Aufgabenblatt 1
Logik und modelltheoretische Semantik

Universität München, CIS, SS 2011

Hans Leiß

Abgabetermin: Di, 17.5.2011, in der Tafelübungsstunde

Aufgabe 1.1 Sei $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ eine Boole'sche Algebra und $\leq$ die durch n

$$a \leq b :\iff a + b = b \qquad \text{für alle } a, b \in A,$$

definierte partielle Ordnung auf A. Zeige mit den Axiomen, daß für alle $a, b \in A$:

(a) $ab \leq b$,

(b) $+$ und $\cdot$ sind monoton und $^-$ ist anti-monoton im ersten Argument:

$$\begin{aligned} a \leq b &\implies a + c \leq b + c \\ a \leq b &\implies ac \leq bc \\ a \leq b &\implies \bar{b} \leq \bar{a}. \end{aligned}$$

(c) $a \leq b \iff ab = a$

Nach (a) ist (mit $b = 1$) auch $a \leq 1$, also $a + 1 = 1$. Wegen der Kommutativität und (b) sind $+$ und $\cdot$ auch im zweiten Argument monoton.

Hinweis: Für (b) benutze beim Komplement eine der DeMorgan'schen Regeln, die wir im Kurs gezeigt hatten (mit $0 \leq a \leq 1$, was man mit (a) hat).

Aufgabe 1.2 Im Kurs wurde gezeigt, daß mit $\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, ^{-\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$ und einer Menge I auch die Menge A^I aller Funktionen von I nach A eine Boole'sche Algebra bilden, wobei $0, 1$ die konstanten Funktionen

$$0(i) := 0^{\mathcal{A}}, \qquad 1(i) := 1^{\mathcal{A}}, \quad \text{für alle } i \in I,$$

sind und die Operationen $+, \cdot, ^-$ auf A^I „punktweise“ erklärt sind, z.B. $f + g$ durch

$$(f + g)(i) := f(i) +^{\mathcal{A}} g(i), \quad \text{für alle } i \in I.$$

Zeige, daß die Potenzmengenalgebra $\mathcal{P}(I)$ isomorph zu $\mathbb{B}^I$, also „im Wesentlichen dasselbe wie“ $\mathbb{B}^I$, ist. Genauer: gib eine Abbildung $h : \{\, X \mid X \subseteq I \,\} \to \{\, f \mid f : I \to \{0, 1\} \,\}$ an und zeige nur:

(a) h ist bijektiv (jedem $X \subseteq I$ entspricht eine bestimmte Funktion $f_X : I \to \{0, 1\}$ und jedes $f \in \mathbb{B}^I$ ist ein solches f_X),

(b) h ist ein Homomorphismus; davon soll reichen:

- $h(\emptyset) = f_\emptyset = 0$ in $\mathbb{B}^I$,
- $h(X \cap Y) = f_{X \cap Y} = f_X \cdot f_Y = h(X) \cdot h(Y)$,

(c) h^{-1} ist ein Homomorphismus; davon soll reichen:

- $h^{-1}(0) = \emptyset$,
- $h^{-1}(f \cdot g) = h^{-1}(f) \cap h^{-1}(g)$.

Wir hatten gesehen, daß solche Boole'schen Algebren $\mathcal{A}^I$ zur Interpretation der Koordination von Sätzen, Prädikaten (VP's) und Nominalphrasen (NP's) geeignet sind.