Aufgabenblatt 7
Logik und modelltheoretische Semantik

Universität München, CIS, SS 2011

Hans Leiß

Abgabetermin: Di, 12.7.2011, in der Tafelübungsstunde

Aufgabe 7.1 Vereinfache die folgenden λ-Terme, bis es nicht mehr weiter geht:

(a) $x \cdot (\lambda x(c \cdot x) \cdot (y \cdot x))$

(b) $\lambda x(x \cdot \lambda x(c \cdot x)) \cdot (y \cdot x)$

(c) $\lambda x(x \cdot \lambda x(c \cdot x)) \cdot \lambda x(y \cdot x)$

(d) $\lambda y(x \cdot \lambda x(y \cdot x)) \cdot \lambda x(y \cdot x)$

(e) $\lambda y(x \cdot \lambda x(y \cdot x)) \cdot \lambda y(y \cdot x)$

Aufgabe 7.2 Wir hatten skizziert, wie man prädikatenlogische L-Formeln φ in (getypte) λ-Terme φ' übersetzen kann, wenn man für Prädikats- und Funktionszeichen von L Konstante von L_{Typ} (passenden Typs) einführt.

Führe das für die Formel

$$\exists x \forall y (\exists y P(x, y) \to R(x, y))$$

durch und gib die Konstanten mit ihren Typen an, die man für $\forall, \exists, \to, P, R$ braucht, wobei t der Typ der Wahrheitswerte und e der Typ der Individuen sei.

Aufgabe 7.3 Finde eine (die allgemeinste) Typisierung für den ungetypten λ-Term

$$t := \lambda x(\lambda y(x \cdot y) \cdot \lambda x(x \cdot y)),$$

also einen Typkontext Γ und einen Typ τ, sodaß $\Gamma \vdash t : \tau$ (oder gibt es keine solchen Γ, τ?).

Am einfachsten fügt man an jeden Teilterm s eine neue Typvariable als Index an und stellt dann zu Teiltermen

$$(s^\alpha \cdot r^\beta)^\gamma \text{ die Gleichung } \alpha = (\beta \to \gamma)$$

und zu Teiltermen

$$[\lambda x^\alpha s^\beta]^\gamma \text{ die Gleichung } \gamma = (\alpha \to \beta)$$

auf und löst das Gleichungssystem durch Unifikation. Alle freien Vorkommen einer Variablen x erhalten dieselbe Typvariable, ebenso alle freien Vorkommen von x in s bei λxs.

Man mache das erstmal für $\lambda y(x \cdot y)$. Wie erhält man aus der Lösung eine Typisierung $\Gamma \vdash t : \tau$?

Aufgabe 7.4 Ein Termvereinfachungsschritt $s \to t$ für λ-Terme ist *allgemeingültig* (für volle Typstrukturen), wenn für alle Typisierungen $\Gamma \vdash s : \sigma$, $\Gamma \vdash t : \sigma$, jede volle Typstruktur $\mathcal{D}$ und jede die Typannahmen Γ respektierende Belegung $g : Var \to D$ die Gleichung $s \doteq t$ in $\mathcal{D}$ bei g wahr ist, also $[\![s]\!]_g^{\mathcal{D}} = [\![t]\!]_g^{\mathcal{D}}$ ist.

Eine Regel $\dfrac{s \to t}{s' \to t'}$ für Termvereinfachungen ist *korrekt* (für volle Typstrukturen), wenn sie von einem allgemeingültigen $s \to t$ zu einem allgemeingültigen $s' \to t'$ führt.

Zeige, daß die Vereinfachungsregeln

$$\frac{x \notin \mathit{frei}(t)}{\lambda x(t \cdot x) \to t}\,(\eta) \quad \text{und} \quad \frac{s \to t}{\lambda xs \to \lambda xt}\,(=_3)$$

korrekt (für volle Typstrukturen) sind.