Relationale Grammatik

Hauptseminar SS 2003
CIS, Universität München

Hans Leiß

1.5.03

Inhalt:

(i) Boole'sche Algebra

(ii) Relationenalgebra

(iii) Peirce'sche Algebra

(iv) Boole'sche und Peirce'sche Grammatik

„Relative“ und Relationen bei C.S.Peirce und E.Schröder

Erst Ende des 19. Jahrhunderts werden die Relationen als wichtiger Bestandteil der Sprache und Logik erkannt, von C.S.Peirce und E.Schröder.

Terminologie bei Peirce (1897):

a) *Relative* sind Wörter, die „zu einem Gemeinnamen werden, wenn ihnen ein anderer Gemeinname als Objekt hinzugefügt wird“.

(i) Präpositionen: *zu der Zeit des*

(ii) Relationsnomen: *Bruder des*, *Stifter von* $\cdot$ *an* $\cdot$

(iii) transitive Verben: *kaufen*, *geben*

b) Ein *Relativ* ist (ggf. nach Hinzufügen von „ist“) ein Satz, in dem einige Eigennamen weggelassen sind.

c) Ein *Verhältnis* (heute: eine *Relation*) R zwischen Objekten der Arten $A_1, \ldots, A_n$ ist eine Tupelmenge

$$\{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Die i-te *Relation* (heute: *Projektion*) von R ist

$$\{a \mid \exists a_1 \in A_1 \ldots \exists a_n \in A_n (a = a_i \wedge R(a_1, \ldots, a_n))\}$$

Projektionen

Aus den transitiven Verben erhält man durch Projektion standardmäßig zwei Gemeinnamen:

Extension	Verbal	Nominal
$\{(a,b) \mid L(a,b)\}$	lieben	Verliebte
$\{a \mid \exists b\, L(a,b)\}$	jemanden lieben	Liebende(r)
$\{b \mid \exists a\, L(a,b)\}$	geliebt werden	Geliebte(r)

Sie entstehen als *Nominalisierungen der Partizipien.*

Festhalten eines Arguments

Aus dem transitiven Verb erhält man Gemeinnamen auch durch Festhalten eines Arguments:

xLb	x liebt b
$x(Lb)$	x ist ein *Liebhaber des* b
$(aL)y$	y ist ein *Geliebter des* a

Sie entstehen durch *Genitivattribut mit Eigennamen.*

Die „Kopula der Relative"

Die klassische Kopula der Gemeinnamen, $M\,a\,L$, in

„*Alle* Menschen *sind* Lebewesen",

verallgemeinert Peirce zu einer *Kopula der Relative*:

$$(R\,a\,S)(x,z) :\Longleftrightarrow \forall z(R(x,z) \rightarrow S(z,y))$$

Beispiel: $L =$ liebt, $D =$ dient, $(L\,a\,D)(x,y) =$

„*Alle* von x geliebten *sind* Diener von y"

Entsprechend kann man die kategorischen Aussagen der klassischen Logik verallgemeinern:

$$\begin{aligned}
(R\,e\,S)(x,y) &:\Longleftrightarrow \forall z(R(x,z) \wedge \overline{S}(z,y)) \\
(R\,i\,S)(x,y) &:\Longleftrightarrow \exists z(R(x,z) \wedge S(z,y)) \\
(R\,o\,S)(x,y) &:\Longleftrightarrow \exists z(R(x,z) \wedge \overline{S}(z,y))
\end{aligned}$$

Bem.: Die Kopula der Relative kann durch

$$x(L\,a\,D)y \quad = \quad (xL)\,a\,(Dy).$$

auf die Kopula der Gemeinnamen und das Festhalten von Argumenten reduziert werden.

Die Algebra dyadischer Relationen

Pierce betrachtet vier Grundoperationen:

(i) das *Komplement* einer Relation,

$$\overline{R} := \{(a, b) \mid \neg\, R(a, b)\}$$

(ii) das *nicht-relative Produkt* zweier Relationen,

$$R \cdot S := \{(a, b) \mid R(a, b) \wedge S(a, b)\}$$

(iii) die *Konverse* einer Relation,

$$\breve{R} := \{(b, a) \mid R(a, b)\}$$

(iv) die *relative Summe* zweier Relationen,

$$R \mathbin{\dagger} S := \{(a, c) \mid \forall b(R(a, b) \vee S(b, c)\}$$

Definierbar sind die *nicht-relative Summe* und das *relative Produkt*:

$$R + S := \overline{\overline{R} \cdot \overline{S}} = \{(a, b) \mid R(a, b) \vee S(a, b)\}$$

$$R \,;\, S := \overline{\overline{R} \mathbin{\dagger} \overline{S}} = \{(a, c) \mid \exists b(R(a, b) \wedge S(b, c)\}$$

