „für einige“) noch weitere Quantoren, z.B.

Singular	Plural	2-stellig
ein	einige	genauso viele – wie
jedes	alle	mehr – als
jedes dritte		weniger – als
–	drei	n-mal so viele – wie
–	mindestens drei	
–	„viele“	
–	„wenige“	
–	„die meisten“	
–	„die wenigsten“	
–	ein Drittel aller	

- Manche dieser Quantoren haben nur bei endlichen Objektbereichen einen klaren Sinn: z.B.

  „höchstens ein Drittel“ der komplexen Zahlen $\simeq$??

- Manche dieser Quantoren kann man mit Mitteln der Prädikatenlogik umschreiben, z.B.

  für mindestens drei $\simeq \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \ldots)$

- Manche dieser Quantoren kann man auch dann nicht in der Prädikatenlogik umschreiben, wenn man nur Interpretationen durch endliche Strukturen zuläßt.

  für viele ... $\simeq$???

Was ist die Bedeutung solcher Quantoren?

- Ein „Quantor“ drückt etwas über die „Quantität“, d.h. Größe im Sinne von Anzahl von etwas, aus.
- Es geht um die Anzahl von Individuen, also um die Größe von Individuenmengen.
- Also: ein Quantor sollte etwas über die *Mächtigkeit* $|A|$ von Individuenmengen A besagen.

$$\begin{array}{rcl}
\text{für „viele“ } x \text{ gilt } P & \simeq & |\{\, x \mid P(x)\,\}| \text{ ist „groß“} \\
\text{für „alle“ } x \text{ gilt } P & \simeq & |\{\, x \mid P(x)\,\}| \text{ ist „maximal“}, \textit{besser}: \\
 & \simeq & |\{\, x \mid \neg P(x)\,\}| = 0 \\
\text{für „einige“ } x \text{ gilt } P & \simeq & |\{\, x \mid P(x)\,\}| > 0 \\
\text{für „die meisten“ } x \text{ gilt } P & \simeq & |\{\, x \mid P(x)\,\}| > |\{\, x \mid \neg P(x)\,\}|
\end{array}$$

Das legt nahe:

> *Die Bedeutung eines (einstelligen) (Individuen-) Quantors ist eine Eigenschaft von (Individuen-) Mengen.*

Ein Quantor Q vom Typ $\langle 1 \rangle$ wird auf dem Universum U durch eine Eigenschaft von Teilmengen von U interpretiert:

$$[\![Q]\!] \subseteq \mathcal{P}(U).$$

Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} [\![\mathit{alle}]\!] & = & \{\, A \mid |\overline{A}| = 0 \,\} \\ [\![\mathit{einige}]\!] & = & \{\, A \mid |A| > 0 \,\} \\ [\![\mathit{die\ meisten}]\!] & = & \{\, A \mid |A| > |\overline{A}| \,\} \\ [\![Qx\varphi]\!] = 1 & \Longleftrightarrow & \{\, a \mid [\![\varphi]\!]_{[x/a]} = 1 \,\} \in [\![Q]\!] \end{array}$$

Determinatoren als Quantoren vom Typ $\langle 1, 1 \rangle$

Die natürliche Sprache hat kaum „unbeschränkte" Quantoren, sondern quantifiziert fast nur über „beschränkte" Teilbereiche:

unbeschränkt	beschränkt	Umschreibung
„für alle" gilt P	„für alle N" gilt P	
$\forall x.P(x)$	$\forall x \in N.P(x)$	$\forall x(N(x) \rightarrow P(x))$
„für einige" gilt P	„für einige N" gilt P	
$\exists x\, P(x)$	$\exists x \in N.P(x)$	$\exists x(N(x) \wedge P(x))$

Nicht jeden „beschränkten" Quantor kann man mit unbeschränkten Quantoren umschreiben:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{„für die meisten } N\text{" gilt } P & = & \mathit{Most}\, x \in N.P(x) \\
 & = & |N \cap P| > |N \cap \overline{P}| \\
 & \neq & \mathit{Most}\, x\, (N(x) \rightarrow P(x)) \text{ o.ä.}
\end{array}
$$

Es ist daher besser, *beschränkte Quantoren* zu erlauben:

$$\text{Quantor(Restriktion,Eigenschaft)}$$
$$= Q(N,P) = Qx\,(N(x), P(x))$$

Ein Quantor Q vom Typ $\langle 1,1\rangle$ wird auf dem Universum U durch eine Relation zwischen Teilmengen von U interpretiert:

$$[\![Q]\!] \subseteq \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U).$$

Beispiele:

$$\begin{array}{rcl}
[\![\mathit{alle}]\!] & = & \{\,(A,B) \mid |A \cap \overline{B}| = 0\,\} \\
[\![\mathit{einige}]\!] & = & \{\,(A,B) \mid |A \cap B| > 0\,\} \\
[\![\mathit{die\ meisten}]\!] & = & \{\,(A,B) \mid |A \cap B| > |A \cap \overline{B}|\,\} \\
[\![Qx(\varphi,\psi)]\!] = 1 & \iff & ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]) \in [\![Q]\!], \\
 & & \text{wobei } [\![\varphi]\!] := \{\,a \mid [\![\varphi]\!]_{[x/a]} = 1\,\}.
\end{array}$$

Für jede Beschränkung N erhält man eine Eigenschaft von Mengen:

$$\begin{aligned} [\![\text{die meisten N}]\!] &= \{ B \mid |N \cap B| > |N \cap \overline{B}| \} \\ &= \{ B \mid (N, B) \in [\![\text{die meisten}]\!] \} \end{aligned}$$

Allgemein: aus jedem Quantor Q vom Typ $\langle 1, 1 \rangle$ und einem Bereich $A \subseteq U$ erhält man einen Quantor Q^A vom Typ $\langle 1 \rangle$ durch

$$[\![Q]\!]^A := \{ B \mid (A, B) \in [\![Q]\!] \}.$$

Man kann einen Quantor vom Typ $\langle 1, 1 \rangle$ auch als eine Funktion

$$Q : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U) \to \mathbb{B}$$

betrachten, indem man $Q(A)(B) := Q(A, B)$ setzt. Eine mit der Syntaxregel $S \to NP\ VP$ aufgebaute Aussage wird dann durch die Funktionsanwendung $[\![S]\!] = [\![\text{NP}]\!]([\![\text{VP}]\!])$ interpretiert:

$$[\![(\textit{viele Affen})\ \textit{brüllen}]\!] = [\![\textit{viele Affen}]\!]([\![\textit{brüllen}]\!]) = Q(A)\,(B).$$

Quantoren und Negation

In der natürlichen Sprache kann man Quantoren „negieren“:

nicht einer = keiner; nicht viele = wenige;
nicht alle = einige nicht;

Jedes Q vom Typ $\langle 1, 1\rangle$ hat eine äußere und eine innere Negation:

$$(\neg Q)(A, B) :\iff \neg\, Q(A, B), \qquad (Q\neg)(A, B) :\iff Q(A, \overline{B}).$$

Der zu Q duale Quantor vom Typ $\langle 1, 1\rangle$ ist $Q^d := \neg(Q\neg)$.

Beispiel:

((nicht viele) Fische) fliegen	=	nicht ((viele Fische) fliegen)
	=	nicht (viele(Fische,fliegen))
viele Fische fliegen nicht	=	(viele Fische) (fliegen nicht)
	=	viele(Fische,nicht-fliegen)

Beispiel: $\forall$ und $\exists$ sind zu einander dual:

$$\exists x \in N\, \varphi \equiv \neg\forall x \in N\, \neg\varphi, \qquad \forall x \in N\, \varphi \equiv \neg\exists x \in N\, \neg\varphi.$$

Ein n-stelliger Quantor Q vom Typ $\langle 1, \ldots, 1 \rangle$ wird auf dem Universum U durch eine n-stellige Mengen-Relation $[\![Q]\!] \subseteq \mathcal{P}(U)^n$ interpretiert. Dem entspricht eine Formel der Gestalt

$$Qx(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

OBdA sei das letzte Argumente das „Prädikat" von Individuen; dann ist $Q(A_1) \ldots (A_{n-1})$ die Bedeutung einer quantifizierten NP.

Quantifizierte NP als Subjekt:

$$\begin{array}{rcl}
[\![(\text{mehr } A \text{ als } B) \text{ sind } P]\!] & = & \{\, (A, B, P) \mid |A \cap P| > |B \cap P| \,\} \\
[\![\text{genauso viele } A \text{ wie } B \text{ sind } P]\!] & = & \{\, (A, B, P) \mid |A \cap P| = |B \cap P| \,\} \\
[\![\text{3-mal so viele } A \text{ wie } B \text{ sind } P]\!] & = & \{\, (A, B, P) \mid |A \cap P| = 3|B \cap P| \,\}
\end{array}$$

Quantifizierte NP als Objekt:

$$\begin{array}{rcl}
[\![\text{Fritz kennt (mehr } A \text{ als } B)]\!] & = & \{\, (A, B, P) \mid |A \cap P| > |B \cap P| \,\} \\
 & & \text{mit } P(x) = \text{„Fritz kennt } x\text{"}
\end{array}$$

Ein Quantor vom Typ $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ wird auf U durch eine Relation

$$[\![Q]\!] \subseteq \mathcal{P}(U^{m_1}) \times \ldots \times \mathcal{P}(U^{m_n})$$

zwischen (Individuen-)Relationen interpretiert.

