Semantik 4:
Baumkalküle

Robert Zangenfeind, Hinrich Schütze

Center for Information and Language Processing, LMU Munich

2018-05-25

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente

- Prädikatenlogische Wahrheit von natürlichsprachigen Sätzen kann gezeigt werden durch Übersetzung dieser Sätze in PL.

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente

- Prädikatenlogische Wahrheit von natürlichsprachigen Sätzen kann gezeigt werden durch Übersetzung dieser Sätze in PL.
- Prädikatenlogische Gültigkeit von natürlichsprachigen Argumenten kann gezeigt werden durch Übersetzung dieser Argumente in PL.

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente: Wie?

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente: Wie?

- (i) optimal strukturreiche Übersetzung des zu überprüfenden Satzes/Argumentes in PL finden

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente: Wie?

- (i) optimal strukturreiche Übersetzung des zu überprüfenden Satzes/Argumentes in PL finden
- (ii) prüfen, ob die Übersetzung in PL logisch wahr/gültig ist.

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente: Wie?

- (i) optimal strukturreiche Übersetzung des zu überprüfenden Satzes/Argumentes in PL finden
- (ii) prüfen, ob die Übersetzung in PL logisch wahr/gültig ist.
- Wahrheitstabelle nicht allgemein einsetzbar bei PL. Warum?

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente: Wie?

- (i) optimal strukturreiche Übersetzung des zu überprüfenden Satzes/Argumentes in PL finden
- (ii) prüfen, ob die Übersetzung in PL logisch wahr/gültig ist.
- Wahrheitstabelle nicht allgemein einsetzbar bei PL. Warum?
- Nachweis der logischen Wahrheit/Gültigkeit:
  indirekter Beweis durch Baumkalküle

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente: Wie?

- (i) optimal strukturreiche Übersetzung des zu überprüfenden Satzes/Argumentes in PL finden
- (ii) prüfen, ob die Übersetzung in PL logisch wahr/gültig ist.
- Wahrheitstabelle nicht allgemein einsetzbar bei PL. Warum?
- Nachweis der logischen Wahrheit/Gültigkeit:
  indirekter Beweis durch Baumkalküle
- Alternativ: Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels zum Nachweis, dass ein Satz nicht logisch wahr ist

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente: Wie?

- (i) optimal strukturreiche Übersetzung des zu überprüfenden Satzes/Argumentes in PL finden
- (ii) prüfen, ob die Übersetzung in PL logisch wahr/gültig ist.
- Wahrheitstabelle nicht allgemein einsetzbar bei PL. Warum?
- Nachweis der logischen Wahrheit/Gültigkeit: indirekter Beweis durch Baumkalküle
- Alternativ: Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels zum Nachweis, dass ein Satz nicht logisch wahr ist
- Aber: Gegenbeispiel ist nicht immer einfach zu finden $\Rightarrow$ Wahrheitsbaum

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente: Wie?

- (i) optimal strukturreiche Übersetzung des zu überprüfenden Satzes/Argumentes in PL finden
- (ii) prüfen, ob die Übersetzung in PL logisch wahr/gültig ist.
- Wahrheitstabelle nicht allgemein einsetzbar bei PL. Warum?
- Nachweis der logischen Wahrheit/Gültigkeit: indirekter Beweis durch Baumkalküle
- Alternativ: Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels zum Nachweis, dass ein Satz nicht logisch wahr ist
- Aber: Gegenbeispiel ist nicht immer einfach zu finden $\Rightarrow$ Wahrheitsbaum
- Weitere Motivation: automatische Verfahren fuer KI

Beurteilung natürlichsprachiger Sätze/Argumente: Wie?

Manchmal lässt sich Wahrheitsbaum nicht schließen, dann kann man über Gültigkeit des Arguments nichts sagen.

Outline

Aussagenlogikbeispiel

(1) (a) Wenn Adelheid mitmacht, gewinnen weder Paul noch Maria.
(b) Wenn Maria nicht gewinnt, gewinnt Paul.
(c) Also: Adelheid macht nicht mit oder Maria gewinnt.

- p: Adelheid macht mit.
- q: Paul gewinnt.
- r: Maria gewinnt.