Relative Divisionen

Auch die „Divisionen mit Rest“ sind definierbar, das *linke Residuum von R durch S*,

$$S\backslash R := \overline{\breve{S}\,;\overline{R}} = \{(a,c) \mid \forall b(S(b,a) \to R(b,c))\}$$

und das *rechte Residuum von R durch S*,

$$R/S := \overline{\overline{R}\,;\breve{S}} = \{(a,c) \mid \forall b(S(b,c) \to R(a,b))\}$$

Zeige:

a) $S\backslash R$ ist die *größte Relation* X mit $S;X \subseteq R$.

b) R/S ist die größte Relation X mit $X;S \subseteq R$.

Beisp.: (Pratt 1991) Sei $k =$ king, $t =$ tax, $L =$ loves, $P =$ pays. Dann heißt

$$\begin{aligned}(L\backslash P)(k,t) \;&=\; k(L\backslash P)t \;=\; (Lk)\,a\,(Pt)\\ &= \forall z(zLk \to zPt)\\ &= \text{Those who love the king pay the taxes.}\end{aligned}$$

Boole'sche Algebra

Eine *Boole'sche Algebra* $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ besteht aus einer nicht-leeren Menge A mit:

(i) $+, \cdot\ : A \times A \to A$ sind assoziativ, kommutativ und idempotent, d.h. für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a + b &= b + a \\ a + a &= a \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, \\ a \cdot b &= b \cdot a, \\ a \cdot a &= a \end{aligned}$$

(ii) $+$ und $\cdot$ sind distributiv zueinander:

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \\ (a \cdot b) + c &= (a + c) \cdot (b + c) \end{aligned}$$

(iii) 0, 1 sind neutrale Elemente für $+$ bzw. $\cdot$, d.h.

$$\begin{aligned} a + 0 &= a \\ a \cdot 1 &= a \end{aligned}$$

(iv) $- : A \to A$ ist eine Komplementbildung, d.h.

$$\begin{aligned} a + -a &= 1 \\ a \cdot -a &= 0 \end{aligned}$$

Standardbeispiele

Die Standardinterpretationen sind:

(i) Die Algebra der Wahrheitswerte,

$$\mathbb{B} = (\{0,1\}, \max, \min, -, 0, 1)$$

mit $-1 := 0$ und $-0 := 1$,

(ii) Die Potenzmengenalgebra einer Menge M,

$$2^M := (2^M, \cup, \cap, -, \emptyset, M)$$

mit $-A := M \setminus A := \{m \in M \mid m \notin A\}$.

Folgerungen

Auf jeder B.A. $\mathcal{A}$ kann eine partielle Ordnung definiert werden durch

$$a \leq b :\Longleftrightarrow \; a + b = b$$

In jeder Boole'schen Algebra $\mathcal{A}$ gilt für alle $a, b, c \in A$:

(i) $a \leq b$ genau dann, wenn $a = a \cdot b$

(ii) $a \cdot 0 = 0$, also $0 \leq a$

(iii) $a + 1 = 1$, also $a \leq 1$

(iv) $-(-a) = a$,

(v) $-0 = 1$ und $-1 = 0$

(vi) $-(a + b) = -a \cdot -b$ (de Morgan'sche Regeln)

(vii) $-(a \cdot b) = -a + -b$

Relationenalgebra

Eine *Relationenalgebra* (Tarski 1955)

$$\mathcal{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1, ;, {}^{\smile}, I)$$

besteht aus einer Menge R von „Relationen“ sodaß

(i) $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ ist eine Boole'sche Algebra

und für alle $r, s, t \in R$ gelten:

(ii) $r; (s; t) = (r; s); t$

(iii) $r; I = r = I; r$

(iv) $r^{\smile\smile} = r$

(v) $(r + s); t = (r; t) + (s; t)$

(vi) $(r + s)^{\smile} = r^{\smile} + s^{\smile}$

(vii) $(r; s)^{\smile} = s^{\smile}; r^{\smile}$

(viii) $r^{\smile};\ -(r; s) \leq -s$,

wobei $r \leq s :\iff r + s = s$ ist.

Bezeichnungen:

(i) r heißt *reflexiv*, falls $I \leq r$.

(ii) r heißt *transitiv*, falls $r \,;\, r \leq r$.

(iii) r heißt *symmetrisch*, falls $r^{\smile} \leq r$.

Eine Relation r ist eine *(totale) Äquivalenz*, falls r (reflexiv,) transitiv und symmetrisch ist.