Beispiel:

- $\langle 2, 2 \rangle$-Quantoren $Q(R, P) \simeq Q(x, y)(R(x, y), P(x, y))$, mit Relationsnomen R als Restriktion und Relationsnomen oder symmetrischem Verb P als Prädikat:
  „Alle|Einige|Viele Brüder sind Zwillinge“ $= Q(B, Z)$
- $\langle 1, 2 \rangle$-Quantoren $Q(R, P) \simeq Q(x, y)(R(x) \wedge R(y), P(x, y))$ mit Nomen als Restriktion und Relationsnomen oder symmetrischem Verb als Prädikat
  „Alle Menschen werden Brüder.“
  „Einige Studenten kennen einander.“

Beachte: selbst bei einstelligem Nomen ist die Subjekt-NP $Q(R)$ ambig, je nach dem $m \in \{1, 2\}$ bei $Q : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U^m) \to \mathbb{B}$.

Eigenschaften von Quantoren

Nicht *jede* Relation $Q \subseteq \mathcal{P}(U^{m_1}) \times \ldots \times \mathcal{P}(U^{m_n})$ entspricht einem Quantor. Was sind logische Eigenschaften von „Quantoren"?

Ein Quantor Q vom Typ $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ sollte u.a. erfüllen:

- Monotonie im k-ten Argument: für alle $A_i \subseteq U^{m_i}$, $A_k \subseteq A'_k$:

$$Q(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n) \Rightarrow Q(A_1, \ldots, A'_k, \ldots, A_n).$$

- Invarianz unter Isomorphie: Für jede Bijektion $f : U \to U$ ist

$$Q(R_1, \ldots, R_n) \iff Q(f(R_1), \ldots, f(R_n))$$

- Erweiterbarkeit des Universums: für alle $A_i \subseteq U^{m_i}$, $U \subseteq U'$

$$Q(A_1, \ldots, A_n) \text{ in } U \iff Q(A_1, \ldots, A_n) \text{ in } U'.$$

Literatur: Stanley Peters, Dag Westerstål: Quantifiers in Language and Logic. Clarendon Press, Oxford 2006

Die Anwendung eines Prädikats auf Nominalphrasen im Plural hat in natürlichen Sprachen verschiedene Lesarten, darunter:

- die distributive Lesart:
  - „alle Menschen sind sterblich“ = „jeder Mensch ist sterblich“
  - „Karl und Emil träumen“ = „Karl träumt und Emil träumt“
- die kollektive Lesart:
  - „Karl und Emil tragen das Klavier“ $\neq$ Kart trägt das Klavier und Emil trägt das Klavier.
  - „die 22 Männer bildeten zwei Fußballmanschaften“ $\neq$ „jeder der 22 Männer bildete zwei Fußballmannschaften“
- die reziproke/paarweise Lesart:
  - „Karl und Emil sind Freunde“ = “(Karl ist Freund von Emil) und (Emil ist Freund von Karl)“.
  - „die meisten Geraden schneiden einander“ = „für die meisten Paare (g, g') von Geraden gilt: g und g' schneiden einander“

Welche Lesart angebracht ist, hängt vom Prädikat ab: drückt es eine Eigenschaft von Indiviuen, Gruppen oder Individuenpaaren aus?

Wie betrachten hauptsächlich die distributive Lesart:

$$Q^{pl} x\, \varphi := \{\, a \in U \mid [\![\varphi]\!]_{[x/a]} = 1 \,\} \in [\![Q]\!] \subseteq \mathcal{P}(U)$$

oder für relativierte Quantoren:

$$Q^{pl} x\, (\varphi, \psi) := ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]) \in [\![Q]\!] \subseteq \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$$

Die paarweise (distributive) Lesart bindet zwei Variablen:

$$Q^{pl} (x, y)\, (\varphi, \psi) := ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]) \in [\![Q]\!] \subseteq \mathcal{P}(U \times U) \times \mathcal{P}(U \times U)$$

und hat mindestens ein zweistelliges Prädikat $\psi(x, y)$. Die Restriktion φ kann eine zweistellige Relation $\varphi(x, y)$ sein –„die meisten Freunde", oder aus einem einstelligen $\varphi(x)$ durch $\varphi(x) \wedge \varphi(y)$ gebildet werden – "die meisten Geraden".

Bem.: Die kollektive Lesart erfordert Formeln mit Mengenvariablen.

Prädikatenlogische Sprache $L(Q)$

Sei L eine erstufige prädikatenlogische Sprache. Die Erweiterung $L(Q)$ von L um den Quantor Q vom Typ $\langle m_1, \dots m_n \rangle$ hat

- als $L(Q)$-Terme die L-Terme,
- als $L(Q)$-Formeln:
  1. die atomaren L-Formeln,
  2. mit Formeln φ und ψ und Variable x auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $\exists x \varphi$,
  3. mit Variablen $\vec{x}_i = x_1, \dots, x_{m_i}$ und Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ auch

$$Q(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)(\varphi_1, \dots, \varphi_{m_n}).$$

(Falls $m_1 = \dots = m_n = k$, einfach $Q(x_1, \dots, x_k)(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.)

Eine $L(Q)$-Struktur ist eine L-Struktur $\mathcal{A} = (U, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, \dots)$ mit einer Relation $Q^{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{P}(U^{n_1}) \times \dots \times \mathcal{P}(U^{m_n})$. Man definiert

$$[\![Q(\vec{x}_1, \dots)(\varphi_1, \dots)]\!]_g^{\mathcal{A}} = 1 :\iff (\varphi_1^{\mathcal{A},h}, \dots, \varphi_n^{\mathcal{A},h}) \in Q^{\mathcal{A}}$$

für $\varphi_i^{\mathcal{A},h} := \{ \vec{a}_i \mid [\![\varphi_i]\!]^{\mathcal{A}}_{h[\vec{x}_i/\vec{a}_i]} \}$ für $i = 1, \dots, n$.

λ-Terme

λ-Terme sind eine Schreibweise für Funktionen und Daten:

$$\begin{array}{lcll} s, t & := & x & \text{Variable} \\ & \mid & c & \text{Konstante} \\ & \mid & (t \cdot s) & \text{Anwendung von } t \text{ auf } s \\ & \mid & \lambda x\, t & \text{Funktionsabstraktion von } t \text{ bzgl. } x \end{array}$$

Beachte: bei der „Anwendung“ $(t \cdot s)$ sind Funktion und Argument gleichrangig, man kann bei beiden eine Variable haben – anders als bei $f(s)$ in Prolog und in der Prädikatenlogik.

Bei jeder Interpretation $\mathcal{D} = (D, \cdot^{\mathcal{D}}, c^{\mathcal{D}}, \ldots)$ sollte u.a. gelten:

$$(\lambda x\, t \cdot s)^{\mathcal{D}} = (\lambda x\, t)^{\mathcal{D}} \cdot^{\mathcal{D}} s^{\mathcal{D}} = t^{\mathcal{D}}[x/s^{\mathcal{D}}] = (t[x/s])^{\mathcal{D}}.$$

Das will man durch *Termvereinfachung*, $s \to t$, ausrechnen können, mit $s^{\mathcal{D}} = t^{\mathcal{D}}$ bei allen Interpretationen $\mathcal{D}$.

Termvereinfachung $s \longrightarrow t$

$$\frac{r \longrightarrow t}{(r \cdot s) \longrightarrow (t \cdot s)}\,(=_1) \qquad \frac{s \longrightarrow u}{(r \cdot s) \longrightarrow (r \cdot u)}\,(=_2) \qquad \frac{r \longrightarrow s}{\lambda x\, r \longrightarrow \lambda x\, s}\,(=_3)$$

$$\frac{y \notin \mathit{frei}(t)}{\lambda x\, t \longrightarrow \lambda y\ t[x/y]}\,(\alpha) \qquad \frac{}{(\lambda x\, t \cdot s) \longrightarrow t[x/s]}\,(\beta) \qquad \frac{x \notin \mathit{frei}(t)}{\lambda x\,(t \cdot x) \longrightarrow t}\,(\eta)$$

Weitere Regeln legen den Umgang mit Konstanten c fest, z.B.

$$(\mathit{add} \cdot 0) \cdot y \longrightarrow y, \qquad (\mathit{add} \cdot ((\mathit{add} \cdot x) \cdot z)) \cdot y \longrightarrow (\mathit{add} \cdot x) \cdot (\mathit{add} \cdot z \cdot y)$$

Die syntaktische Einsetzung $t[x/s]$ ist so zu definieren, daß gebundene Variablen in t umbenannt werden, damit kein $y \in \mathit{frei}(s)$ in den Wirkungsbereich eines λy von t gerät.

Mit $s \longrightarrow^* t$ ist gemeint, daß man von s mit diesen Regeln (und gebundener Umbenennung) zu t kommen kann.