Aussagenlogikbeispiel

(1) (a) Wenn Adelheid mitmacht, gewinnen weder Paul noch Maria.
(b) Wenn Maria nicht gewinnt, gewinnt Paul.
(c) Also: Adelheid macht nicht mit oder Maria gewinnt.

- p: Adelheid macht mit.
- q: Paul gewinnt.
- r: Maria gewinnt.
- $p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$
- $\neg r \rightarrow q$
- $\neg p \vee r$

Aussagenlogikbeispiel

(1) (a) Wenn Adelheid mitmacht, gewinnen weder Paul noch Maria.
(b) Wenn Maria nicht gewinnt, gewinnt Paul.
(c) Also: Adelheid macht nicht mit oder Maria gewinnt.

- p: Adelheid macht mit.
- q: Paul gewinnt.
- r: Maria gewinnt.
- $p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$
- $\neg r \rightarrow q$
- $\neg p \vee r$
- Wir wollen zeigen: $[((p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)) \wedge (\neg r \rightarrow q)) \rightarrow (\neg p \vee r)]$

Aussagenlogikbeispiel

(1) (a) Wenn Adelheid mitmacht, gewinnen weder Paul noch Maria.
(b) Wenn Maria nicht gewinnt, gewinnt Paul.
(c) Also: Adelheid macht nicht mit oder Maria gewinnt.

- p: Adelheid macht mit.
- q: Paul gewinnt.
- r: Maria gewinnt.
- $\mathrm{p} \rightarrow (\neg \mathrm{q} \wedge \neg \mathrm{r})$
- $\neg \mathrm{r} \rightarrow \mathrm{q}$
- $\neg \mathrm{p} \vee \mathrm{r}$
- Wir wollen zeigen:
  $[((p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)) \wedge (\neg r \rightarrow q)) \rightarrow (\neg p \vee r)]$
- Wie?

Beweis eines Satzes der Aussagenlogik

- Wie?

Beweis eines Satzes der Aussagenlogik

- Wie?
- Wahrheitstabelle

Beweis eines Satzes der Aussagenlogik

- Wie?
- Wahrheitstabelle
- Alternative: Baumkalkül

1. √	$p \to \neg q \wedge \neg r$	A
2. √	$\neg r \to q$	A
3. √	$\neg(\neg p \vee r)$	A
4.	$\neg\neg p$	(3)
5.	$\neg r$	(3)
6.	$\neg\neg r$ 7. q	(2)
	x	
8.	$\neg p$ 9. √ $\neg q \wedge \neg r$	(1)
	x 10. $\neg q$	(9)
	11. $\neg r$	(9)
	x	

Outline

Analytic Tableau (= Baumkalkül): Basic idea

For refutation tableaux, the objective is to show that the negation of a formula cannot be satisfied. There are rules for handling each connective, starting with the main connective. Many rules divide the subtableau into two. Quantifiers are instantiated. If any branch of a tableau leads to an evident contradiction, the branch closes. If all branches close, the proof is complete and the original formula is a logical truth.

Prädikatenlogikbeispiel (1)

Prädikatenlogikbeispiel (1)

(2) (a) Alle Väter sind älter als ihre Kinder.

Prädikatenlogikbeispiel (1)

(2) (a) Alle Väter sind älter als ihre Kinder.
(b) Paul ist nicht älter als Hans.

Prädikatenlogikbeispiel (1)

(2) (a) Alle Väter sind älter als ihre Kinder.
(b) Paul ist nicht älter als Hans.
(c) Also: Paul ist nicht der Vater von Hans.

Prädikatenlogikbeispiel (1)

(2) (a) Alle Väter sind älter als ihre Kinder.
(b) Paul ist nicht älter als Hans.
(c) Also: Paul ist nicht der Vater von Hans.