Standardinterpretation

Die *volle Relationenalgebra über der Menge* U ist

$$(2^{U \times U}, \cup, \cap, -, \emptyset, 1, ;\, , ^{\smile}, I)$$

mit

$$\begin{array}{rcl} 1 & := & U \times U, \\ -r & := & \{(a,b) \in U \times U \mid (a,b) \notin r\}, \\ r \,;\, s & := & \{(a,c) \mid \exists b \in U \ (a,b) \in r \wedge (b,c) \in s\}, \\ r^{\smile} & := & \{(a,b) \mid (b,a) \in r\}, \\ I & := & \{(a,a) \mid a \in U\}. \end{array}$$

Definierbare Relationen

(i) die n-te *Potenz* der Relation R,

$$R^0 := I, \quad R^{n+1} := R;R^n$$

(ii) das *linke Residuum* von S durch R,

$$S/R := \max X(X;R \subseteq S) = -(-S;R^\smile)$$

(iii) das *rechte Residuum* von S durch R,

$$R\backslash S := \max X(R;X \subseteq S) = -(R^\smile;-S)$$

Einfache Sätze

Satz (Chin, Tarski 1951) In jeder Relationenalgebra gilt für jedes r, s, t, u:

(i) $0^{\smile} = 0$, $1^{\smile} = 1$ und $I^{\smile} = I$,

(ii) $r \leq s$ gdw. $r^{\smile} \leq s^{\smile}$

(iii) $(r \cdot s)^{\smile} = r^{\smile} \cdot s^{\smile}$ und $(-r)^{\smile} = -(r^{\smile})$

(iv) $r\,;0 = 0 = 0\,;r$ und $1\,;1 = 1$

(v) $r\,;(s+t) = (r\,;s) + (r\,;t)$

(vi) Wenn $r \leq s$ so ist $t\,;r \leq t\,;s$ und $r\,;t \leq s\,;t$

(vii) $(r\,;s)\cdot t = 0$ gdw. $(r^{\smile};t)\cdot s = 0$ gdw.$(t\,;s^{\smile})\cdot r = 0$

(viii) $(r\,;s) \cdot (t\,;u) \leq r\,;((r^{\smile};t) \cdot (s\,;u^{\smile}))\,;u$

(ix) Wenn $r \leq I$, dann ist r eine Äquivalenz

(x) Wenn $s\,;1 = s$, dann ist $r \cdot s = (s \cdot I)\,;r$

Eine Relationenalgebra M ist *einfach*, wenn 1 und I die einzigen Äquivalenzen in M sind.

Satz (Tarski, Jónsson 1952) M ist einfach gdw.

$\forall r(r \neq 0 \rightarrow (1\,;r\,;1 = 1)$ gdw.
$\forall r(r = 1\,;r\,;1 \leftrightarrow (r = 0 \vee r = 1))$.

Komplexität der Relationenalgebra

Satz (Schröder 1895) Jede Aussage der Relationenalgebra kann auf die Form $R = S$ gebracht werden.

Daher genügt eine reine *Gleichungslogik*. Gleichungen, die nur die Boole'schen Operationen enthalten, sind mit der *boole'schen Unifikation* lösbar.

Frage Wie weit kann man das auf Gleichungen ausdehnen, in denen auch die Operationen ; und I benutzt werden?

Bem. (Tarski 1941) Eine Relation R ist

(i) eine surjektive Funktion, falls $R^{\smile} ; R = I$,

(ii) total und injektiv, falls $(R ; R^{\smile}) = I$.

Die Relationen mit beiden Eigenschaften erfüllen die Axiome der Gruppentheorie.

Da die Gruppentheorie unentscheidbar ist, ist es auch die (Horntheorie der) Relationenalgebra.

Die elementare Theorie der dyadischen Relationen

A.Tarski (1941) faßt die Relationenalgebra als Teil einer logischen Theorie mit folgenden Axiomen auf:

$$
\begin{array}{rrl}
1. & \forall x \forall y & x1y \\
2. & \forall x \forall y & \neg\, x0y \\
3. & \forall x & x1'x \\
4. & \forall x \forall y \forall z & ((xRy \wedge y1'z) \rightarrow xRz) \\
5. & \forall z \forall y & (x0'y \leftrightarrow \neg\, x1'y) \\
6. & \forall x \forall y & (x\overline{R}y \leftrightarrow \neg\, xRy) \\
7. & \forall x \forall y & (x\breve{R}y \leftrightarrow yRx) \\
8. & \forall x \forall y & (x(R \cdot S)y \leftrightarrow (xRy \wedge xSy)) \\
9. & \forall x \forall y & (x(R + S)y \leftrightarrow (xRy \vee xSy)) \\
10. & \forall x \forall y & (x(R \dagger S)y \leftrightarrow \forall z(xRz \vee zSy)) \\
11. & \forall x \forall y & (x(R\,;S)y \leftrightarrow \exists z(xRz \wedge zSy)) \\
12. & & R = S \leftrightarrow \forall x \forall y(xRy \leftrightarrow xSy)
\end{array}
$$

