Semantik 3: Prädikatenlogik

Hinrich Schütze

Center for Information and Language Processing, LMU Munich

2018-05-08

Acknowledgment

Diese Folien (bis auf eventuelle Fehler aufgrund meiner Änderungen) stammen zum großen Teil von Dr. Reinhold Letz, IFI/LMU, und Dr. Robert Zangenfeind, CIS/LMU.

Outline

Prädikatenlogik baut auf Aussagenlogik auf

Prädikatenlogik baut auf Aussagenlogik auf

- Logische Form der Sätze entspricht genau der grammatischen Form.

Prädikatenlogik baut auf Aussagenlogik auf

- Logische Form der Sätze entspricht genau der grammatischen Form.
- Atomare und komplexe Sätze (entstehen durch Junktoren/Satzoperatoren)

Prädikatenlogik baut auf Aussagenlogik auf

- Logische Form der Sätze entspricht genau der grammatischen Form.
- Atomare und komplexe Sätze (entstehen durch Junktoren/Satzoperatoren)
- Verwendete logische Ausdrücke (Junktoren) haben jeweils nur eine klar definierte Bedeutung.

Prädikatenlogik baut auf Aussagenlogik auf

- Logische Form der Sätze entspricht genau der grammatischen Form.
- Atomare und komplexe Sätze (entstehen durch Junktoren/Satzoperatoren)
- Verwendete logische Ausdrücke (Junktoren) haben jeweils nur eine klar definierte Bedeutung.
- Äquivalenzbeziehungen

Prädikatenlogik = First Order Logic

Prädikatenlogik = First Order Logic

- baut auf Aussagenlogik auf

Prädikatenlogik = First Order Logic

- baut auf Aussagenlogik auf
- wesentlich detaillierter als AL

Prädikatenlogik = First Order Logic

- baut auf Aussagenlogik auf
- wesentlich detaillierter als AL
- innere Struktur von Sätzen erkennbar

Prädikatenlogik = First Order Logic

- baut auf Aussagenlogik auf
- wesentlich detaillierter als AL
- innere Struktur von Sätzen erkennbar
- enthält Ausdrücke, die Namen und Prädikaten der natürlichen Sprache entsprechen

Prädikatenlogik = First Order Logic

- baut auf Aussagenlogik auf
- wesentlich detaillierter als AL
- innere Struktur von Sätzen erkennbar
- enthält Ausdrücke, die Namen und Prädikaten der natürlichen Sprache entsprechen (äußerst wichtig für Semantik! 0-, 1-, n-stellige Prädikate, Quasi-Prädikate (z.B. Opfer [der Cholera]), Eigennamen, Gattungsnamen)

Prädikatenlogik = First Order Logic

- baut auf Aussagenlogik auf
- wesentlich detaillierter als AL
- innere Struktur von Sätzen erkennbar
- enthält Ausdrücke, die Namen und Prädikaten der natürlichen Sprache entsprechen (äußerst wichtig für Semantik! 0-, 1-, n-stellige Prädikate, Quasi-Prädikate (z.B. Opfer [der Cholera]), Eigennamen, Gattungsnamen)
- ebenfalls nur Aussagesätze (starke Einschränkung)

Prädikatenlogik: Motivation

Meistens reicht die Aussagenlogik nicht aus, um z.B. ein mathematisches, ein logisches oder ein Problem der natürlichen Sprache zu formalisieren. Die Sprache der Prädikatenlogik ist deutlich mächtiger und kann über Objekte einer 'Welt' sowie deren Eigenschaften und Beziehungen sprechen.

