Wie beweist man eine Behauptung aus gegebenen Annahmen?

Man kann grundsätzlich wie folgt vorgehen:

I. Man analysiert die Behauptung und geht ihrer Form entsprechend vor.

II. Man analysiert die Annahmen und geht nach der Form einer Annahme vor.

III. Man benutzt die Definition eines verwendeten Begriffs (Abkürzung).

IV. Man benutzt die Eigenschaften der Gleichheit $\doteq$.

V. Man analysiert die Objekte, über die etwas behauptet wird, und führt die Behauptung auf Behauptungen über einfachere Objekte zurück. (Induktion)

Es ist normalerweise ratsam, zuerst die Behauptung zu zerlegen, bevor man sich mit den Annahmen befaßt.

Eine Abkürzung sollte man erst durch ihre Definition ersetzen, wenn man sonst nicht weiterkommt.

I. Beweise durch Analyse der Behauptung

Man geht je nach der Form der Behauptung anders vor:

1. Wir zeigen $\varphi \wedge \psi$, indem wir φ zeigen und ψ zeigen.

   Behauptung: $\varphi_1 \wedge \varphi_2$:
   Beweis: Wir müssen zwei Aussagen zeigen.
   Beh.1: φ. Bew.: ...
   Beh.2: ψ: Bew.: ... $\square$

2. Wir zeigen $\varphi \vee \psi$, indem wir $\neg\varphi$ annehmen und ψ zeigen, oder indem wir $\neg\psi$ annehmen und φ zeigen.

   Behauptung: $\varphi \vee \psi$:
   Beweis:
   Fall 1. $\neg\varphi$ gilt. Beh.1: ψ. Bew.: ...
   (Fall 2: φ gilt. Dann gilt auch $\varphi \vee \psi$, fertig.) $\square$

3. Wir zeigen $\varphi \rightarrow \psi$, indem wir φ annehmen und ψ zeigen.

   Behauptung: $\varphi \rightarrow \psi$:
   Beweis: Wir können annehmen, daß auch φ gilt.
   Beh: ψ. Bew.: ... $\square$

4. Wir zeigen $\varphi \leftrightarrow \psi$, indem wir $\varphi \rightarrow \psi$ und $\psi \rightarrow \varphi$ zeigen.

   Behauptung: $\varphi \leftrightarrow \psi$:
   Beweis: Wir zeigen die beiden Richtungen einzeln.
   Beh 1: $\varphi \rightarrow \psi$. Bew.: ...
   Beh.2: $\psi \rightarrow \varphi$. Bew.: ... $\square$

5. Wir zeigen $\exists x\, \varphi$ (meistens), indem wir ein geeignetes Objekt x angeben und dafür $\varphi(x)$ zeigen.

   Behauptung: $\exists x \varphi$.
   Beweis: Betrachte das (gut gewählte!) Objekt a.
   Wir zeigen, daß a ein Beispiel für x ist.
   Beh 1: $\varphi(a)$. Bew.: ... $\square$

   Nicht alle Behauptungen der Form $\exists x\, \varphi$ kann man so beweisen; manchmal muß man sie indirekt (s.u.) beweisen.

6. Wir zeigen $\forall x\, \varphi$, indem wir für ein beliebiges Objekt x, über das wir keine weiteren Annahmen machen, $\varphi(x)$ zeigen.

   Behauptung: $\forall x \varphi$.
   Beweis: Sei a ein beliebiges Objekt. Zu zeigen ist
   Beh 1: $\varphi(a)$. Bew.: ...
   Da a beliebig gewählt war, ist mit Beh. 1 auch
   die Behauptung $\forall x \varphi$ gezeigt. $\square$

7. Wir zeigen $\neg\varphi$, indem wir zeigen, daß φ unmöglich ist, d.h. indem wir φ annehmen und einen *Widerspruch*, eine Aussage der Form $\psi \wedge \neg\psi$, zeigen (indirekter Beweis).