1 bzw. 0 sind die universelle bzw. leere Relation,

$\overline{R}$, $R + S$, $R \cdot S$ sind Komplement, Vereinigung und Durchschnitt,

$\breve{R}$ ist die Inverse von R,

$R \dagger S$, $R\,;S$ sind relative Summe und Produkt

$R = S$ ist die extensionale Gleichheit von Relationen

Relationen und Mengen

Durch Anwenden der Relationenkopula auf Relationen unterschiedlicher Stelligkeit erhält man weitere sprachlich übliche Konstruktionen:

Peirce'sches Produkt

Aus transitiven Verben erhält man einstellige Prädikate auch durch *Genitivattribut mit einem Gemeinnamen*:

$$R : B := \{a \mid \exists b(R(a, b) \wedge B(b))\}$$

Beispiel: $L : F =$ Liebhaber einer Frau

Das Peirce'sche Produkt der Relation R mit der Menge B ist das *Urbild von b unter R*.

Bild einer Menge unter einer Relation

Das *Bild der Menge B unter der Relation R* ist

$$R''B := \{a \mid \exists b(B(b) \wedge R(b, a)\}.$$

Beispiel: $L''F =$ Geliebter einer Frau

Boole'sche Moduln

Ein *Boole'scher Modul* (Brink 1988) $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mathcal{R}, :)$ besteht aus

(i) einer Boole'schen Algebra $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$,

(ii) einer Relationenalgebra $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1, \,;\,, \breve{}\,, I)$,

(iii) und einer Abbildung : von $\mathcal{R} \times \mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}$, so daß für alle $a, b \in B$ und $r, s \in R$ gilt:

   (a) $r : (a + b) = r : a + r : b$,
   (b) $(r + s) : a = r : a + s : a$,
   (c) $r : (s : a) = (r \,;\, s) : a$,
   (d) $I : a = a$,
   (e) $0 : a = 0$
   (f) $\breve{r} : -(r : a) \leq -a$.

Standardbeispiel

Die volle Boole'sche Algebra $\mathcal{B}$ mit der vollen Relationenalgebra $\mathcal{R}$ über V und dem *Urbild von B unter R*,

$$R : B := \{a \in V \mid \exists b \in V(R(a, b) \wedge B(b))\},$$

dem sogenannten *Peirce'schen Produkt*.

Definierbare Mengen und Relationen

In einem Boole'schen Modul sind folgende Mengen und Relationen definierbar:

(i) Das *Bild* der Menge A unter der Relation R:

$$R``A := \{b \in V \mid \exists a \in V(A(a) \wedge R(a,b))\} = R^{\smile} : A$$

(ii) Die 1. und 2. *Projektion* der Relation R:

$$\begin{aligned} dom(R) &:= \{a \in V \mid \exists b \in V\ R(a,b)\} = R : 1 \\ ran(R) &:= \{b \in V \mid \exists a \in V\ R(a,b)\} = R``1 \end{aligned}$$

(iii) Das *Feld* der Relation R,

$$\begin{aligned} F(R) &:= \{v \in V \mid \exists w \in V(R(v,w) \vee R(w,v))\} \\ &= dom(R) + ran(R) \end{aligned}$$

Peirce'sche Algebren

Eine *Peirce'sche Algebra* (Britz 1988) $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ ist ein Boole'scher Modul mit einer Abbildung $^c : \mathcal{B} \to \mathcal{R}$, so daß für alle $a \in B$ und $r \in R$ gilt:

(i) $a^c : 1 = a$,

(ii) $(r : 1)^c = r \,;1$.

Beispiel

Die *volle Peirce'sche Algebra über der Menge* V,

$$P(V) := (\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c),$$

wobei $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :)$ der volle Boole'sche Modul über V ist und

$$A^c := A \times V \text{ für jedes } A \subseteq V.$$

die *Rechtszylindrifizierung* von A.