Übersetzung in die Prädikatenlogik

$[\forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow G(x, y)) \wedge \neg G(a, b)] \rightarrow \neg F(a, b)$

- $\mathcal{U}$ = Menge aller Menschen, a: Paul, b: Hans
- F(x,y): ... ist der Vater von ...
- G(x,y): ... ist älter als ...
- (Wahrheitstabelle keine Option fuer PL)

1.	$\forall x \forall y (F(x,y) \rightarrow G(x,y))$	A
2.	$\neg G(a,b)$	A
3.	$\neg\neg F(a,b)$	A
4.	$\forall y (F(a,y) \rightarrow G(a,y))$	(1)
5.	$F(a,b) \rightarrow G(a,b)$	(4)

6. $\neg F(a,b)$ 7. $G(a,b)$ (5)

$\times$ $\times$

Analytic Tableau (= Baumkalkül): Basic idea

For refutation tableaux, the objective is to show that the negation of a formula cannot be satisfied. There are rules for handling each connective, starting with the main connective. Many rules divide the subtableau into two. Quantifiers are instantiated. If any branch of a tableau leads to an evident contradiction, the branch closes. If all branches close, the proof is complete and the original formula is a logical truth.

Beide Äste mit 'x' geschlossen (d.h. Widerspruch)

Beide Äste mit 'x' geschlossen (d.h. Widerspruch), also: Annahme ist falsch

Beide Äste mit 'x' geschlossen (d.h. Widerspruch), also: Annahme ist falsch, d.h. Argument ist logisch gültig!

Prädikatenlogikbeispiel (2)

Prädikatenlogikbeispiel (2)

(3) (a) Kein Hund ist eine Katze.

Prädikatenlogikbeispiel (2)

(3) (a) Kein Hund ist eine Katze.
(b) Keine Katze ist ein Vogel.

Prädikatenlogikbeispiel (2)

(3) (a) Kein Hund ist eine Katze.
(b) Keine Katze ist ein Vogel.
(c) Also: Kein Hund ist ein Vogel.

Prädikatenlogikbeispiel (2)

(3) (a) Kein Hund ist eine Katze.
(b) Keine Katze ist ein Vogel.
(c) Also: Kein Hund ist ein Vogel.

Übersetzung in die Prädikatenlogik

$$[[[\neg\exists x(F(x) \wedge G(x))] \wedge [\neg\exists x(G(x) \wedge H(x))]] \rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge H(x))]$$

- $\mathcal{U}$ = Menge aller Tiere
- F(x): ... ist ein Hund
- G(x): ... ist eine Katze
- H(x): ... ist ein Vogel

1.	$\neg \exists x\, (F(x) \land G(x))$	A
2.	$\neg \exists x\, (G(x) \land H(x))$	A
3.	$\neg\neg \exists x\, (F(x) \land H(x))$	A
4.	$\forall x\, \neg (F(x) \land G(x))$	(1)
5.	$\forall x\, \neg (G(x) \land H(x))$	(2)
6.	$\exists x\, (F(x) \land H(x))$	(3)
7.	$F(a) \land H(a)$	(6)
8.	$F(a)$	(7)
9.	$H(a)$	(7)
10.	$\neg (F(a) \land G(a))$	(4)
11.	$\neg (G(a) \land H(a))$	(5)

12. $\neg F(a)$ 13. $\neg G(a)$ (10)

$\times$

14. $\neg G(a)$ $\neg H(a)$ (11)

$\times$

Analytic Tableau (= Baumkalkül): Basic idea

For refutation tableaux, the objective is to show that the negation of a formula cannot be satisfied. There are rules for handling each connective, starting with the main connective. Many rules divide the subtableau into two. Quantifiers are instantiated. If any branch of a tableau leads to an evident contradiction, the branch closes. If all branches close, the proof is complete and the original formula is a logical truth.

Auswertung des Wahrheitsbaums

Auswertung des Wahrheitsbaums

- nicht alle Äste mit ‘x’ geschlossen, vgl. Zeile 14. (d.h. kein Widerspruch)

Auswertung des Wahrheitsbaums

- nicht alle Äste mit 'x' geschlossen, vgl. Zeile 14. (d.h. kein Widerspruch)
- Gegenbeispiel:

Auswertung des Wahrheitsbaums

- nicht alle Äste mit ‘x’ geschlossen, vgl. Zeile 14. (d.h. kein Widerspruch)
- Gegenbeispiel:
- H(x): ... ist ein Hund

Auswertung des Wahrheitsbaums

- nicht alle Äste mit ‘x’ geschlossen, vgl. Zeile 14. (d.h. kein Widerspruch)
- Gegenbeispiel:
- H(x): ... ist ein Hund
- restliche Interpretation wie bei (3)

Auswertung des Wahrheitsbaums

- nicht alle Äste mit ‘x’ geschlossen, vgl. Zeile 14. (d.h. kein Widerspruch)
- Gegenbeispiel:
- H(x): ... ist ein Hund
- restliche Interpretation wie bei (3)
- d.h.