Syntaktische Einsetzung $t[x/s]$

Die *frei* in einem λ-Term vorkommenden Variablen sind:

$$\begin{array}{rcl} \mathit{frei}(y) & := & \{y\}, \\ \mathit{frei}(c) & := & \emptyset, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathit{frei}((s \cdot t)) & := & \mathit{frei}(s) \cup \mathit{frei}(t), \\ \mathit{frei}(\lambda x\, t) & := & \mathit{frei}(t) \setminus \{x\}. \end{array}$$

Die *Ersetzung (der freien Vorkommen) von x in t durch s*, kurz: $t[x/s]$, definiert man induktiv über den Aufbau von t:

$$\begin{array}{rcl} y[x/s] & := & \begin{cases} s, & \text{falls } y \equiv x, \\ y, & \text{falls } y \not\equiv x \end{cases} \\ c[x/s] & := & c \\ (r \cdot t)[x/s] & := & (r[x/s] \cdot t[x/s]) \\ \lambda y\, t\,[x/s] & := & \begin{cases} \lambda y\, t, & \text{falls } y \equiv x, \\ \lambda y\, (t[x/s]), & \text{sonst, falls } y \notin \mathit{frei}(s), \\ \lambda z\, (t[y/z][x/s]), & \text{sonst, mit } z \notin \mathit{frei}(\lambda y\, t \cdot s) \end{cases} \end{array}$$

Beispiele für $t[x/s]$

$$
\begin{array}{rcll}
\underbrace{\lambda x(y \cdot x)}_{t}[x/\underbrace{\lambda z(c \cdot z)}_{s}] & = & \lambda x(y \cdot x) & t[x/s] = t,\ \text{da}\ x \notin \mathit{frei}(t) \\
\lambda x(y \cdot x)[y/\lambda z(c \cdot z)] & = & \lambda x(\lambda z(c \cdot z) \cdot x) & \text{da}\ x \notin \mathit{frei}(s) \\
\\
\lambda x(y \cdot x)[y/\lambda z(x \cdot z)] & = & \lambda z((y \cdot x)[x/z][y/\lambda z(x \cdot z)]) & \\
 & = & \lambda z((y \cdot z)[y/\lambda z(x \cdot z)]) & \\
 & = & \lambda z(\lambda z(x \cdot z) \cdot z) & \\
 & =_\alpha & \lambda u(\lambda z(x \cdot z) \cdot u) & \\
\lambda y\, \lambda x\, (y \cdot x) \cdot \lambda z(x \cdot z) & \to^* & \lambda u(\lambda z(x \cdot z) \cdot u) &
\end{array}
$$

Die β-*Redexe* eines Terms sind die Teilterme, auf die die β-Regel angewendet werden kann.

Durch Anwenden der Reduktionsregeln können neue Redexe entstehen: in

$$\begin{array}{rcl} s & = & \lambda x((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot \lambda v\, v \\ & \rightarrow_\beta & ((x \cdot y) \cdot (x \cdot y))[x/\lambda v\, v] \\ & = & ((\lambda v\, v \cdot y) \cdot (\lambda v\, v \cdot y)) \;\; =: t \\ & \rightarrow_\beta & (y \cdot (\lambda v\, v \cdot y)), \\ & \rightarrow_\beta & (y \cdot y), \end{array}$$

enthält der Ausgangsterm s *einen* β-Redex und der durch die Reduktion entstandene Term t *zwei* β-Redexe.

Die „Vereinfachung“ kann sogar divergieren!

Beispiel Für $t := \lambda x((x \cdot x) \cdot (x \cdot x))$ ist

$$\begin{array}{rcl} (t \cdot t) & = & (\lambda x((x \cdot x) \cdot (x \cdot x)) \cdot t) \\ & \to_\beta & ((x \cdot x) \cdot (x \cdot x))[x/t] \\ & = & ((t \cdot t) \cdot (t \cdot t)) \\ & \to_\beta & (((t \cdot t) \cdot (t \cdot t)) \cdot (t \cdot t)) \ \to_\beta \ \ldots \end{array}$$

Eine uneingeschränkte Anwendungsoperation $\cdot$ ist also problematisch, wenn man Terme zu irreduziblen „Werten“ vereinfachen will.

Es ist auch schwierig, eine Interpretation $\mathcal{D} = (D, \cdot^{\mathcal{D}}, c^{\mathcal{D}}, \ldots)$ zu finden, bei der man jedes Objekt $d \in D$ in $d \cdot^{\mathcal{D}} d$ links als eine Funktion interpretieren kann, die auf sich selbst „angewendet wird“.

Getypte λ-Terme

Einfacher ist es, wenn man Objekte und Terme verschiedener Typen

$$\sigma, \tau := \alpha \mid \mathsf{bool} \mid \mathsf{int} \mid (\sigma \to \tau)$$

vorsieht und nur „typkorrekte“ Anwendungen $(t \cdot s)$ benutzt, wo t von einem Funktionstyp $(\sigma \to \tau)$ und s vom Argumenttyp σ ist.

Ein Typkontext Γ ist eine Liste von Annahmen $x : \tau$ von Typen τ für Variable x. Ein Term t hat im Kontext Γ den Typ τ, wenn $\Gamma \vdash t : \tau$ nach folgenden Regeln herleitbar ist:

$$\frac{}{x : \sigma, \Gamma \vdash x : \sigma}\,(Var) \qquad \frac{x \not\equiv y, \quad \Gamma \vdash x : \sigma}{y : \tau, \Gamma \vdash x : \sigma}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \sigma \to \tau, \quad \Gamma \vdash s : \sigma}{\Gamma \vdash (t \cdot s) : \tau}\,(App) \qquad \frac{x : \rho, \Gamma \vdash t : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x\, t : (\rho \to \tau)}\,(Abs)$$

Der Kontext enthalte auch für Konstante (nur) einen Typ:

$$\frac{}{c : \sigma, \Gamma \vdash c : \sigma}\,(Const).$$

Manche Terme haben im selben Kontext viele Typen, z.B.

$$\frac{x : \text{int} \vdash x : \text{int}}{\vdash \lambda x.x : (\text{int} \to \text{int})}\,(Abs) \qquad \frac{x : \sigma \vdash x : \sigma}{\vdash \lambda x.x : (\sigma \to \sigma)}\,(Abs)$$

Andere Terme haben keinen Typ, z.B. die „Selbstanwendung“:

$$\cfrac{\cfrac{x : \alpha \to \beta \vdash x : \alpha \to \beta, \qquad x : \alpha \vdash x : \alpha}{x : \alpha \vdash (x \cdot x) : \beta}\,(*App)\ \alpha = ?(\alpha \to \beta)}{\vdash \lambda x(x \cdot x) : (\alpha \to \beta)}\,(App)$$

Man kann eine „allgemeinste Typisierung“ für *t suchen*, indem man unbekannte Typen für freie Variable annimmt und die nötigen Typgleichungen durch Unifikation von Typen löst:

$$\frac{f : \alpha, x : \beta \vdash f : \alpha \qquad f : \alpha, x : \beta \vdash x : \beta}{f : \alpha, x : \beta \vdash (f \cdot x) : \gamma}\,(App,\ \alpha = (\beta \to \gamma))$$

Einfachheitshalber notiert man die Typen als oberen Index, wie in

$$(f^{\beta\to\gamma} \cdot x^{\beta})^{\gamma}, \qquad \lambda x^{\alpha\to\beta} \lambda y^{(\alpha\to\beta)\to\alpha} (x \cdot (y \cdot x)^{\alpha})^{\beta}.$$

Beachte: Nach (Abs) haben im Term $\lambda x^{\sigma} t$ alle freien Vorkommen von x in t denselben Typ σ. Insbesondere gilt:

$$\Gamma \vdash (\lambda xt \cdot s) : \tau \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vdash t[x/s] : \tau.$$

Man kann zeigen:

1. Typerhaltung Ist $\Gamma \vdash t : \tau$ und $t \to^{*} s$ eine „Vereinfachung“ von t, so ist $\Gamma \vdash s : \tau$.
2. Starke Normalisierung: Ist $\Gamma \vdash t : \tau$, so terminiert *jede* Reduktionsfolge $t \to t' \to t'' \to \dots$ (bis auf α-Reduktionen) in derselben Normalform $nf(t)$.

Interpretation der getypten λ-Terme

Für getypte Terme ist es einfach, Interpretationen anzugeben.

Sei *Typ* die Menge der variablenfreien Typen und L die Sprache der λ-Terme mit Konstanten $c : \tau_c$ mit $\tau_c \in Typ$. Eine (volle) Typstruktur

$$\mathcal{D} = (\langle D_\sigma \rangle_{\sigma \in Typ}, c^{\mathcal{D}}, \ldots)$$

besteht aus einer Familie von Universen D_σ und Elementen $c^{\mathcal{D}}$, so daß für alle Typen σ, τ und Konstanten $c : \tau$ gilt:

- $D_{(\sigma \to \tau)} = \{ f \mid f : D_\sigma \to D_\tau \}$ ist der Bereich aller (mengentheoretischen) totalen Funktionen von D_σ nach D_τ,
- $c : \tau$ wird durch ein Element $c^{\mathcal{D}} \in D_\tau$ interpretiert.

Beachte: auch wenn die Basistypen durch endliche Bereiche wie $D_{bool} = \{0, 1\}$ interpretiert werden, ist $\mathcal{D}$ doch immer unendlich.

Sei e der Typ der „Individuen" und t (= bool) der Typ der „Wahrheitswerte". Dann kann man logische Formeln als spezielle λ-Terme vom Typ t ansehen:

- Junktoren können wir als (getypte) Konstante verstehen:

$$(\varphi \Rightarrow \psi) := ((\Rightarrow^{t \to (t \to t)} \cdot \varphi) \cdot \psi)$$

- Quantoren können wir als (getypte) Konstante verstehen:

$$\forall x \varphi := (\forall^{(e \to t) \to t} \cdot \lambda x^e\, \varphi).$$

- (zweistellige) Prädikate und Funktionen sind Konstante

$$P : e \to (e \to t) \quad \text{und} \quad f : e \to (e \to e).$$

Man kann auch Quantoren über Objekte eines Typs $\sigma \neq e$ zulassen:

$$\forall x^\sigma \varphi := (\forall^{(\sigma \to t) \to t} \cdot \lambda x^\sigma\, \varphi).$$

Mit λ-Termen können wir die Bedeutung von quantifizierten Nominalphrasen und verallgemeinerten Quantoren ausdrücken.