Prädikatenlogik hat Bezeichnungen für:

- *Objekte* einer Grundmenge $\mathcal{U}$ (Konstanten, 0-stellige *Funktionen*) (notiert als $a, b, c, ..$ oder z.B. Ziffern)
- *Funktionen* auf den Objekten (z.B. Nachfolgerfunktion) (n-stellige *Funktionen*) $f : \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$ (notiert als $f, g, h, ...$)
- *Aussagen* (wie in der Aussagenlogik) (0-stellige *Prädikate*, notiert als $p, q, r, ..$)
- *Eigenschaften* von Objekten (z.B. gross, gelb,..) (Teilmengen von U)
  $P \subseteq \mathcal{U}$ (1-stellige Prädikate, notiert als $P, Q, R, ..$)
- *Relationen* zwischen Objekten (z.B. Grossvater von, kleiner als): n-stellige *Prädikate* (notiert als $P, Q, R, ..$) auf dem Universum $P \subseteq \mathcal{U}^n$

Beispiele

- *Objekte* der Grundmenge $\mathcal{U}$, Konstanten, 0-stellige *Funktionen*: 'Paris', 'Bodensee', 'Quentin Tarantino'
- *Eigenschaften* von Objekten (Teilmengen von $\mathcal{U}^n$), "Prädikate" '... läuft', '... ist groß', '... ist ein Bruder von ...', '... befindet sich zwischen ... und ...'

Bezeichnung von Prädikaten

Notationsvariante: hochgestellter Index zur Anzeige der Stelligkeit, keine Klammern:
F^1a, G^1b, H^2ab, F^3aeh
Standardnotation: F(a), G(b), H(a,b), F(a,e,h)

Prädikatenlogik – Beispiel

Beispiel aus der Zahlentheorie

- 0 ist eine gerade Zahl.
- Wenn x eine gerade Zahl ist, so ist $x + 1$ keine gerade Zahl.
- Wenn x keine gerade Zahl ist, so ist $x + 1$ eine gerade Zahl.

Prädikatenlogik – Beispiel

Zur Formalisierung benötigt: Neben den aus der Aussagenlogik bekannten Junktoren ($\rightarrow, \ldots$) auch *Quantoren* (z.B. $\forall$), *Konstanten* (z.B. $0, 1$), *Variablen* (z.B. x), *Funktionssymbole* (z.B. $s, +$), und *Prädikatensymbole* (z.B. $EVEN$)

- $EVEN(0)$
- $\forall x(EVEN(x) \rightarrow \neg EVEN(x+1))$ oder
  $\forall x(EVEN(x) \rightarrow \neg EVEN(s(x)))$
- $\forall x(\neg EVEN(x) \rightarrow EVEN(x+1))$ oder
  $\forall x(\neg EVEN(x) \rightarrow EVEN(s(x)))$

Syntax der Prädikatenlogik 1. Stufe (PL1 = FOL)

- *Alphabet:*
  Symbole
- *Signatur:*
  Stelligkeiten der Symbole
- *Wohlgeformte Ausdrücke*:
  - Terme
  - Formeln

Alphabet $\mathcal{A}$

Abzählbar unendliche Menge von Objekten („Symbolen"), partitioniert in 6 disjunkte Untermengen:

1. Unendliche Menge $\mathcal{V}$ von *Variablen*
2. Unendliche Menge $\mathcal{F}$ von *Funktionszeichen*
3. Unendliche Menge $\mathcal{P}$ von *Prädikatszeichen*
4. Menge $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ von *Junktoren* oder *Konnektiven*
5. 2-elementige Menge $\mathcal{Q} = \{\forall, \exists\}$ von *Quantoren*: $\forall$ *Allquantor*, $\exists$ *Existenzquantor*
6. 3-elementige Menge {„(", „)", „, "} von *Hilfszeichen*

Alphabet $\mathcal{A}$

Abzählbar unendliche Menge von Objekten („Symbolen“), partitioniert in 6 disjunkte Untermengen:

1. Unendliche Menge $\mathcal{V}$ von *Variablen*
2. Unendliche Menge $\mathcal{F}$ von *Funktionszeichen*
3. Unendliche Menge $\mathcal{P}$ von *Prädikatszeichen*
4. Menge $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ von *Junktoren* oder *Konnektiven*
5. 2-elementige Menge $\mathcal{Q} = \{\forall, \exists\}$ von *Quantoren*: $\forall$ *Allquantor*, $\exists$ *Existenzquantor*
6. 3-elementige Menge {„(“, „)“, „, “} von *Hilfszeichen*

Vergleich zu Aussagenlogik?