   Behauptung: $\neg\varphi$.
   Beweis: (indirekt). Angenommen, es gelte φ.
   Beh 1: $\psi \wedge \neg\psi$ (für geeignetes ψ!). Bew.: ...
   Da $\varphi \wedge \neg\psi$ aber nicht gelten, kann, muß auch
   die Annahme φ falsch sein. $\square$

II. Beweise durch Verwenden einer Annahme

Es ist im allgemeinen nicht offensichtlich, welche der Annahmen man am besten verwendet; sie sollte etwas mit der Behauptung gemeinsam haben.

Manchmal können wir die Annahme direkt benutzen:

1. Um φ aus der Annahme φ zu zeigen, brauchen wir nichts mehr zu tun.

   Behauptung: φ.
   Beweis: Nach den Annahmen gilt φ. $\square$

2. Um φ aus der Annahme ψ zu zeigen, brauchen wir nichts mehr zu tun, wenn auch $\neg\psi$ unter den Annahmen vorkommt.

   Behauptung: φ.
   Beweis: Unter den Annahmen befindet sich die Aussage ψ und ihr Gegenteil, $\neg\psi$. Also kann dieser Fall nicht auftreten. $\square$

Meistens wird die Annahme umgeformt oder eine weitere Annahme daraus gewonnen:

1. Um φ aus der Annahme $\psi_1 \wedge \psi_2$ zu zeigen, genügt es, ψ stattdessen aus den beiden Annahmen ψ_1 und ψ_2 zusammen zu zeigen.

   Behauptung: φ.
   Beweis: Nach den Annahmen gelten ψ_1 und ψ_2.
   Beh.: φ. Bew.: ... $\square$

2. Um φ aus der Annahme $\psi_1 \vee \psi_2$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme ψ_1 statt $\psi_1 \vee \psi_2$ zu zeigen und φ aus der Annahme φ_2 statt $\psi_1 \vee \psi_2$ zu zeigen.

   Behauptung: φ.
   Beweis: Nach den Annahmen gilt $\psi_1 \vee \psi_2$.
   Fall 1: Angenommen, es gilt ψ_1. Beh.: φ. Bew.: ...
   Fall 2: Angenommen, es gilt ψ_2. Beh.: φ. Bew.: ... $\square$

3. Um φ aus der Annahme $\exists x\, \psi$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\psi(x)$, für ein noch nicht benutztes Objekt x, statt $\exists x\, \psi$ zu zeigen.

   Behauptung: φ.
   Beweis: Nach den Annahmen gilt $\exists x\, \psi$. Wir nehmen an, a sei ein (unbekanntes) Objekt, für das $\varphi(a)$ gilt.
   Beh.: φ. Bew.: ... $\square$

4. Um φ aus der Annahme $\forall x\, \psi$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\psi(y) \wedge \forall x\, \psi$, für ein (evtl. schon benutztes) Objekt y, statt $\forall x\, \psi$, zu zeigen.

   Behauptung: φ.
   Beweis: Nach den Annahmen gilt $\forall x\, \psi$. Daher gilt insbesondere $\psi(a)$, für das (bekannte) Objekt a.
   Beh.: φ. Bew.: ... $\square$

5. Um φ aus der Annahme $\psi_1 \to \psi_2$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\neg\psi_1$ statt $\psi_1 \to \psi_2$ zu zeigen und φ aus der Annahme ψ_2 statt $\psi_1 \to \psi_2$ zu zeigen.

   Behauptung: φ.
   Beweis: Nach den Annahmen gilt $\psi_1 \to \psi_2$.
   Fall 1: Angenommen, $\neg\psi_1$. Beh.: φ. Bew.:...
   Fall 2: Sonst ist nach der Annahme ψ_2.
   Beh.: φ. Bew: ... $\square$

6. Um φ aus der Annahme $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\psi_1 \wedge \psi_2$ statt $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu zeigen und φ aus der Annahme $\neg\psi_2 \wedge \neg\psi_2$ statt $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu zeigen.