Die Rechtszylindrifizierung erfüllt die Axiome einer Peirce'schen Algebra:

$$A^c : 1 \;=\; (A \times V) : V = A.$$

$$\begin{aligned}
(R : 1)^c &= (R : V)^c \\
&= (R : V) \times V \\
&= \{a \in V \mid \exists b \in V \; R(a,b)\} \times V \\
&= R\,; (V \times V) \\
&= R\,; 1.
\end{aligned}$$

In einer Peirce'schen Algebra $P(V)$ hat man

(i) das *kartesische Produkt zweier Mengen*:

$$\begin{aligned} A \times B &:= \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= (A \times V) \cap (V \times B) \\ &= A^c \cap (B^c)^{\smile} \end{aligned}$$

(ii) die *Vorbeschränkung einer Relation auf eine Menge*:

$$\begin{aligned} R \upharpoonleft A &:= \{(a,b) \mid a \in A, b \in V, R(a,b)\} \\ &= R \cap (A \times V) \\ &= R \cap A^c. \end{aligned}$$

(iii) Die *Beschränkung der Identität auf eine Menge*,

$$\begin{aligned} I_A &:= \{(a,a) \mid a \in A\} \\ &= I \cap (A \times V) \\ &= I \cap A^c \end{aligned}$$

Daraus folgt die Definierbarkeit vieler weiterer Mengen und Relationen, und Zusammenhänge der Mengenoperationen mit $\times$, z.B.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Testfunktionen

Aufgabe: Zeige, daß man in $P(V)$ die Tests

$$\begin{aligned} U(X) &:= \begin{cases} V, & \text{falls } V = X, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases} \\ E(X) &:= \begin{cases} V, & \text{falls } X \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

aus X mit den Operationen der Peirce'schen Algebra definieren kann.

Wir benutzen die Boole'schen Werte $1 = V$ und $0 = \emptyset$ von $P(V)$ nun als Wahrheitswerte *wahr* und *falsch*.

Peirce'sche Grammatiken
(Suppes 1975-80, Böttner 1997)

Eine *Peirce'sche Funktion* ist eine mit den Operationen der Peirce'schen Algebra definierbare Funktion.

Eine *Peirce'sche Grammatik* (G, F, v) besteht aus

(i) einer kontextfreien Grammatik $G = (\Sigma, N, P, S)$,

(ii) einer *Denotationsfunktion* F, die jeder Regel $A \to A_1 \cdots A_n \in P$ eine n-stellige Peirce'sche Funktion $F_{A \to A_1 \cdots A_n}$ zuordnet, und

(iii) einer partiellen *Belegung* $v : \Sigma \to P(D)$ der Terminale durch Elemente von $P(D)$, der vollen Peirce'schen Algebra über der Menge D.

Bei einer *Boole'schen Grammatik* (G, F, v) werden statt $P(D)$ die volle Boole'sche Algebra $B(D)$ und für die $F_{A \to A_1 \cdots A_n}$ nur *Boole'sche Funktionen* und die Testfunktionen U, N, E verwendet.

Wir schreiben $f = F_{A \to A_1 \cdots A_n}$ als *Grammatikregel mit Auswertungsvorschrift*

$$A(f(X_1, \ldots, X_n)) \to A_1(X_1) \cdots A_n(X_n).$$

Die Bedeutung eines Ausdrucks

Jedem Syntaxbaum t eines Ausdrucks $w \in \Sigma^+$ bezüglich G wird eine *Denotation* $[\![t]\!]_v \in P(D)$ zugeordnet:

(i) Ist $t = \cdot a$, so ist $[\![t]\!]_v := v(a)$, für $a \in \Sigma$,

(ii) Ist $t = A(t_1, \ldots, t_n)$ und A_i die Wurzelmarke von t_i, so ist

$$[\![t]\!]_v := F_{A \to A_1 \cdots A_n}([\![t_1]\!]_v, \ldots, [\![t_n]\!]_v).$$

Allgemeiner: F darf zu einer n-fach verzweigenden Regel $A \to A_1 \cdots A_n \in P$ eine k-stellige Funktion

$$F_{A \to A_1 \cdots A_n} : P(D)^k \to P(D)$$

und $k \leq n$ ausgezeichnete Konstituentenpositionen

$$i_1 < \ldots < i_k$$

unter $\{1, \ldots, n\}$ angeben. Dies sind die *kategorematischen* Konstituenten, die einen Wert in $P(D)$ haben:

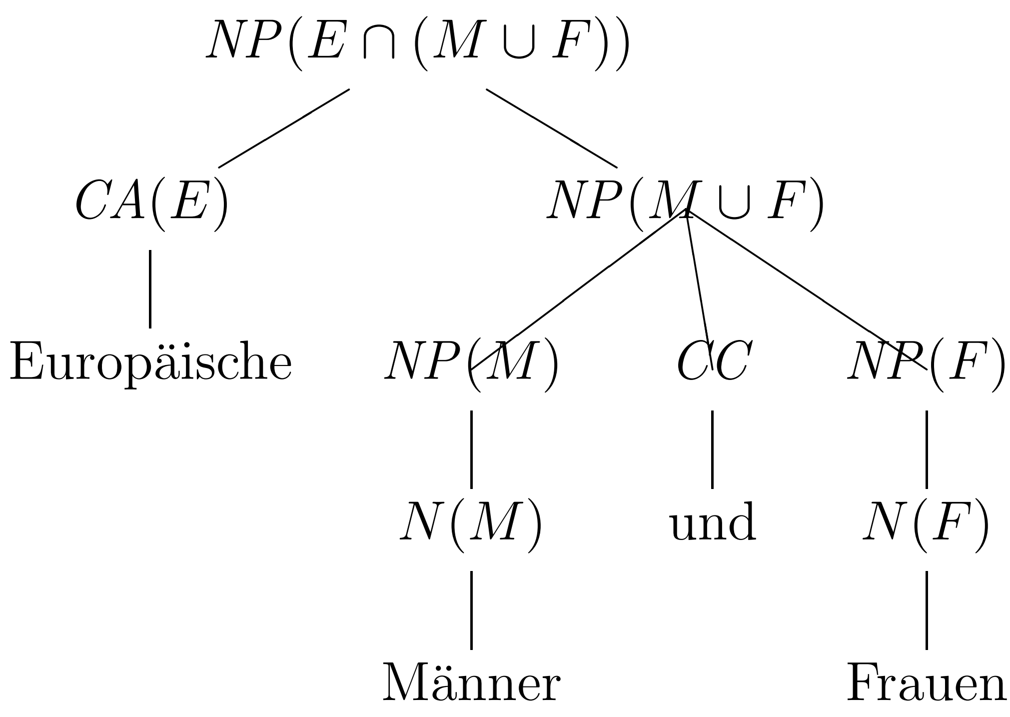
$$[\![t]\!]_v := F_{A \to A_1 \cdots A_n}([\![t_{i_1}]\!]_v, \ldots, [\![t_{i_k}]\!]_v).$$

Die anderen, *synkategorematischen* Konstituenten (z.B. Kopula) beeinflussen nur die Wahl von $F_{A \to A_1 \cdots A_n}$.

Boole'sche Grammatik

Beisp.(Boole) CA := klassifikatorisches Adjektiv,
CC := konjunktivische Koordination.

$$\begin{array}{rcll}
NP(X \cap Y) & \to & CA(X) \cdot NP(Y) & (1) \\
NP(X \cup Z) & \to & NP(X) \cdot CC \cdot NP(Z) & (2) \\
NP(X) & \to & N(X) & (3) \\
CC & \to & \text{und} & (4) \\
N(X) & \to & \text{Männer} \mid \text{Frauen} & (5) \\
CA(X) & \to & \text{Europäisch} & (6) \\
v(\text{Frauen}) = F, & \cdots, & v(\text{Europäisch}) = E. & (7)
\end{array}$$



Semantisch korrekte Grammatiken

Eine Grammatik heißt *semantisch korrekt*, wenn sie eine Denotationsfunktion F hat, die jeder Syntaxregel eine Boole'sche (bzw. Peirce'sche) Funktion zuordnet.

Satz (Suppes 1976) Nicht jede kontextfreie Grammatik ist korrekt für die Boole'sche Semantik.

Beweis: Sei G eine Grammatik mit u.a. den Regeln

$$\begin{aligned} S(\varphi(X,Y)) &\to NP(X)\cdot VP(Y) && (8)\\ NP(f(X)) &\to UQ\cdot N(X) && (9)\\ NP(g(X)) &\to EQ\cdot N(X) && (10)\end{aligned}$$

Wir nehmen an, es gebe Boole'sche Terme $\varphi(X,Y)$, $f(X), g(X)$, die Bedeutungen bei Bewertungen $v : \Sigma \to \mathcal{B}$ in Boole'schen Algebren $\mathcal{B}$ berechnen.

Wähle $\mathcal{B} = \mathbb{B} = (\{0,1\}, \max, \min, \lambda x(1-x), 0, 1)$. Dann laufen X, Y über $0, 1$.

Da UQ den Allquantor meint, sind die erwarteten Werte wegen $\varphi(f(X), Y) = 1 \iff X \leq Y$ wie folgt:

$$\begin{array}{lcccc}
\varphi(f(0), 0) & = & U(\overline{0} + 0) & = & 1 \\
\varphi(f(0), 1) & = & U(\overline{0} + 1) & = & 1 \\
\varphi(f(1), 0) & = & U(\overline{1} + 0) & = & 0 \\
\varphi(f(1), 1) & = & U(\overline{1} + 1) & = & 1
\end{array}$$

Da EQ der Existenzquantor ist, sind die erwarteten Werte für $\varphi(g(X), Y) = 1 \iff X \cdot Y = 1$ wie folgt:

$$\begin{array}{lcccc}
\varphi(g(0), 0) & = & E(0 \cdot 0) & = & 0 \\
\varphi(g(0), 1) & = & E(0 \cdot 1) & = & 0 \\
\varphi(g(1), 0) & = & E(1 \cdot 0) & = & 0 \\
\varphi(g(1), 1) & = & E(1 \cdot 1) & = & 1
\end{array}$$

Wegen $\varphi(f(0), 0) \neq \varphi(f(1), 0)$ ist $f(0) \neq f(1)$.