Signatur Σ

Signatur $\Sigma = \langle \mathcal{A}, \alpha \rangle$: $\mathcal{A}$ Alphabet und $\alpha : \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ ist eine Funktion (Stelligkeitsfunktion) derart, dass gilt:

1. Auf jedes $n \in \mathbb{N}_0$ werden unendlich viele Funktions- und Prädikatszeichen aus $\mathcal{A}$ abgebildet.
2. Negationszeichen hat Stelligkeit 1, alle anderen Junktoren und die Quantoren haben Stelligkeit 2.

Menge der Terme $\mathcal{T}$ (induktiv)

1. Alle Variablen sind *Terme*.
2. Falls f Funktionszeichen mit Stelligkeit $n \geq 0$ und $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $f(t_1, \cdots, t_n)$ ein *Term*.

   Bei nullstelligen Funktionszeichen (Konstanten) schreiben wir auch a statt $a()$.

Menge der Formeln $\mathcal{F}$ (induktiv)

1. Falls P Prädikatsszeichen mit Stelligkeit $n \geq 0$ und $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $P(t_1, \cdots, t_n)$ eine *(atomare) Formel*.
   Statt $P()$ schreiben wir auch kurz P oder p (analog Aussagenlogik).
2. Falls F und G Formeln und $x \in \mathcal{V}$, dann sind auch:
   - $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$
   - und $\forall x F$, $\exists x F$

   Formeln.

High-arity predicate: 3, 4, 5, 6?

Semantik der Prädikatenlogik – Interpretation

Eine Interpretation bestimmt die Bedeutung einer Formel durch die Festlegung der Trägermenge (Universum), durch Interpretation der Funktions- und Prädikatszeichen sowie durch die Belegung der freien (s.u.) Variablen einer Formel.
Interpretation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{U}, \iota \rangle$:

- $\mathcal{U}$ *Universum*: Nichtleere Menge von Objekten
- ι *Interpretationsfunktion*:
  - jedem n-stelliges Funktionssymbol f wird eine Funktion $f' : \mathcal{U}^n \longrightarrow \mathcal{U}$ zugeordnet, d.h. $\iota(f) = f'$.
  - jedem n-stelliges Prädikatsymbol P wird eine n-stellige Relation $P' \subseteq \mathcal{U}^n$ zugeordnet, d.h. $\iota(P) = P'$.

Semantik: Variablen- und Termzuweisung

Variablenzuweisung: Funktion $\mathcal{A} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$

(wird als Zwischenschritt benötigt um den Wert komplexer Terme und Formeln zu definieren)
Termzuweisung: Fortsetzung einer Interpretation $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ und einer Variablenzuweisung $\mathcal{A}$ auf *Terme*

- $\iota^{\mathcal{A}}(x) = \mathcal{A}(x)$
- $\iota^{\mathcal{A}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \iota(f)(\iota^{\mathcal{A}}(t_1), \ldots, \iota^{\mathcal{A}}(t_n))$ wobei f n-stellig

Semantik: Formelzuweisung

Fortsetzung einer Interpretation $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ und einer Variablenzuweisung $\mathcal{A}$ auf *Formeln*

- $\iota^{\mathcal{A}}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathbf{t}$, falls $\langle \iota^{\mathcal{A}}(t_1), \ldots, \iota^{\mathcal{A}}(t_n) \rangle \in \iota(P)$ und $\mathbf{f}$ sonst (wobei P n-stellig)
- $\iota^{\mathcal{A}}(\neg F) = \mathbf{t}$, falls $\iota^{\mathcal{A}}(F) = \mathbf{f}$ und $\mathbf{f}$ sonst,
- $\iota^{\mathcal{A}}(F \wedge G) = \mathbf{t}$, falls $\iota^{\mathcal{A}}(F) = \mathbf{t}$ und $\iota^{\mathcal{A}}(G) = \mathbf{t}$ und $\mathbf{f}$ sonst,
- $\iota^{\mathcal{A}}(F \vee G) = \iota^{\mathcal{A}}(\neg(\neg F \wedge \neg G))$,
- $\iota^{\mathcal{A}}(F \rightarrow G) = \iota^{\mathcal{A}}(\neg F \vee G)$,
- $\iota^{\mathcal{A}}(F \leftrightarrow G) = \iota^{\mathcal{A}}((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$,
- $\iota^{\mathcal{A}}(\forall x F) = \mathbf{t}$, falls $\iota^{\mathcal{A}_x^u}(F) = \mathbf{t}$ für alle $u \in \mathcal{U}$, und $\mathbf{f}$ sonst (wobei $\mathcal{A}_x^u(x) = u$ und sonst $\mathcal{A}_x^u = \mathcal{A}$)
- $\iota^{\mathcal{A}}(\exists x F) = \iota^{\mathcal{A}}(\neg \forall x \neg F)$