Eigennamen sind Konstante $c : e$.

$$\text{Peter} \quad \mapsto \quad c : e$$

Quantifizierte Nominalphrasen haben einen komplexen Typ:

$$(\text{alle } N) \quad \mapsto \quad \lambda P^{e\to t}\, [\forall x^e((N \cdot x) \Rightarrow (P \cdot x))^t]^t : (e \to t) \to t$$

Verallgemeinerte Quantoren vom Typ $\langle 1, 1\rangle$ sind Konstanten vom Typ $(e \to t) \to ((e \to t) \to t)$

$$\text{alle} \quad \mapsto \quad \lambda N^{e\to t}\, \lambda P^{e\to t}\, \forall x^e((N \cdot x) \Rightarrow (P \cdot x))^t$$

Wir interpretieren getypte λ-Terme in einer vollen Typstruktur

$$\mathcal{D} = (\langle D_\sigma \rangle_{\sigma \in \mathit{Typ}}, c^{\mathcal{D}}, \dots) \quad \text{mit } D := \bigcup \{ D_\sigma \mid \sigma \in \mathit{Typ} \}.$$

Ein getypter λ-Term $t(x^\sigma, \dots)^\tau$ sei eine Typisierung $\Gamma \vdash t : \tau$ von t, deren Annahmen $x : \sigma$ an den freien Vorkommen von x in t stehen. Eine Γ respektierende Belegung $g : \mathit{Var} \to D$ belegt x^σ aus Γ mit einem Element $g(x^\sigma) \in D_\sigma$. Der Wert $[\![t(x^\sigma, \dots)^\tau]\!]_g^{\mathcal{D}} \in D_\tau$ sei dann:

$$\begin{array}{rcl} [\![x^\sigma]\!]_g^{\mathcal{D}} & := & g(x^\sigma) \in D_\sigma, \\ [\![c^\sigma]\!]_g^{\mathcal{D}} & := & c^{D_\sigma} \in D_\sigma, \\ [\![(t^{\sigma \to \tau} \cdot s^\sigma)^\tau]\!]_g^{\mathcal{D}} & := & [\![t^{\sigma \to \tau}]\!]_g^{\mathcal{D}} \cdot^{\mathcal{D}} [\![s^\sigma]\!]_g^{\mathcal{D}} := [\![t^{\sigma \to \tau}]\!]_g^{\mathcal{D}}([\![s^\sigma]\!]_g^{\mathcal{D}}), \\ [\![\lambda x^\sigma t^\tau]\!]_g^{\mathcal{D}} & := & \text{das } f : D_\sigma \to D_\tau \text{ mit } f(a) = [\![t^\tau]\!]_{g[x^\sigma/a]}^{\mathcal{D}} \end{array}$$

Die Anwendung $(f \cdot^{\mathcal{D}} a)$ ist die übliche Funktionsanwendung $f(a)$!

Jeder Termvereinfachungsschritt nach den Regeln des λ-Kalküls ist eine in $\mathcal{D}$ allgemeingültige Gleichung:

Prop. Ist $t \to s$, so ist für jede Belegung g über $\mathcal{D}$: $[\![t]\!]_g^{\mathcal{D}} = [\![s]\!]_g^{\mathcal{D}}$.

Bew: Für die (β)-Regel $(\lambda x t \cdot s) \to t[x/s]$ sieht man das mit

$$\begin{aligned}
[\![(\lambda x^\sigma t \cdot s)^\tau]\!]_g^{\mathcal{D}} &:= [\![\lambda x^\sigma t]\!]_g^{\mathcal{D}}([\![s^\sigma]\!]_g^{\mathcal{D}}) \\
&= [\![t]\!]_{g[x^\sigma/[\![s^\sigma]\!]_g^{\mathcal{D}}]}^{\mathcal{D}} \\
&= [\![t[x^\sigma/s^\sigma]^\tau]\!]_g^{\mathcal{D}},
\end{aligned}$$

wobei man den letzten Schritt durch Induktion über den Aufbau von r zeigt (Ersetzungslemma).

Montague-Semantik

Idee: Man erhält eine Bedeutung $[\![\alpha]\!]$ eines natürlichsprachlichen Ausdrucks α in zwei Schritten:

1. übersetze α in einen getypten λ-Term α',
2. werte α' in einer vollen Typstruktur $\mathcal{D}$ aus: $[\![\alpha]\!] := [\![\alpha']\!]_g^{\mathcal{D}}$.

Die Belegung g legt die Bedeutung indexikalischer Ausdrücke (Personalpronmina, Zeit- und Ortsadverbien usw.) fest.

Je nachdem, wie ausdrucksstark das betrachtete Fragment der natürlichen Sprache ist, braucht man eine andere Typsprache L_{Typ}:

- extensionale Interpretation (für statische Objekte, Relationen): Grundtypen sind e (Individuen) und t (Wahrheitswerte),
- intensionale Interpretation (für Adverbien, Glaubensverben u.a.): Grundtypen sind e, t und s (Situationen, mögl.Welten)

Montague-Grammatik

R. Montague hat um 1970 eine Alternative zur Generativen Grammatik von N. Chomsky ausgearbeitet, die eine –durch eine Übersetzung der natürlichsprachlichen Ausdrücke in logische Formeln angegebene– modelltheoretische Semantik hat.

Die *syntaktischen Kategorien* sind:

$$
\begin{array}{rcll}
A, B & := & e & \text{(Entitätenbezeichner)} \\
 & \mid & t & \text{(Aussagen)} \\
 & \mid & A/B & \text{(A-Ausdrücke, denen ein B-Ausdruck fehlt)} \\
 & \mid & A/\!/B & \text{(A-Ausdrücke, denen ein B-Ausdruck fehlt)}
\end{array}
$$

Jeder syntaktischen Kategorie wird ein Typ der Logiksprache L_{Typ} zugeordnet. Ausdrücke der Kategorien A/B und $A/\!/B$ verhalten sich syntaktisch verschieden, aber semantisch gleich, und erhalten deshalb denselben Typ.

Die syntaktischen Kategorien der PTQ-Grammatik

Montague, *The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English* [?] verwendet folgende Kategorien:

Kategorie		Informelle Bezeichnung	Basisausdruck
	e	Eigennamen	John, he_n
	t	Satz	–
CN :=	t//e	Gemeinname	man
IV :=	t/e	Verbalphrase	walks
T :=	t/IV	Nominalphrase (3.sg), Term	–
TV :=	IV/T	Transitives Verb	find, love
IAV :=	IV/IV	VP-Adverb	slowly
	t/t	Satzadverb	necessarily
	IAV/T	Präposition	in
	IV/t	Verb mit Satzkomplement	believe
	IV//IV	Verb mit Infinitivkomplement	try
DET :=	T/CN	Determinator	every, a, the

Die extensionale Sprache L_{Typ} getypter λ-Terme

Die Menge *Typ* der einfachen Typen σ, τ ist:

$$\begin{array}{lcll} \sigma, \tau & := & e & \text{(Individuen)} \\ & \mid & t & \text{(Wahrheitswerte)} \\ & \mid & (\sigma \to \tau) & \text{(Funktionen)} \end{array}$$

Die *Sprache* L_{Typ} besteht aus den *Termen t vom Typ* τ, kurz: $t : \tau$, für jedes $\tau \in$ *Typ*, die wie folgt aufgebaut sind:

1. Konstante $c : \tau$ und Variable x^τ sind Terme vom Typ τ.
2. Ist s ein Term vom Typ σ und t ein Term vom Typ $(\sigma \to \tau)$, so ist $t(s)$ (oder: $(t \cdot s)$) ein Term vom Typ τ.
3. Ist x^σ eine Variable und t ein Term vom Typ τ, so ist $\lambda x^\sigma t$ ein Term vom Typ $(\sigma \to \tau)$.

Terme vom Typ t heißen *Formeln* und werden mit φ, ψ bezeichnet, solche vom Typ e *Individuenterme*.

Wir nehmen an, daß es folgende Konstanten $c : \tau$ gibt:

$$\begin{array}{ll} \neg : t \to t & \\ \vee : t \to (t \to t) & \exists^\tau : (\tau \to t) \to t \\ \wedge : t \to (t \to t) & \forall^\tau : (\tau \to t) \to t \end{array}$$

Für diese Konstanten wird die übliche Schreibweise benutzt, z.B.

$$\begin{array}{lll} (\varphi \wedge \psi) & \text{statt} & \wedge(\varphi)(\psi), \\ \forall x^\sigma \varphi & \text{statt} & \forall^\sigma(\lambda x^\sigma \varphi), \end{array}$$

Logische Formeln sind also in den Termen von L_{Typ} enthalten.

Übersetzung der syntaktischen Kategorien

Syntaktischen Kategorien A werden Typen A' von L_{Typ} zugeordnet; Ausdrücke der Kategorie A werden später in λ-Terme vom Typ A' übersetzt.

Jeder syntaktischen Kategorie A wird durch

$$\begin{array}{lcl} e' & := & e \\ t' & := & t \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} (A/B)' & := & (B' \to A') \\ (A/\!\!/B)' & := & (B' \to A'). \end{array}$$

ein Typ A' von L_{Typ} zugeordnet.

Übersetzung der syntaktischen Kategorien

Ignorieren wir die Verben mit Satzkomplement, so erhalten wir folgende Typen und entsprechende Objekte:

Kategorie A	Typ A' von L_{Typ}	Objekt vom Typ A'
e	e	Individuum
t	t	Wahrheitswert
CN := t//e	$e \rightarrow t$	Individueneigenschaft
IV := t/e	$e \rightarrow t$	Individueneigenschaft
T := t/IV	$(e \rightarrow t) \rightarrow t$	Eigenschaft von Individueneigenschaften
TV := IV/T		
IAV := IV/IV	$(e \rightarrow t) \rightarrow (e \rightarrow t)$	Modifikator von Individueneigenschaften
t/t	$t \rightarrow t$	Eigenschaft von Wahrheitswerten
IAV/T		
DET := T/CN	$(e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow t)$	

Basisausdrücke und ihre Übersetzung

Zuerst werden den den atomaren Ausdrücken α der Kategorie A (evtl. zusammengesetzte) Terme α' des Typs A' zugeordnet, meist Konstante. Wir nehmen (für die extensionale Teilsprache) an:

Die syntaktischen Kategorien enthalten folgende Basisausdrücke:

1. Kategorie CN (Gemeinnamen): *man*, *woman*, *book*
2. Kategorie e (Individuennamen): *John*, *Mary*, he_n ($n \in \mathbb{N}$),
3. Kategorie IV (intransitive Verben): *walk*, *talk*,
4. Kategorie TV (transitive Verben): *find*, *see*, *read*
5. Kategorie DET: *the*, *a*, *some*, *every*.

