Aufgabenblatt 4
Logik und modelltheoretische Semantik

Universität München, CIS, SS 2011

Hans Leiß

Abgabetermin: Di, 21.6.2011, in der Tafelübungsstunde

Aufgabe 4.1 Beweisen Sie mit den Regeln des Gentzen-Kalküls der Prädikatenlogik die folgenden Sequenzen:

(a) $\exists x\, P(x), \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \triangleright \exists x\, Q(x)$

(b) $\triangleright \forall y\, \varphi(x/y) \to \forall x\, \varphi$, falls $y \notin \mathit{frei}(\varphi)$

Da im Kurs die Umkehrung von (b) gezeigt wurde,

$$\triangleright \forall x\, \varphi \to \forall y\, \varphi(x/y), \qquad \text{falls } y \notin \mathit{frei}(\varphi),$$

können wir also einen Fall der „Umbenennung gebundener Variablen", nämlich

$$\triangleright \forall y\, \varphi(x/y) \leftrightarrow \forall x\, \varphi, \qquad \text{falls } y \notin \mathit{frei}(\varphi),$$

mit den vorhandenen Regeln schon beweisen und brauchen dafür keine eigenen Beweisregeln. Man überlege sich, daß man mit Hilfe der Schnittregel eine Annahme $\forall x\varphi$ durch $\forall y\, \varphi(y/x)$ ersetzen darf, sofern $y \notin \mathit{frei}(\varphi)$. Ebenso für eine Behauptung $\forall x\varphi$. Dasselbe muß man analog für $\exists x\varphi$ machen.

Aufgabe 4.2 Zeige, daß die Regel

$$\frac{\Gamma, \varphi \triangleright \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \triangleright \Delta}\ (\exists L), \ \text{falls } x \notin \mathit{frei}(\Gamma, \Delta),$$

korrekt ist, d.h. daß, wenn die Obersequenz allgemeingültig ist, dann auch die Untersequenz allgemeingültig ist.

Eine Sequenz $\Gamma \triangleright \Delta$ hieß *allgemeingültig*, wenn die Formel

$$\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$$

für jede Struktur $\mathcal{A}$ und Belegung $g : Var \to A$ wahr ist.