$\exists x \ldots$ “es gibt” $\forall x \ldots$ “für alle”

Interpretation: Beispiel

- Universum einer Interpretation kann z.B. die Menge aller Menschen sein oder die Menge der Städte Berlin und München, also z.B.: $\mathcal{U} =$ Menge aller Menschen
- Bedeutung der Individuenkonstanten wird dadurch bestimmt, dass ι jeder Individuenkonstanten von PL einen Gegenstand aus $\mathcal{U}$ zuordnet; ι kann z.B. der Individuenkonstanten a das Objekt Sokrates zuordnen, also: $\iota(a)=$ Sokrates
- Bedeutung der Prädikatbuchstaben wird dadurch festgelegt, dass ι jedem Prädikatbuchstaben ein Prädikat zuordnet, d.h. (i) Eigenschaft der Gegenstände von $\mathcal{U}$ oder (ii) Beziehung zwischen den Gegenständen von $\mathcal{U}$; z.B.: $F(x)$: x ist ein Philosoph, $F(x,y)$: x ist berühmter als y
- Der Satz $F(a)$ ist bezüglich seiner Interpretation $\mathcal{I}$ wahr, wenn der durch a bezeichnete Gegenstand die Eigenschaft F' hat

How can a variable find its quantifier?

How can a variable find its quantifier?

- $\forall x P(x)$

How can a variable find its quantifier?

- $\forall x P(x)$
- $\forall x P(x) \wedge Q(x)$

How can a variable find its quantifier?

- $\forall x P(x)$
- $\forall x P(x) \wedge Q(x)$
- $(\forall x P(x)) \wedge Q(x)$

How can a variable find its quantifier?

- $\forall x P(x)$
- $\forall x P(x) \wedge Q(x)$
- $(\forall x P(x)) \wedge Q(x)$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$

Unterausdrücke, Vorkommnisse, Quantorenskopuse

Unterausdrücke:

- Sei $W = W_1\hat{}\cdots\hat{}W_n$ erzeugt nach Definition Term, Formel. Falls W_i wohlgeformt, dann *unmittelbarer Unterausdruck* von W.
- *Unterausdruckrelation*: transitive Hülle der unmittelbaren Unterausdruckrelation

Vorkommnisse oder Positionen:

- Ein Ausdruck E kann an verschiedenen Stellen in einem Ausdruck W *vorkommen*, die i.A. unterschieden werden müssen.
- Wir annotieren die Position von E in W durch ${}^{\mathrm{k}}E$, wobei das erste Symbol von E das k-te in W ist.

Quantorenskopuse: Sei ${}^{\mathrm{k}}Q$ Vorkommnis eines Quantors in einem Ausdruck W.

Das Vorkommnis ${}^{\mathrm{k}}QxE$ heißt *Skopus* von ${}^{\mathrm{k}}Q$ in W.

Scope: Alternative definition

- Let W be a WFF of the language of predicate logic. (well-formed formula)
- Let Q be an occurrence of a quantifier in W
- Let B be a well-formed part of W such that B begins (omitting outer parentheses) with Qx
- That is, such that B=QxE for some WFF E
- E is called the scope of the quantifier Q. (Alternatively, B can be called the scope of quantifier Q.)