Wir schreiben oft $w : A$ oder w^A statt „w hat die Kategorie A“.

Bem: Eigennamen und Pronomen haben bei Montague die Kategorie T, hier die Kategorie *e*. Das macht die Übersetzung uniformer und wird durch die Syntaxregel (S 1) kompensiert, mit der sie in Ausdrücke der Kategorie T umgewandelt werden können.

Jedem Wort w der Kategorie A wird eine Konstante w' vom Typ A' zugeordnet, außer bei

- den Pronomina $he_n : e$, denen die Variablen $x_n : e$ zugeordnet werden, und
- den Quantoren, die wie folgt übersetzt werden:

$$\begin{aligned}
(every^{DET})' &:= \lambda P^{e\to t}\lambda Q^{e\to t}\forall x^e(P(x) \to Q(x)) \\
(a^{DET})' &:= \lambda P^{e\to t}\lambda Q^{e\to t}\exists x^e(P(x) \wedge Q(x)) \\
(the^{DET})' &:= \lambda P^{e\to t}\lambda Q^{e\to t}\exists x^e((\forall y^e(P(y) \leftrightarrow x \doteq y) \wedge Q(x)).
\end{aligned}$$

Die Übersezung von α^{DET} hat den richtigen Typ $DET' = (CN' \to T') = (e \to t) \to ((e \to t) \to t)$.

Für Basisausdrücke anderer Kategorien erhalten wir z.B. folgende Übersetzungen:

$$\begin{aligned}
(man^{CN})' &:= man' : CN' = man' : (e \to t), \\
(walk^{IV})' &:= walk' : IV' = walk' : (e \to t), \\
(John^{e})' &:= John' : e. \\
(he^{e}_{n})' &:= x_n : e.
\end{aligned}$$

Bem.: Die Übersetzung des bestimmten Artikels funktioniert nicht besonders gut, und der unbestimmte Artikel sollte nicht überall wie ein Existenzquantor behandelt werden.

Bildung und Übersetzung zusammengesetzter Ausdrücke

Die Bildung komplexer Ausdrücke geben wir durch numerierte Regeln der folgenden Form an:

$$\text{(S Nr.)}\ \frac{\alpha_1 : A_1,\ \ldots, \alpha_k : A_k}{\alpha : A}$$

Diese Regel besagt: ist α_1 ein Ausdruck der Kategorie A_1 usw., so ist der (aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ gebildete) Ausdruck α von der Kategorie A.

Die Übersetzung eines zusammengesetzten Ausdrucks wird durch entsprechende Regeln

$$\text{(T Nr.)}\ \frac{\alpha_1' : A_1',\ \ldots, \alpha_k' : A_k'}{\alpha' : A'}$$

angegeben, die angeben, wie die Übersetzung von α aus den Übersetzungen der Teilausdrücke gebildet wird.

Bildung und Übersetzung komplexer Ausdrücke

(S 1) $\dfrac{\alpha : e}{\alpha : T}$

(T 1) $\dfrac{\alpha' : e}{\lambda P^{e \to t}[P(\alpha')] : (e \to t) \to t}$

(S 2) $\dfrac{\delta : DET, \quad \xi : CN}{\delta\ \xi : T}$

(T 2) $\dfrac{\delta' : (CN' \to T'), \quad \xi' : CN'}{\delta'(\xi') : T'}$

(S 3_n) $\dfrac{\xi : CN, \quad \varphi : t}{\xi \text{ such that } \varphi[he_n/he] : CN}$

(T 3_n) $\dfrac{\xi' : CN', \quad \varphi' : t}{\lambda x_n^e(\xi'(x_n) \wedge \varphi') : CN'}$

(S 4) $\dfrac{\alpha : T, \quad \delta : IV}{\alpha\ \delta^{3.sg} : t}$

(T 4) $\dfrac{\alpha' : T', \quad \delta' : IV'}{\alpha'(\delta') : t}$

(S 5) $\dfrac{\delta : TV, \quad \beta : T}{\delta\ \beta^{acc} : IV}$

(T 5) $\dfrac{\delta' : (T' \to IV'), \quad \beta' : T'}{\delta'(\beta') : IV'}$

(S 11a) $\dfrac{\varphi : t, \quad \psi : t}{\varphi \text{ and } \psi : t}$

(T 11a) $\dfrac{\varphi' : t, \quad \psi' : t}{(\varphi' \wedge \psi') : t}$

(S 11b) $\dfrac{\varphi : t, \quad \psi : t}{\varphi \text{ or } \psi : t}$

(T 11b) $\dfrac{\varphi' : t, \quad \psi' : t}{(\varphi' \vee \psi') : t}$

(S 12a) $\dfrac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ and } \gamma : IV}$

(T 12a) $\dfrac{\delta' : e \to t, \quad \gamma' : e \to t}{\lambda x^e(\delta'(x) \wedge \gamma'(x)) : e \to t}$

(S 12b) $\dfrac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ or } \gamma : IV}$

(T 12b) $\dfrac{\delta' : e \to t, \quad \gamma' : e \to t}{\lambda x^e(\delta'(x) \vee \gamma'(x)) : e \to t}$

(S 13) $\dfrac{\alpha : T, \quad \beta : T}{\alpha \text{ or } \beta : T}$

(T 13) $\dfrac{\alpha' : T', \qquad \beta' : T'}{\lambda P^{e \to t}(\alpha'(P) \vee \beta'(P)) : T'}$

$$(\text{S } 14_n)\ \frac{\alpha : T, \qquad \varphi : t}{\varphi[he_n/\alpha] : t} \qquad\qquad (\text{T } 14_n)\ \frac{\alpha' : T', \quad \varphi' : t}{\alpha'(\lambda x_n^e.\varphi') : t}$$

Darin werden zwei Varianten der Ersetzung $\alpha[x/\beta]$ benutzt:

1. Die Ersetzung $\varphi[he_n/\alpha]$ in (S 14_n) ist so definiert: falls $\alpha \equiv he_k$ ist, werden alle he_n in φ durch he_k (im jeweils gleichen Kasus) ersetzt; andernfalls wird das erste Vorkommen von he_n durch α und die übrigen durch *he* (bzw. *she*, *it*) ersetzt, wobei der Kasus vom jeweiligen Vorkommen von he_n und das Genus vom ersten Basisausdruck der Kategorie CN oder T in α übernommen wird.
2. Die Ersetzung $\varphi[he_n/he]$ in (S 3) ist etwas anders: alle Vorkommen von he_n in φ sollen durch *he* bzw. *she,it* ersetzt werden, wobei das Genus sich nach dem Genus des ersten Basisausdrucks der Kategorie CN in ξ richtet.

In der Montague-Grammatik entspricht die Syntaxregel

$$(\mathrm{S}\ 4)\ \frac{\alpha : T, \quad \delta : IV}{\alpha\ \delta^{3.sg}\ : t} \quad = \frac{\alpha : T, \quad \delta : IV}{s_4(\alpha, \delta) : t}$$

der durch $s_4(\alpha, \delta) = \alpha\ \delta^{3.sg}$ definierten Funktion $s_4 : T \times IV \to t$.

Der Syntaxregel ist eine Übersetzungsregel zugeordnet,

$$(\mathrm{T}\ 4)\ \frac{\alpha' : T', \qquad \delta' : IV'}{\alpha' \cdot \delta' : t'} \quad = \frac{\alpha' : T', \qquad \delta' : IV'}{s_4'(\alpha', \delta') : t'}$$

die einer Bedeutungsfunktion $t_4 := s_4' : T' \times IV' \to t'$ entspricht.

Also hat man in der Montague-Grammatik:

- Syntaxregel = Konstruktionsfunktion $s : A_1 \times \ldots \times A_n \to A$
- Syntaktische Struktur = „Analysebaum“ = aus den Namen der Aufbaufunktionen s gebildeter „Konstruktionsterm“

Zu jedem Konstruktor s gibt es eine Bedeutungsfunktion s':

$$\frac{t_1 : A_1, \ldots, t_n : A_n}{s(t_1, \ldots, t_n) : A}(S\ \ k) \qquad \frac{t'_1 : A'_1, \ldots, t'_n : A'_n}{s'(t'_1, \ldots, t'_n) : A'}(T\ \ k)$$

Abstrakte Syntax:

- Kategorie = Typausdruck
- syntaktische Struktur = Konstruktions*term*,
- „Syntaxregel“ = getypter Funktionsname („Konstruktor“)

Die Bedeutung von Ausdrücken kann dann induktiv über den Aufbau der Konstruktionsterme definiert werden.

$$\begin{tikzcd}
\text{Konstruktionsterm} & s \arrow[d, shift right, "\text{Anwenden der Konstruktionsfunktionen}"'] & \sim & s' \arrow[d, "\text{Anwenden der Bedeutungsfunktionen}"] & \text{Bedeutungsterm} \\
\text{Zeichenreihe} & w \arrow[u, shift right, "\text{Parsen}"'] & & [\![\ w \ ]\!] & \text{Bedeutung}
\end{tikzcd}$$

Übersetzung von Personalpronomen und Eigennamen

Als Terme aufgefaßte Pronomen und Eigennamen werden mit (T 1) übersetzt:

$$\begin{aligned} ((he_n^e)^T)' &=_1 \lambda P^{e\to t}[P((he_n^e)')] : (e \to t) \to t \\ &= \lambda P^{e\to t}[P(x_n^e)] : (e \to t) \to t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((John^e)^T)' &=_1 \lambda P^{e\to t}[P((John^e)')] : (e \to t) \to t \\ &= \lambda P^{e\to t}[P(John'^e)] : (e \to t) \to t. \end{aligned}$$

In einem Modell $\mathcal{D}$ ist der Wert $[\![\lambda P[P(John')]]\!]^{\mathcal{D}} \in D_{(e\to t)\to t}$ dieses Terms nicht das Individuum $[\![John']\!]^{\mathcal{D}} \in D_e$, sondern *die charakteristische Funktion der Menge aller seiner Eigenschaften*.