Wegen $\varphi(f(0), 0) \neq \varphi(g(0), 0)$ ist $f(0) \neq g(0)$.

Wegen $\varphi(f(1), 1) \neq \varphi(g(0), 1)$ ist $f(1) \neq g(0)$.

Also müssen die drei Werte $f(0), f(1), g(0)$ paarweise verschieden sein. Das ist in $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ aber unmöglich.

Also gibt es keine solchen Funktionen φ, f, g. $\square$

Definierbare Relationen und Mengen

Für Relationen R, S und Mengen A, B definiert man:

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{Mengendarstellung} \\
\textit{Relatives Produkt } R\,;S & \{\langle a,c\rangle \mid \exists b(R(a,b) \wedge S(b,c)\} \\
\textit{Oberes Bild } S\,``A := A\,;S & \{c \mid \exists a(A(a) \wedge S(a,c)\} \\
\textit{Peirce-Produkt } R : B := R\,;B & \{a \mid \exists b(R(a,b) \wedge B(b)\} \\
 & \\
\textit{Prog.Involution } R^S := \overline{\overline{R}\,;S} & \{\langle a,c\rangle \mid \forall b(R(a,b) \leftarrow S(b,c))\} \\
\textit{Unteres Bild } A^S := \overline{\overline{A}\,;S} & \{c \mid \forall a(A(a) \leftarrow S(a,c))\} \\
= S\,{}_{``}A := \overline{S``\overline{A}} & \\
R^B = \overline{\overline{R}\,;B} & \{a \mid \forall b(B(b) \rightarrow R(a,b)\} \\
 & \\
\textit{Regr.Involution } {}^R S := \overline{R\,;\overline{S}} & \{\langle a,c\rangle \mid \forall b(R(a,b) \rightarrow S(b,c))\} \\
{}^A S := \overline{A\,;\overline{S}} & \{c \mid \forall a(A(a) \rightarrow S(a,c))\} \\
= \bigcap(S,A) = \overline{\overline{S}``A} & \\
{}^R B := \overline{R\,;\overline{B}} & \{a \mid \forall b(R(a,b) \rightarrow B(b))\} \\
 & \\
\textit{Duale Operationen: z.B.} & \\
\textit{Rel. Summe } R \mathbin{\overset{+}{;}} S := \overline{\overline{R}\,;\overline{S}} & \{\langle a,c\rangle \mid \forall b(R(ab) \vee S(b,c)\}
\end{array}
$$