Skopus: Beispiel

Skopus: Beispiel

- “Skopus eines Quantors ist die Formel, die unmittelbar auf den Quantor folgt.”

Skopus: Beispiel

- "Skopus eines Quantors ist die Formel, die unmittelbar auf den Quantor folgt."
- $\forall x \exists y F(x,y)$

Skopus: Beispiel

- “Skopus eines Quantors ist die Formel, die unmittelbar auf den Quantor folgt.”
- $\forall x \exists y F(x,y)$
- Skopus des Quantors $\forall x$ ist $\exists y F(x, y)$

Skopus: Beispiel

- "Skopus eines Quantors ist die Formel, die unmittelbar auf den Quantor folgt."
- $\forall x \exists y F(x,y)$
- Skopus des Quantors $\forall$x ist $\exists y F(x, y)$
- Skopus des Quantors $\exists$y ist $F(x, y)$

Freie und gebundene Vorkommnisse von Variablen

- Ein Vorkommnis einer Variablen ${}^{k}x$ heisst *gebunden* in einem Ausdruck W, falls ${}^{k}x$ im Skopus eines Quantorvorkommnisses ${}^{k\text{-}l}Q$ liegt, dem unmittelbar x folgt; sonst heisst ${}^{k}x$ *frei* in W. Das ${}^{k\text{-}l}Q$ mit minimalem l ist das *bindende* Quantorvorkommnis von ${}^{k}x$ in W.
- Variablen können in der gleichen Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommen. Beispiel: $P(x) \vee \forall x Q(x)$
- Formeln ohne freie Variablen heissen *geschlossene Formeln* oder *Sätze*.
  Der Wahrheitswert von Sätzen hängt nicht von der Variablenbelegung ab.
  Beispiel: $P(x, y)$, $\exists x P(x, y)$ vs. $\forall y \exists x P(x, y)$.
- Gegeben eine Formel F mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$:
  Allabschluss: $\forall x_1 \cdots \forall x_n F$ *Existenzabschluss*: $\exists x_1 \cdots \exists x_n F$

Outline

Grundsätzlich . . .

Grundsätzlich . . .

- Übersetzungen sollen möglichst strukturreich sein

Grundsätzlich ...

- Übersetzungen sollen möglichst strukturreich sein
- Übersetzing A' in PL von A in der natürlichen Sprache soll in seiner Strukur A möglichst ähnlich sein.

Atomare Sätze

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm
- F: ... ist eine Metallkonstruktion

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm
- F: ... ist eine Metallkonstruktion
- $F(a)$

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm
- F: ... ist eine Metallkonstruktion
- $F(a)$
- Hans und Karl sind Brüder.

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm
- F: ... ist eine Metallkonstruktion
- $F(a)$
- Hans und Karl sind Brüder.
- Umformung: Hans ist ein Bruder von Karl.

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm
- F: ... ist eine Metallkonstruktion
- $F(a)$
- Hans und Karl sind Brüder.
- Umformung: Hans ist ein Bruder von Karl.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Menschen

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm
- F: ... ist eine Metallkonstruktion
- $F(a)$
- Hans und Karl sind Brüder.
- Umformung: Hans ist ein Bruder von Karl.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Menschen
- a: Hans, b: Karl

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm
- F: ... ist eine Metallkonstruktion
- $F(a)$
- Hans und Karl sind Brüder.
- Umformung: Hans ist ein Bruder von Karl.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Menschen
- a: Hans, b: Karl
- F: ... ist ein Bruder von ...