   Behauptung: φ.
   Beweis: Nach den Annahmen gilt $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$.
   Fall 1: Angenommen, ψ_1 und ψ_2.
   Beh.: φ. Bew.:...
   Fall 2: Angenommen, $\neg\psi_1$ und $\neg\psi_2$.
   Beh.: φ. Bew: ... $\square$

7. Um φ aus der Annahme $\neg\psi$ zu zeigen, genügt es, umgekehrt ψ aus der Annahme $\neg\varphi$ zu zeigen.

   Behauptung: φ.
   Beweis: (indirekt) Wir nehmen $\neg\varphi$ an und zeigen ψ, was der Annahme $\neg\psi$ widerspricht.
   Ann.: $\neg\varphi$. Beh.: ψ. Bew.: ... $\square$

III. Verwendung von Abkürzungen

Abkürzungen dürfen durch ihren definierten Ausdruck ersetzt werden.

1. Um eine Behauptung φ zu zeigen, in der eine Abkürzung verwendet wird, genügt es, statt φ die Behauptung φ' zu zeigen, in der statt der Abkürzung deren Definition eingesetzt ist.

2. Um die Behauptung φ aus einer Annahme ψ zu zeigen, in der eine Abkürzung verwendet wird, genügt es, φ aus der Annahme ψ' statt ψ zu zeigen, in der statt der Abkürzung ihre Definition eingesetzt ist.

Wir können auch einfach zusätzlich annehmen:

$$\forall x \ldots \forall z(\mathrm{Abk}(x, \ldots, z) \leftrightarrow \mathrm{Def}(x, \ldots, z))$$

$$z.B. \quad \forall x \forall z(x \subseteq z \leftrightarrow \forall y(y \in x \to y \in z))$$

IV. Verwendung von Annahmen über $\doteq$

Wenn das Grundprädikat $\doteq$ verwendet wird, brauchen wir spezielle Regeln für die Gleichheit:

1. Um $\varphi(b)$ aus der Annahme $a \doteq b$ zu zeigen, genügt es, $\varphi(a)$ aus der Annahme $a \doteq b$ zu zeigen.

2. Um φ zu zeigen, dürfen wir zusätzlich folgende Annahmen machen:

$$\forall x(x \doteq x),$$
$$\forall x \forall y(x \doteq y \to y \doteq x),$$
$$\forall x \forall y \forall z((x \doteq y \wedge y \doteq z) \to x \doteq z)$$

V. Induktion über den Aufbau der Objekte

Sei A eine Menge und $F \subseteq \{ f^{(n)} : A^n \to A \mid n \in \mathbb{N} \}$ eine Menge von Funktionen $f^{(n)} : A^n \to A$ der Stelligkeiten $n \in \mathbb{N}$. Für $B \subseteq A$ sei

$$\overline{B}^F := \bigcap \{ X \mid B \subseteq X \subseteq A, \forall f^{(n)} \in F \; \forall \vec{b} \in X^n \; f(\vec{b}) \in X \}$$

der Abschluß von B unter den Funktionen aus F.

Das *Induktionsaxiom* für $\overline{B}^F$ besagt:

> Wenn φ für alle $b \in B$ gilt und sich bei allen $f \in F$ von den Argumenten auf den Funktionswert überträgt, so gilt φ für alle $b \in \overline{B}^F$.

Ein Objekt $f(\vec{b}) \in \overline{B}^F$ ist „komplizierter" als die $b_i \in \vec{b}$. Man kann eine Aussage für alle Objekte von $\overline{B}^F$ zeigen, indem man sie zuerst für die einfacheren zeigt.

1. Um $\varphi(x)$ für alle $x \in \overline{B}^F$ zu zeigen, genügt es, die Voraussetzung im Induktionsaxiom für $\overline{B}^F$ zu zeigen:

   Behauptung: Für alle $x \in \overline{B}^F$ gilt $\varphi(x)$.
   Beweis:
   Induktionsanfang:
       Beh.: $\varphi(x)$ gilt für jedes $x \in B$.
       Bew.:...
   Induktionsschritt:
       Beh.: $\varphi(f(\vec{b}))$ gilt, wenn $f \in F$
           und $\varphi(b_i)$ für jedes $b_i \in \vec{b}$ gilt.
       Bew.: Sei $f \in F$ und $\varphi(b_i)$ für alle $b_i \in \vec{b}$.
               Beh.: $\varphi(f(\vec{b}))$. Bew:...
   Nach dem Induktionsaxiom gilt $\varphi(x)$ für alle $x \in \overline{B}^F$.□