Das wird so kompliziert gemacht, damit die Übersetzung nach demselben Schema verläuft wie bei koordinierten Termen wie *John or Mary* und quantifizierten Termen wie *every man* (s.u.).

Übersetzung atomarer Aussagen mit intransitivem Verb

Einfache Aussagen werden wie folgt übersetzt.

$$\begin{aligned} (((John^e)^T \ walk^{IV}s)^t)' &=_4 ((John^e)^T)'((walk^{IV})') : t \\ &=_1 \lambda P^{e\to t}[P(John'^{\,e})](walk'^{\,e\to t}) : t \end{aligned}$$

Mit einer β-Reduktion kann der rechte Ausdruck vereinfacht werden zu

$$walk'^{e\to t}(John'^{\,e}) : t,$$

ohne daß sich sein Wert bei einer Belegung g über einer Struktur $\mathcal{D}$ ändert.

Obwohl die Kategorie der Terme nur Nominalphrasen der dritten Person im Singular enthält, enthalten die Ausdrücke der Kategorie IV nicht die Vollformen, sondern die Infinitive (bzw. Stammformen) der darin vorkommenden Verben. Deshalb hat die Morphologie der Vollform des Verbs keinen Einfluß auf das Übersetzungsergebnis.

Aussagen mit koordinierten Eigennamen werden mit (T 4), (T 13) und den obigen Übersetzungen von Termen übersetzt wie bei

$$
\begin{aligned}
&(((John\ or\ Mary)^T\ walk^{IV}s)^t)' \\
&\quad =_4 \quad ((John^T\ or\ Mary^T)^T)'((walk^{IV})') \\
&\quad =_{13} \quad \lambda P[(John^T)'(P) \vee (Mary^T)'(P)]((walk^{IV})') : t \\
&\quad = \quad \lambda P[\lambda Q[Q(John'^{\,e})](P) \vee \lambda Q[Q(Mary'^{\,e})](P)](walk'^{\,e\rightarrow t}) : t.
\end{aligned}
$$

Durch Anwendungen von β-Reduktionen kann dieser Ausdruck weiter vereinfacht werden zu

$$
\begin{aligned}
&\lambda P[\lambda Q[Q(John'^{\,e})](P) \vee \lambda Q[Q(Mary'^{\,e})](P)](walk'^{\,e\rightarrow t}) : t \\
&\quad \rightarrow_\beta \quad \lambda P[P(John') \vee P(Mary')](walk'^{\,e\rightarrow t}) : t \\
&\quad \rightarrow_\beta \quad [walk^{e\rightarrow t}(John'^{\,e}) \vee walk^{e\rightarrow t}(Mary'^{\,e})] : t,
\end{aligned}
$$

wieder ohne daß sich der Wert bei einer Belegung über einer Typstruktur $\mathcal{D}$ ändert. Die entstandene Formel ist die, die man als Ergebnis erwartet haben sollte.

Die Regel (S 14) ersetzt ein Pseudopronomen he_n durch einen Term, z.B.

$$\dfrac{\dfrac{every : DET \quad man : CN}{every\ man : T}(S\,2) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{he_n\ walks : t} \quad \dfrac{\vdots}{he_n\ talks : t}}{he_n\ walks\ and\ he_n\ talks : t}(S\,11)}{every\ man\ walks\ and\ he\ talks : t}(S\,14)$$

In den Syntaxregeln (S 3), (S 4) und (S 14) geschieht mehr als nur die Verkettung der Teilausdrücke; es sind also keine kontextfreien Regeln.

Übersetzung von quantifiziertem Subjekt und Relativsatz

Relativsätze (in schlechter Syntax) werden mit (T 3) übersetzt:

$$((\textit{Every man such that he walks})^{T}\, \textit{talks}^{IV})^{t})'$$

$$\begin{aligned}
&=_4 && ((\textit{Every man such that he walks})^{T})'((\textit{talks}^{IV})') : t\\
&= && ((\textit{Every}^{DET}\ (\textit{man such that he walks})^{CN})^{T})'(\textit{talks}'^{\,e\to t}) : t\\
&=_2 && (\textit{Every}^{DET})'(((\textit{man such that he walks})^{CN})')(\textit{talks}'^{\,e\to t}) : t\\
&= && (\textit{Every}^{DET})'(((\textit{man}^{CN}\ \textit{such that}\ (\textit{he}_n^{T}\ \textit{walks}^{IV})^{t}[\textit{he}_n/\textit{he}])^{CN})')(\textit{talks}'^{\,e\to}\\
&=_3 && (\textit{Every}^{DET})'(\lambda x_n((\textit{man}^{CN})'(x_n) \wedge ((\textit{he}_n^{T}\ \textit{walks}^{IV})^{t})'))(\textit{talks}'^{\,e\to t}) : t\\
&=_4 && (\textit{Every}^{DET})'(\lambda x_n(\textit{man}'^{\,e\to t}(x_n) \wedge ((\textit{he}_n^{T})'((\textit{walks}^{IV})'))))(\textit{talks}'^{\,e\to t}) : t\\
&= && (\textit{Every}^{DET})'(\lambda x_n(\textit{man}'^{\,e\to t}(x_n) \wedge \lambda P[P(x_n)](\textit{walks}'^{\,e\to t})))(\textit{talks}'^{\,e\to t}) : t\\
&\to_\beta && \lambda P \lambda Q \forall x_k(P(x_k) \to Q(x_k))(\lambda x_n(\textit{man}'^{\,e\to t}(x_n) \wedge \textit{walks}'^{\,e\to t}(x_n)))(\textit{talks}'^{\,e}\\
&\to_\beta && \lambda Q \forall x_k(\lambda x_n(\textit{man}'^{\,e\to t}(x_n) \wedge \textit{walks}'^{\,e\to t}(x_n))(x_k) \to Q(x_k))(\textit{talks}'^{\,e\to t}) : t\\
&\to_\beta && \lambda Q \forall x_k((\textit{man}'^{\,e\to t}(x_k) \wedge \textit{walks}'^{\,e\to t}(x_k)) \to Q(x_k))(\textit{talks}'^{\,e\to t}) : t\\
&\to_\beta && \forall x_k((\textit{man}'^{\,e\to t}(x_k) \wedge \textit{walks}'^{\,e\to t}(x_k)) \to \textit{talks}'^{\,e\to t}(x_k)) : t
\end{aligned}$$

Pronomenauflösung innerhalb eines Satzes

Auf welchen Term sich ein Pronomen bezieht, legt der Satzaufbau durch (S 14) mit Vorkommen derselben Variable he_n fest.

$$
\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{l}{((A\ woman\ walks\ and\ she\ talks)^t)'} \\
= & (((he_n\ walks\ and\ he_n\ talks)^t[he_n/(a\ woman)^T])^t)' \\
=_{14} & ((a\ woman)^T)'(\lambda x_n.((he_n\ walks\ and\ he_n\ talks)^t)') \\
= & ((a\ woman)^T)'(\lambda x_n.(((he_n\ walks)^t\ and\ (he_n\ talks)^t)^t)') \\
=_{11} & ((a\ woman)^T)'(\lambda x_n.(((he_n^T\ walks^{IV})^t)' \wedge ((he_n^T\ talks^{IV})^t)') \\
=_{4} & ((a\ woman)^T)'(\lambda x_n.(((he_n^e)^T)'((walks^{IV})') \wedge ((he_n^e)^T)'((talks^{IV})') \\
= & ((a^{DET}\ woman^{CN})^T)'(\lambda x_n.(\lambda P[P(x_n)](walks') \wedge \lambda P[P(x_n)](talks' \\
=_{2} & (a^{DET})'(woman^{CN})'(\lambda x_n.(\lambda P[P(x_n)](walks') \wedge \lambda P[P(x_n)](talks')) \\
= & \lambda P \lambda Q \exists x(P(x) \wedge Q(x))(woman') \\
 & \quad (\lambda x_n(\lambda P[P(x_n)](walks') \wedge \lambda P[P(x_n)](talks'))) \\
\rightarrow_\beta & \lambda P \lambda Q \exists x(P(x) \wedge Q(x))(woman')(\lambda x_n(walks'(x_n) \wedge talks'(x_n))) \\
\rightarrow_\beta & \exists x(woman'(x) \wedge \lambda x_n(walks'(x_n) \wedge talks'(x_n))(x)) \\
\rightarrow_\beta & \exists x(woman'(x) \wedge (walks'(x) \wedge talks'(x)))
\end{array}
$$

Die intensionale Sprache L_{Typ} getypter λ-Terme

Die Extension (Umfang) eines Begriffs ist die Gesamtheit der „unter“ den Begriff fallenden Objekte, die Intension (Sinn) alles, was „mitgemeint“ ist (die Gesamtheit der Oberbegriffe).