Atomare Sätze

- Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm
- F: ... ist eine Metallkonstruktion
- $F(a)$
- Hans und Karl sind Brüder.
- Umformung: Hans ist ein Bruder von Karl.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Menschen
- a: Hans, b: Karl
- F: ... ist ein Bruder von ...
- $F(a, b)$

Komplexe Sätze

Komplexe Sätze

- (3) Hans schläft, während Karla Natascha besucht.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Menschen
- a: Hans, b: Karla, c: Natascha
- F(x): ... schläft
- G(x,y): ... besucht ...
- $F(a) \wedge G(b, c)$

Komplexe Sätze

- (3) Hans schläft, während Karla Natascha besucht.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Menschen
- a: Hans, b: Karla, c: Natascha
- F(x): ... schläft
- G(x,y): ... besucht ...
- $F(a) \wedge G(b, c)$
- (4) Entweder Karla ist zuhause oder sie ist bei Hans.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Menschen
- a: Karla
- b: Hans
- F(x): ... ist zuhause
- G(x,y): ... ist bei ...
- $\neg(F(a) \leftrightarrow G(a,b))$

Quantifizierende Sätze (1)

Quantifizierende Sätze (1)

- Alle Lebewesen sind sterblich.

Quantifizierende Sätze (1)

- Alle Lebewesen sind sterblich.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Lebewesen

Quantifizierende Sätze (1)

- Alle Lebewesen sind sterblich.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Lebewesen
- F(x): ... ist sterblich.

Quantifizierende Sätze (1)

- Alle Lebewesen sind sterblich.
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Lebewesen
- F(x): ... ist sterblich.
- $\forall x F(x)$

Quantifizierende Sätze (2)

- (6) $\neg\forall x F(x)$
- (7) $\forall x \neg F(x)$
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Kinder
- F(x): ... ist ein Philosoph

Quantifizierende Sätze (2)

- (6) $\neg\forall x F(x)$
- (7) $\forall x \neg F(x)$
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Kinder
- F(x): ... ist ein Philosoph
- (6) Nicht alle Kinder sind Philosophen.

Quantifizierende Sätze (2)

- (6) $\neg\forall x F(x)$
- (7) $\forall x \neg F(x)$
- $\mathcal{U}$ = Menge aller Kinder
- F(x): ... ist ein Philosoph
- (6) Nicht alle Kinder sind Philosophen.
- (7) Kein Kind ist ein Philosoph.

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...
- ∃xF(x,a)

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...
- ∃xF(x,a) ⇒ keine statthafte Übersetzung, weil alle Individuenkonstanten einem Gegenstand zugeordnet werden müssen, der zum Universum $\mathcal{U}$ gehört! (*a* gehört aber nicht zu $\mathcal{U}$)

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...
- $\exists$xF(x,a) $\Rightarrow$ keine statthafte Übersetzung, weil alle Individuenkonstanten einem Gegenstand zugeordnet werden müssen, der zum Universum $\mathcal{U}$ gehört! (*a* gehört aber nicht zu $\mathcal{U}$)
- stattdessen mit Umformung:

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...
- ∃xF(x,a) ⇒ keine statthafte Übersetzung, weil alle Individuenkonstanten einem Gegenstand zugeordnet werden müssen, der zum Universum $\mathcal{U}$ gehört! (*a* gehört aber nicht zu $\mathcal{U}$)
- stattdessen mit Umformung:
- (8') Einige Zahlen, die gerade sind, sind größer als 17.

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...
- ∃xF(x,a) ⇒ keine statthafte Übersetzung, weil alle Individuenkonstanten einem Gegenstand zugeordnet werden müssen, der zum Universum $\mathcal{U}$ gehört! (*a* gehört aber nicht zu $\mathcal{U}$)
- stattdessen mit Umformung:
- (8') Einige Zahlen, die gerade sind, sind größer als 17.
- $\mathcal{U}$ = Menge der natürlichen Zahlen

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...
- ∃xF(x,a) ⇒ keine statthafte Übersetzung, weil alle Individuenkonstanten einem Gegenstand zugeordnet werden müssen, der zum Universum $\mathcal{U}$ gehört! (*a* gehört aber nicht zu $\mathcal{U}$)
- stattdessen mit Umformung:
- (8') Einige Zahlen, die gerade sind, sind größer als 17.
- $\mathcal{U}$ = Menge der natürlichen Zahlen
- a: 17

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...
- $\exists$xF(x,a) $\Rightarrow$ keine statthafte Übersetzung, weil alle Individuenkonstanten einem Gegenstand zugeordnet werden müssen, der zum Universum $\mathcal{U}$ gehört! (*a* gehört aber nicht zu $\mathcal{U}$)
- stattdessen mit Umformung:
- (8') Einige Zahlen, die gerade sind, sind größer als 17.
- $\mathcal{U}$ = Menge der natürlichen Zahlen
- a: 17
- G(x,y): ... ist größer als ...