Auswertung des Wahrheitsbaums

- nicht alle Äste mit ‘x’ geschlossen, vgl. Zeile 14. (d.h. kein Widerspruch)
- Gegenbeispiel:
- H(x): ... ist ein Hund
- restliche Interpretation wie bei (3)
- d.h.

(3’) (a) Kein Hund ist eine Katze.

Auswertung des Wahrheitsbaums

- nicht alle Äste mit 'x' geschlossen, vgl. Zeile 14. (d.h. kein Widerspruch)
- Gegenbeispiel:
- H(x): ... ist ein Hund
- restliche Interpretation wie bei (3)
- d.h.

(3') (a) Kein Hund ist eine Katze.
(b) Keine Katze ist ein Hund.

Auswertung des Wahrheitsbaums

- nicht alle Äste mit ‘x’ geschlossen, vgl. Zeile 14. (d.h. kein Widerspruch)
- Gegenbeispiel:
- H(x): ... ist ein Hund
- restliche Interpretation wie bei (3)
- d.h.

(3’) (a) Kein Hund ist eine Katze.
(b) Keine Katze ist ein Hund.
(c) Also: Kein Hund ist ein Hund.

Outline

(DN)
$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ A \end{array}$$

(K)
$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ A \\ B \end{array}$$

(A)
$$\begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & & B \end{array}$$

(S)
$$\begin{array}{ccc} & A \rightarrow B & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg A & & B \end{array}$$

(B)

$$\begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & & \neg A \\ B & & \neg B \end{array}$$

(NK)

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \wedge B) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

(NA)

$$\begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ \neg A \\ \neg B \end{array}$$

(NS)

$$\begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ A \\ \neg B \end{array}$$

(NB)

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \leftrightarrow B) & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & & \neg A \\ \neg B & & B \end{array}$$

Regeln für Prädikatenlogik

- Die Regeln der Aussagenlogik
- Vier weitere Regeln: (U), (E), (NU), (NE)

Regel (U)

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall xF \\ Fx/a\end{array}}$$

Jede beliebige Konstante *a* kann gewählt werden.

Regel (E)

$$\boxed{\begin{array}{c}\exists xF \\ Fx/a\end{array}}$$

Nur eine neue Konstante *a* darf gewählt werden.

Regel (NU)

$$\boxed{\begin{array}{c} \neg\forall x F \\ \exists x \neg F \end{array}}$$

Regel (NE)

$$\boxed{\begin{array}{c} \neg\exists x F \\ \forall x \neg F \end{array}}$$

Faustregel (Beckermann)

- Zuerst: nicht verzweigende Regeln; (NU); (NE)
- Dann: (E)
- Dann: verzweigende Regeln
- Dann: (U)

Korrektheit und Vollständigkeit (1)

Ein Satz der Aussagenlogik ist genau dann logisch wahr, wenn es einen Wahrheitsbaum der Negation dieses Satzes gibt, der nur mit Hilfe der angegebenen 9 Regeln der Aussagelogik entwickelt wurde und in dem alle Äste mit einem "x" geschlossen werden können, da in ihnen ein Satz der Aussagenlogik sowohl in negierter wie in nicht negierter Form vorkommt.

Korrektheit und Vollständigkeit (2)

Ein Satz der Prädikatenlogik ist genau dann logisch wahr, wenn es einen Wahrheitsbaum der Negation dieses Satzes gibt, der nur mit Hilfe der angegebenen 13 Regeln entwickelt wurde und in dem alle Äste mit einem “x” geschlossen werden können, da in ihnen ein Satz von PL sowohl in negierter wie in nicht negierter Form vorkommt.

Gegenbeispiele (1)

$$[\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow \forall x(G(x) \rightarrow F(x))]$$

Gegenbeispiele (2)

$$[\forall x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x \neg F(x))]$$

Gegenbeispiele (3)

$$([\forall x(H(x) \rightarrow G(x)) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow G(x))] \rightarrow \forall x(F(x) \rightarrow H(x)))$$