Aufgabenblatt 3
Logik und modelltheoretische Semantik

Universität München, CIS, SS 2011

Hans Leiß

Abgabetermin: Di, 14.6.2011, in der Tafelübungsstunde

Aufgabe 3.1 Sei L die Sprache mit den 0-stelligen Funktionszeichen w („der Wolf") und s („das Schneewittchen") und dem 1-stelligen Funktionszeichen g („die Großmutter von").

(a) Was sind fünf Beispiele für Elemente des Herbrand-Universums von L?

(b) Was sind die Nominalphrasen (im Nominativ) des Deutschen, die ihnen entsprechen?

Aufgabe 3.2 Sei L die prädikatenlogische Sprache L mit den Konstanten (d.h. 0-stelligen Funktionszeichen) a und b, dem einstelligen Funktionszeichen f, und dem zweistelligen Relationszeichen $<$. (Man schreibt $x < y$ statt $<(x, y)$.) Sei weiter

$$\mathcal{A} = (A, a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}})$$

die L-Struktur, wo

$$A := \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad a^{\mathcal{A}} := (-3, -3), \quad b^{\mathcal{A}} := (2, 2)$$

und $f^{\mathcal{A}} : A \to A$ und $<^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$ so definiert sind, daß für alle $(i, j), (k, l) \in A$

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}}((i,j)) & := & (i+1, j+1), \\ (i,j) <^{\mathcal{A}} (k,l) & :\iff & (i = k \text{ und } j <^{\mathbb{N}} l) \text{ oder } (i+1 = k \text{ und } j+1 = l). \end{array}$$

(a) Was ist das Herbrand-Universum $H = H(L)$?

(b) Wie sind $a^{\mathcal{H}}, b^{\mathcal{H}}$ und $f^{\mathcal{H}} : H \to H$ in jeder Herbrand-Struktur $\mathcal{H} = (H, a^{\mathcal{H}}, b^{\mathcal{H}}, f^{\mathcal{H}}, <^{\mathcal{H}})$ zu L definiert?

(c) Was ist $<^{\mathcal{H}}$ in dem mit $\mathcal{A}$ definierten Herbrand-Modell $\mathcal{H}$ der Aussage $\forall x \exists y (x < y)$?

(d) Gib ein Beispiel einer L-Aussage *mit Gleichheit* $\doteq$ an, die in $\mathcal{A}$ wahr und in $\mathcal{H}$ falsch ist.

(e) Nach dem Beweis der Vorlesung ist wegen $\mathcal{A} \models \forall x \exists y\, x < y$ auch $\mathcal{H} \models \forall x \exists y\, x < y$. Können Sie geeignete Skolem- oder Auswahlfunktionen $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ und $g^{\mathcal{H}} : H \to H$ angeben, sodaß

$$(\mathcal{A}, g^{\mathcal{A}}) \models \forall x (x < g(x)) \text{ und } (\mathcal{H}, g^{\mathcal{H}}) \models \forall x (x < g(x)) \quad ?$$

Bem. Wir hatten aus einem $\mathcal{A} \models \varphi$ ein Herbrand-Modell $\mathcal{H} \models \varphi$ konstruiert, aber außer daß in φ alle Symbole von L vorkommen sollten, ist $\mathcal{H}$ nicht von φ abhängig.

Aufgabe 3.3 Zeige, daß für beliebige Formeln $\varphi(x)$ und ψ mit $x \notin \mathit{free}(\psi)$ die Aussagen

$$(\forall x\varphi \to \psi) \qquad \text{und} \qquad \exists x(\varphi \to \psi)$$

äquivalent sind, d.h. bei jeder Interpretation $\mathcal{A}$ denselben Wahrheitswert haben.

Bem. Das hat etwas unglaubwürdig scheinende Anwendungen, z.B. für $\psi := \forall x\varphi$ ist die linke Aussage wahr, also auch $\exists x(\varphi \to \psi)$, und das klingt für $\varphi(x) :=$ „x ist kinderlos“ seltsam, denn dann bedeutet ψ, daß die Menschheit ausstirbt, und $\exists x(\varphi \to \psi)$, daß daran ein Mensch x „schuld ist“.