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...
- $\exists$xF(x,a) $\Rightarrow$ keine statthafte Übersetzung, weil alle Individuenkonstanten einem Gegenstand zugeordnet werden müssen, der zum Universum $\mathcal{U}$ gehört! (*a* gehört aber nicht zu $\mathcal{U}$)
- stattdessen mit Umformung:
- (8') Einige Zahlen, die gerade sind, sind größer als 17.
- $\mathcal{U}$ = Menge der natürlichen Zahlen
- a: 17
- G(x,y): ... ist größer als ...
- F(x): ... ist eine gerade Zahl

- (8) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- $\mathcal{U}$ = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F(x,y): ... ist größer als ...
- $\exists$xF(x,a) $\Rightarrow$ keine statthafte Übersetzung, weil alle Individuenkonstanten einem Gegenstand zugeordnet werden müssen, der zum Universum $\mathcal{U}$ gehört! (*a* gehört aber nicht zu $\mathcal{U}$)
- stattdessen mit Umformung:
- (8') Einige Zahlen, die gerade sind, sind größer als 17.
- $\mathcal{U}$ = Menge der natürlichen Zahlen
- a: 17
- G(x,y): ... ist größer als ...
- F(x): ... ist eine gerade Zahl
- $\exists$x(F(x) $\wedge$G(x,a))

Outline

Erfüllbarkeit, Modellbegriff

- *Modell* $\mathcal{M}$ einer Formel F:
  Interpretation $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ mit $\iota^{\mathcal{A}}(F) = \mathbf{t}$ für alle Variablenzuweisungen $\mathcal{A}$ (F ist Allabschluss von F)
- *Modell* $\mathcal{M}$ einer *Formelmenge* Δ:
  $\mathcal{M}$ Modell von Δ, falls $\mathcal{M}$ Modell für alle Formeln in Δ
- Formel(menge) Δ *(un)erfüllbar*: es gibt (k)ein Modell für Δ
- Δ *allgemeingültig*: alle Interpretationen für Δ sind Modelle für Δ
- *Logische Folgerungsbeziehung* $\Delta \models F$ (F folgt logisch aus Δ):
  Alle Modelle für Δ sind Modelle für F.
  Hinweis: $\Delta \models F$ genau dann, wenn $\Delta \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar
- $\emptyset \models F$ (kurz $\models F$) bedeutet die Allgemeingültigkeit von F
- $F \equiv F'$ (logisch äquivalent), falls $F \models F'$ and $F' \models F$
- Es gilt für alle Formeln F und alle Variablen x: $F \equiv \forall x F$

Extensionalitätsprinzip

Namen/Bezeichnungen tragen *keine* vorgegebene Bedeutung, z.B.: $\exists x\ STERBLICH(x)$ und $\exists x A(x)$.

Beide Sätze sind von ihrem logischen Gehalt her gleichwertig.
Die Bedeutungen werden *extensional* ermittelt, d.h. über Mengen (genauer: Mengentheoretische Konstrukte über dem Universum U).
Beispiel: Die Eigenschaft 'rot' wird beschrieben durch die *Menge* der roten Dinge.
Zum Unterschied von *extensional* und *intensional* folgendes Beispiel:

Intensional betrachtet bedeuten die Bezeichnungen 'der Morgenstern' und 'der Abendstern' verschiedenes.

Extensional betrachtet sind das aber nur verschiedene Namen für ein- und dasselbe Objekt, nämlich den Planeten Venus.