Ein Kontext ist ein Text mit einer „Lücke“, oder ein Ausdruck $\gamma(x)$ mit einer genau einmal frei vorkommenden Variable x . Der Kontext $\gamma(x)$ ist intensional, wenn das Ersetzungslemma für $\gamma(x)$ nicht gilt, d.h. wenn für mindestens ein α und eine Interpretation $\mathcal{D}, g$

$$[\![\gamma(x/\alpha)]\!]^{\mathcal{D}}_g \neq [\![\gamma]\!]^{\mathcal{D}}_{g[x/[\![\alpha]\!]^{\mathcal{D}}_g]}.$$

Beispiel: Der Kontext $\gamma(x) =$ *Emil glaubt, daß* x. ist intensional, da Emil i.a. nicht alle wahren (oder alle falschen) Aussagen glaubt:

Auch wenn $[\![\textit{Maria liebt Emil}]\!]^{\mathcal{D}}_g = [\![2 > 1]\!]^{\mathcal{D}}_g$ ist, kann es sein daß

$$[\![\textit{Emil glaubt, daß (Maria ihn liebt)}]\!]^{\mathcal{D}}_g \neq [\![\textit{Emil glaubt, daß } (2 > 1)]\!]^{\mathcal{D}}_g.$$

Da es in der natürlichen Sprache viele intensionale Kontexte gibt, z.B. Glaubensverben mit „intensionalen Argumentstellen“, muß man bei der Bedeutung feinere Unterschiede machen als es $\mathcal{D}_t = \{0, 1\}$ für Aussagen erlaubt.

Grundidee: unterscheide zwischen einer intensionalen Bedeutung und einer extensionsalen Bedeutung eines Terms t.

Grundtypen ι und Typen σ, τ der intensionalen Logik sind

$$
\begin{array}{lcll}
\iota & := & e & \text{(Individuen)} \\
 & | & t & \text{(Wahrheitswerte)} \\
 & | & s & \text{(Situationen)} \\
\sigma, \tau & := & \iota & \text{(Grundtypen)} \\
 & | & (s \to \tau) & \text{(Intensionen vom Typ } \tau\text{)} \\
 & | & (\sigma \to \tau) & \text{(Funktionen)}
\end{array}
$$

Intensionen sind *situationsabhängige* Objekte eines Typs τ, Extensionen die Objekte (des Typs τ) in einer Situation.

Terme $t : \tau$ vom Typ τ sind, wenn die Teilterme von den durch Indizes angegeben Typen sind, die folgenden:

$$
\begin{array}{rcll}
t : \tau & := & x^\tau : \tau & \text{(Variable)} \\
 & \mid & c^\tau : \tau & \text{(Konstante)} \\
 & \mid & \lambda x^\sigma \, t^\tau : (\sigma \to \tau) & \text{(Funktionsterme)} \\
 & \mid & t^{\sigma \to \tau}(s^\sigma) : \tau & \text{(Anwendungsterme)} \\
 & \mid & {}^\wedge t^\tau : (s \to \tau) & \text{(Intensionsbildung)} \\
 & \mid & {}^\vee t^{s \to \tau} : \tau & \text{(Extensionsbildung)} \\
 & \mid & \neg \varphi^t : t & \text{(Formeln)} \\
 & \mid & (\varphi^t \wedge \psi^t) : t & \\
 & \mid & \forall x^\sigma \varphi^t : t & \\
 & \mid & \Box \varphi^t : t &
\end{array}
$$

Eine volle Typstruktur der intensionalen Logik ist eine volle Typstruktur $\mathcal{D} = (D_\tau, c^\mathcal{D})_{\tau \in Typ}$ aus Bereichen D_τ mit $D_{\sigma \to \tau} = D_\sigma \to D_\tau$ und Intensionen(!) $c^\mathcal{D} \in D_{s \to \tau}$ für jede nicht-logische Konstante c vom Typ τ. Logische Konstanten $\neg$, $\wedge$, $\exists^\tau$ werden wie bisher interpretiert.

Jedes $i \in D_s$ heißt *Situation* oder mögliche Welt, oder *Index*. Eine Proposition ist ein Element von $D_{s \to t}$, d.h. ein *situationsabhängiger Wahrheitswert*. Ein Individuenkonzept ist ein Element von $D_{s \to e}$, d.h. ein *situationsabhängiges Individuum*.

Beispiel

- Dem Ausdruck *der Bundeskanzler* entspricht kein $i \in D_e$, sondern ein situationsabhängiges Individuum aus $D_{s \to e}$.
- Der Aussage *Das Wetter ist schön* entspricht kein Wahrheitswert $b \in D_t$, sondern eine Proposition $p \in D_{s \to t}$.

Eine Belegung g über der Typstruktur $\mathcal{D}$ ordnet jeder Variablen $x : \tau$ bei der Belegung g ein Element $g(x^\tau) \in D_\tau$ zu. Der Wert des Terms $t : \tau$ in der Situation $i \in D_s$ bei der Belegung g, $[\![t]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i}$ wird rekursiv definiert durch:

$$
\begin{aligned}
[\![c^\tau]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} &:= (c^\tau)^{\mathcal{D}}(i) \in D_\tau, \text{für nicht-logische Konstante,}\\
[\![x^\tau]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} &:= g(x) \in D_\tau,\\
[\![t^{\sigma\to\tau}(s^\sigma)]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} &:= [\![t^{\sigma\to\tau}]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i}([\![s^\sigma]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i}),\\
[\![\lambda x^\sigma t^\tau]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} &:= \text{das } f \in D_{\sigma\to\tau} \text{ mit } f(a) = [\![t^\tau]\!]^{\mathcal{D}}_{g[x/a],i} \text{ für alle } a \in D_\sigma,\\
[\![{}^\wedge t^\tau]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} &:= \text{das } f \in D_{s\to\tau} \text{ mit } f(j) = [\![t^\tau]\!]^{\mathcal{D}}_{g,j} \text{ für alle } j \in D_s,\\
[\![{}^\vee t^{s\to\tau}]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} &:= [\![t^{s\to\tau}]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i}(i) \in D_\tau\\
[\![\Box\varphi^t]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} &:= \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{D}}_{g,j} = 1 \text{ für alle } j \in D_s,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Die logischen Konstanten $\neg^{(t\to t)}$, $\wedge^{t\to(t\to t)}$ und $\exists^\tau : (\tau \to t) \to t$ sowie die Identität $\doteq^\tau : \tau \to \tau \to t$ werden wie bisher interpretiert.

Damit läßt sich G.Freges Unterscheidung zwischen Sinn (Intension) und Bedeutung (Extension) so präzisieren:

Die Intension von $t : \tau$ bei $\mathcal{D}$ und g in der Situation $i \in D_s$ ist

$$\{\!|\, t^\tau \,|\!\}^{\mathcal{D}}_{g,i} := [\![{}^\wedge t]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} \in D_{s\to\tau}.$$

Die Extension von $t : s \to \tau$ bei $\mathcal{D}$ und g in der Situation $i \in D_s$ ist

$$[\![{}^\vee t]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} \in D_\tau.$$

Beispiel

- $\{\!|\, \textit{der Morgenstern} \,|\!\}^{\mathcal{D}}_{g,i}$ ist „der morgens erscheinende Stern" (möglicherweise an jedem Tag ein anderer),
- $[\![\textit{der Morgenstern}]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i}$ ist der am Tag i morgens erscheinende Stern.

Intensionales Fragment der Montague-Grammatik

Das intensionale Fragment erweitert das extensionale Fragment um

(i) Modaloperatoren,
(ii) Verben mit Komplementsätzen,
(iii) Verben mit intensional zu interpretierenden Objekten,
(iv) Adverbien,
(v) Tempusformen.

Mehrstellige Verben, freie Präpositionalphrasen, und das Tempus von Aussagen behandelt Montague erst in der intensionalen Teilsprache, da dies mit denselben technischen Mitteln geht, die er zur Behandlung intensionaler Phänomene braucht.

Grundidee: falls ein Teilausdruck β^B eines Ausdrucks in einem intensionalem Kontext $\alpha^A(x^B)$ steht, wird er bei der Übersetzung von $\alpha^A(x^B/\beta^B)$ nicht in $(\beta^B)'$ übersetzt, sondern in $^\wedge(\beta^B)'$.

Dadurch wird bei der Auswertung von $\alpha^A(x^B/\beta^B)$ in der Situation i nicht die Bedeutung $[\![(\beta^B)']\!]_{g,i}$, sondern der Sinn $\{\!|\,(\beta^B)'\,|\!\}_g$ von β benutzt wird, der von der Situation i unabhängig ist.

In der natürlichen Sprache kommen intensionale Kontexte manchmal in einander geschachtelt vor, etwa in

Maria glaubt, daß Emil zwar glaubt, sie zu lieben,
es aber in Wirklichkeit nicht tut.
$\simeq$ *Maria glaubt, Emil liebe Maria nicht, und*
Maria glaubt, Emil glaube, Emil liebe Maria.

Um das behandeln zu können, ist es nützlich, daß wir in L_{Typ} den Übergang zur Intension durch $^\wedge t$ iterieren können.

Übersetzung der Kategorien

Jeder Kategorie A wird ein Typ A' von L_{Typ} zugeordnet:

$$\begin{array}{lcl}
e' & := & e \\
t' & := & t \\
CN' & := & (e \rightarrow t)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
(A/B)' & := & ((s \rightarrow B') \rightarrow A') \\
(A/\!/B)' & := & ((s \rightarrow B') \rightarrow A'). \\
IV' & := & (e \rightarrow t).
\end{array}$$

Außer bei CN und IV wurden die Argumentkategorien B von A/B und $A/\!/B$ in intensionale Argumenttypen $(s \rightarrow B')$ übersetzt.