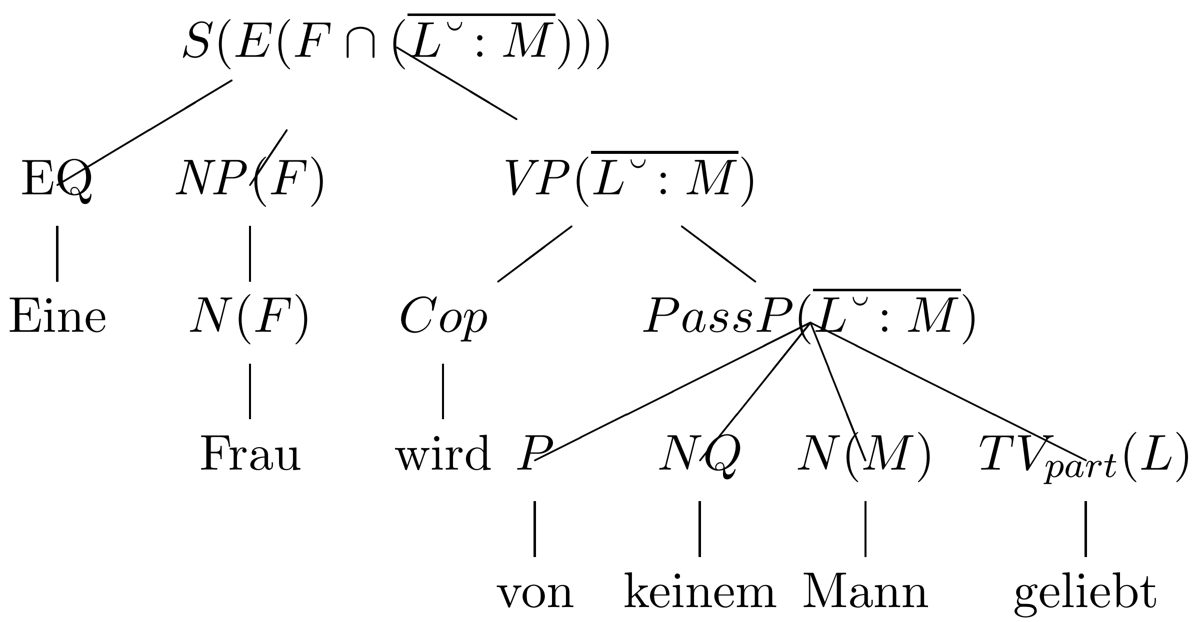
Logische Folgerung

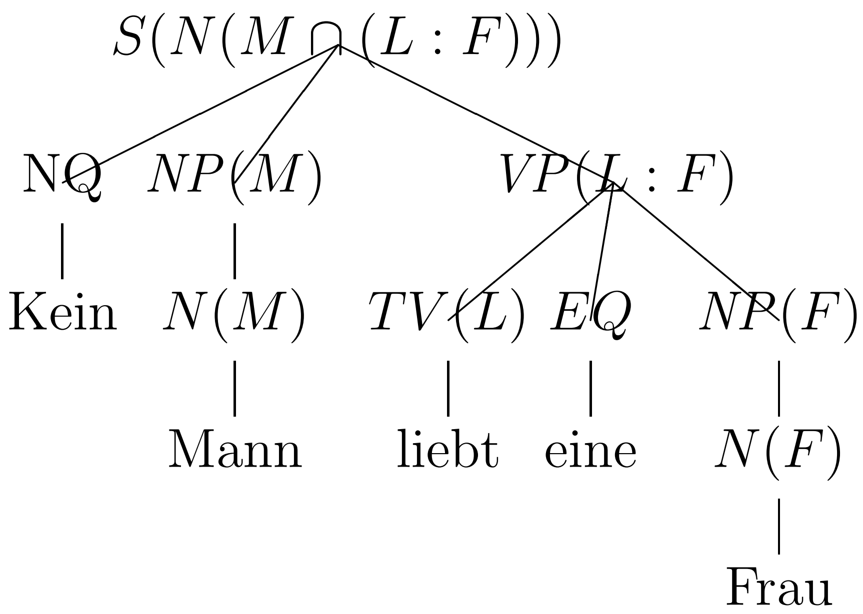
Sei $G = (T, N, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und F eine Peirce'sche Denotationsfunktion für G. Seinen φ und ψ Ausdrücke der Kategorie S mit den Syntaxbäumen t_φ und t_ψ.

Aus t_φ folgt logisch t_ψ, kurz: $\varphi \models \psi$, falls für jede Peirce'sche Algebra $\mathcal{P}$ und jede Belegung $v : T \to \mathcal{P}$ der Terminale mit $[\![t_\varphi]\!]_v^{\mathcal{P}} = 1^{\mathcal{P}}$ auch $[\![t_\psi]\!]_v^{\mathcal{P}} = 1^{\mathcal{P}}$ gilt.

Beispiel Passiv- und Aktivform eines Satzes sind nicht logisch äquivalent: $\varphi \not\models \psi$ für

$$\begin{aligned} \varphi &:= \textit{Eine Frau wird von keinem Mann geliebt} \\ \psi &:= \textit{Kein Mann liebt eine Frau} \end{aligned}$$





Wir zeigen $\varphi \not\models \psi$ durch eine Belegung $v : T \to \mathcal{P}$ mit $[\![t_\varphi]\!]_v^{\mathcal{P}} = 1^{\mathcal{P}}$ und $[\![t_\psi]\!]_v^{\mathcal{P}} = 0^{\mathcal{P}}$.

Wähle $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$ und v mit

$$
\begin{aligned}
v(\text{Männer}) = M &:= \{\text{Max}\},\\
v(\text{Frauen}) = F &:= \{\text{Eva}, \text{Sabine}\},\\
v(\text{liebt}) = L &:= \{\langle \text{Max}, \text{Sabine}\rangle\}
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
[\![t_\varphi]\!]_v^{\mathcal{P}} &= E(F \cap (\overline{L^{\smile} : M})) = E(\{\text{Eva}\}) = V = 1^{\mathcal{P}},\\
[\![t_\psi]\!]_v^{\mathcal{P}} &= N(M \cap (L : F)) = N(\{\text{Max}\}) = \emptyset = 0^{\mathcal{P}}.
\end{aligned}
$$