Nach den Abkürzungen der Kategorien erhalten wir zum Beispiel:

$$\begin{array}{rclcl}
T' & = & (t/IV)' & = & (s \rightarrow IV') \rightarrow t \\
 & & & = & (s \rightarrow (e \rightarrow t)) \rightarrow t \\
TV' & = & (IV/T)' & = & (s \rightarrow T') \rightarrow IV' \\
 & & & = & (s \rightarrow ((s \rightarrow (e \rightarrow t)) \rightarrow t)) \rightarrow (e \rightarrow t) \\
DET' & = & (T/CN)' & = & (s \rightarrow CN') \rightarrow T' \\
 & & & = & (s \rightarrow (e \rightarrow t)) \rightarrow ((s \rightarrow (e \rightarrow t)) \rightarrow t)
\end{array}$$

Basisausdrücke und ihre Übersetzung

Die syntaktischen Kategorien enthalten weitere Basisausdrücke:

1. *believe*, *claim* sind von der Kategorie IV/t (transitive Verben mit Komplementsatz),
2. *try*, *want* sind von der Kategorie $IV/\!/IV$ (transitive Verben mit Infinitivkomplement)
3. *possibly*, *necessarily* sind von der Kategorie t/t (Satzadverbien),
4. *slowly*, *rapidly*, *voluntarily* sind von der Kategorie IAV (Adverbien)

Da die Argumente von Kategorien der Form A/B oder $A/\!/B$ in Terme vom Typ $s \to B'$ übersetzt werden, wird bei der Anwendung von Funktionen das Argument stets eine Intension sein. Deshalb muß die Übersetzung der Konstanten etwas modifiziert werden:

Variable und nicht-logische Konstante einer Kategorie A werden in Variable bzw. Konstante des Typs A' übersetzt, z.B.:

$$
\begin{aligned}
(he_n^e)' &:= x_n : e \\
(John^e)' &:= John' : e, \\
(man^{CN})' &:= man'^{\,e\to t} : CN' \\
(walk^{IV})' &:= walk'^{\,e\to t} : IV' \\
(seek^{IV/T})' &:= seek' : (s \to T') \to IV' \\
(believe^{IV/t})' &:= believe' : (s \to t) \to IV'
\end{aligned}
$$

Logische Konstante erhalten eine besondere Übersetzung, z.B.:

$$
\begin{aligned}
(a^{DET})' &:= \lambda P^{s\to(e\to t)} \lambda Q^{s\to(e\to t)} \exists x^e [{}^{\vee}P(x) \wedge {}^{\vee}Q(c)] : DET' \\
(every^{DET})' &:= \lambda P^{s\to CN'} \lambda Q^{s\to IV'} \forall x^e [{}^{\vee}P(x) \to {}^{\vee}Q(x)] : DET'.
\end{aligned}
$$

Bildung und Übersetzung zusammengesetzer Ausdrücke

Das Subjekt eines Verbs wird extensional, die anderen Argumente intensional behandelt: Bei der Anwendung des Subjekts $(\alpha^T)'$ auf eine Verbalphrase $(\beta^{IV})'$ nach (T 4) wird in (T 1) zuerst von ${}^\wedge(\beta')$ zur Extension ${}^{\vee\wedge}(\beta') = \beta'$ übergegangen. Objekte β eines Verbs α werden dagegen nach (T 5,7,8) *als Intensionen* ${}^\wedge(\beta')$ an die Funktion α' übergeben.

(S 1) $\dfrac{\alpha : e}{\alpha : T}$

(S 2) $\dfrac{\delta : DET, \quad \xi : CN}{\delta\ \xi : T}$

(S 3_n) $\dfrac{\xi : CN, \quad \varphi : t}{\xi \text{ such that } \varphi[he_n/he] : CN}$

(S 4) $\dfrac{\alpha : T, \quad \delta : IV}{\alpha\ \delta^{3.sg} : t}$

(T 1) $\dfrac{\alpha' : e}{\lambda P^{s\to(e\to t)}[{}^\vee P(\alpha')] : T'}$

(T 2) $\dfrac{\delta' : (s \to CN') \to T', \quad \xi' : \text{C}}{\delta'({}^\wedge\xi') : T'}$

(T 3_n) $\dfrac{\xi' : CN', \quad \varphi' : t}{\lambda x_n^e(\xi'(x_n) \wedge \varphi') : CN'}$

(T 4) $\dfrac{\alpha' : (s \to IV') \to t, \quad \delta' :}{\alpha'({}^\wedge\delta') : t}$

$$\text{(S 5)}\ \frac{\delta : TV, \quad \beta : T}{\delta\ \beta^{acc}\ : IV} \qquad \text{(T 5)}\ \frac{\delta' : (s \to T') \to IV', \quad \beta' : T'}{\delta'(^\wedge\beta') : IV'}$$

$$\text{(S 6)}\ \frac{\delta : IAV/T, \quad \alpha : T}{\delta\ \alpha^{acc} : IAV} \qquad \text{(T 6)}\ \frac{\delta' : (s \to T') \to IAV', \quad \alpha' : T'}{\delta'(^\wedge\alpha') : IAV'}$$

$$\text{(S 7)}\ \frac{\alpha : IV/t, \quad \varphi : t}{\alpha\ \mathit{that}\ \varphi : IV} \qquad \text{(T 7)}\ \frac{\alpha' : (s \to t) \to IV', \quad \varphi' : t}{\alpha'(^\wedge\varphi') : IV'}$$

$$\text{(S 8)}\ \frac{\delta : IV/\!/IV, \quad \beta : IV}{\delta\ \mathit{to}\ \beta : IV} \qquad \text{(T 8)}\ \frac{\delta' : (s \to IV') \to IV', \quad \beta' : IV'}{\delta'(^\wedge\beta') : IV'}$$

$$\text{(S 9)}\ \frac{\delta : t/t, \quad \varphi : t}{\delta\ \varphi : t} \qquad \text{(T 9)}\ \frac{\delta' : (s \to t) \to t, \quad \varphi' : t}{\delta'(^\wedge\varphi') : t}$$

$$\text{(S 10)}\ \frac{\delta : IV/IV, \quad \beta : IV}{\beta\ \delta : IV} \qquad \text{(T 10)}\ \frac{\delta' : (s \to IV') \to IV', \quad \beta' : IV'}{\delta'(^\wedge\beta') : IV'}$$

$$(\text{S } 11\text{a}) \ \frac{\varphi : t, \quad \psi : t}{\varphi \text{ and } \psi : t} \qquad (\text{T } 11\text{a}) \ \frac{\varphi' : t, \quad \psi' : t}{(\varphi' \wedge \psi') : t}$$

$$(\text{S } 11\text{b}) \ \frac{\varphi : t, \quad \psi : t}{\varphi \text{ or } \psi : t} \qquad (\text{T } 11\text{b}) \ \frac{\varphi' : t, \quad \psi' : t}{(\varphi' \vee \psi') : t}$$

$$(\text{S } 12\text{a}) \ \frac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ and } \gamma : IV} \qquad (\text{T } 12\text{a}) \ \frac{\delta' : e \to t, \quad \gamma' : e \to t}{\lambda x^e(\delta'(x) \wedge \gamma'(x)) : e \to t}$$

$$(\text{S } 12\text{b}) \ \frac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ or } \gamma : IV} \qquad (\text{T } 12\text{b}) \ \frac{\delta' : e \to t, \quad \gamma' : e \to t}{\lambda x^e(\delta'(x) \vee \gamma'(x)) : e \to t}$$

$$(\text{S } 13) \ \frac{\alpha : T, \quad \beta : T}{\alpha \text{ or } \beta \ : T} \qquad (\text{T } 13) \ \frac{\alpha' : T', \qquad \beta' : T'}{\lambda P^{s \to (e \to t)}(\alpha'(P) \vee \beta'(P)) : T'}$$

$$(\text{S } 14_n) \ \frac{\alpha : T, \qquad \varphi : t}{\varphi[he_n/\alpha] : t} \qquad (\text{T } 14_n) \ \frac{\alpha' : T', \quad \varphi' : t}{\alpha'({}^\wedge\lambda x_n.\varphi') : t}$$

$$(\text{S } 16_n) \ \frac{\alpha : T, \quad \delta : IV}{\delta[he_n/\alpha] : IV} \qquad (\text{T } 16_n) \ \frac{\alpha' : T', \quad \delta' : IV'}{\lambda y^e.\alpha'({}^\wedge\lambda x_n.\delta'(y)) : IV'}$$

Beispiel Da Eigennamen und Pronomen nach (S 1) komplexe Ausdrücke der Kategorie T sind, ergibt deren Übersetzung jetzt (im Unterschied zum extensionalen Fragment):

$$\begin{array}{rcl} ((John^e)^T)' & =_1 & \lambda P^{s\to(e\to t)}[{}^\vee P((John^e)')] \\ & = & \lambda P^{s\to(e\to t)}[{}^\vee P(John'^{\,e})] : (s \to IV') \to t \\ (he_n^T)' & := & \lambda P^{s\to IV'}[{}^\vee P(x_n^e)] : T' \end{array}$$

Dadurch erhalten wir für einfache Sätze mit intransitiven Verben das gleiche Übersetzungsergebnis wie im extensionalen Fall:

$$\begin{array}{rcl} ((John^T \; talks^{IV})^t)' & =_4 & (John^T)'({}^\wedge(talks^{IV})') \\ & = & \lambda P^{s\to IV'}[{}^\vee P(John'^e)]({}^\wedge(talk'^{\,IV'})) \\ & =_\beta & {}^\vee({}^\wedge(talk'^{\,IV'}))(John'^{\,e}) \\ & =_{\vee\wedge} & (talk'^{\,e\to t})(John'^{\,e}). \end{array}$$