Variablensubstitutionen

Substitution: Eine Funktion $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{T}$ derart, daß $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ (genannt *Trägermenge* der Substitution) endlich.
($\mathcal{V}$ Menge der Variablen, $\mathcal{T}$ Menge der Terme)
Notation: Für $\sigma(x)$ schreiben wir kurz $x\sigma$.
Angabe einer Substitution durch Trägermenge (mit $t_i = x_i\sigma$):

$$\sigma = \{\langle x_1, t_1\rangle, \dots, \langle x_n, t_n\rangle\}$$

oder kürzer:

$$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$$

Erweiterung der Anwendung einer Substitution σ auf *beliebige Ausdrücke*:

$E\sigma$: Resultat der simultanen Ersetzung jedes freien Vorkommnisses einer Variablen x in E durch $x\sigma$

Eigenschaften von Substitutionen

Eine Substitution σ ist *frei für* einen Ausdruck E, falls für jedes freie Vorkommnis x einer Variablen in E gilt: alle Variablenvorkommnisse in $x\sigma$ sind frei in $E\sigma$.

Sätze: Sei σ frei für einen Ausdruck E.

- Jede Variable kommt gebunden an denselben Positionen in E und $E\sigma$ vor.
- $(E\sigma)\tau = E(\sigma\tau)$
- $\emptyset\sigma = \sigma = \sigma\emptyset$ ($\emptyset$ ist die Substitution mit leerer Trägermenge)
- $(\sigma\tau)\theta = \sigma(\tau\theta)$

Substitutionskorrektheit: $F \models F\sigma$, falls Substitution σ frei für F

Beispiel:

Sei $F := \exists x(P(x, y, z) \wedge \neg P(y, y, z))$; $\sigma = \{y/z\}$; und $\tau = \{y/x\}$.
Dann gilt: $F \models F\sigma$, aber $F \not\models F\tau$.

Wichtige Äquivalenzen in der Prädikatenlogik

$\neg\forall xF \equiv \exists x\neg F$	$\neg\exists xF \equiv \forall x\neg F$
$\forall xF \wedge \forall xG \equiv \forall x(F \wedge G)$	$\exists xF \vee \exists xG \equiv \exists x(F \vee G)$
$\forall x\forall yF \equiv \forall y\forall xF$	$\exists x\exists yF \equiv \exists y\exists xF$

Wegen letzterer Zeile schreiben wir oft ($Q \in \{\forall, \exists\}$)
für: $Qx_1 Qx_2 \cdots Qx_n$
kürzer: $Qx_1 x_2 \cdots x_n$

Wichtige Äquivalenzen in der Prädikatenlogik

Falls x nicht frei in G vorkommt:

$\forall xF \wedge G \equiv \forall x(F \wedge G)$	$\forall xF \vee G \equiv \forall x(F \vee G)$
$\exists xF \wedge G \equiv \exists x(F \wedge G)$	$\exists xF \vee G \equiv \exists x(F \vee G)$

Wichtige Äquivalenzen in der Prädikatenlogik

Falls y nicht frei in F vorkommt:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \forall xF & \equiv & \forall yF\{x/y\} \\ \exists xF & \equiv & \exists yF\{x/y\} \end{array}}$$

Normalform

- Problem: Quantoren und Variablen
- Deshalb stellen wir zur Erzeugung einer Normalform in der Prädikatenlogik einige Schritte voran
- 1. Schritt: *Bereinigung*. Eine Formel F heißt *bereinigt*, falls in F keine Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommt und keine Variable mehr als einmal unmittelbar hinter einem Quantor steht.
- Beispiel: $F = \forall x \exists y P(x, f(y)) \wedge \forall y (Q(x, y) \vee R(x))$
  ergibt bereinigt: $F' = \forall u \exists y P(u, f(y)) \wedge \forall z (Q(x, z) \vee R(x))$
- 2. Schritt: Allabschluss der Formel:
  $F'' = \forall x \forall u \exists y P(u, f(y)) \wedge \forall z (Q(x, z) \vee R(x))$

Normalformen: Pränexform

3. Schritt: Schieben der Quantoren nach außen

- Eine Formel F' heißt *pränex* oder *in Pränexform* oder *Pränexformel*, falls sie die Form

$$F' := Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n F$$

  hat, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und $x_1, \ldots, x_n$ die in F vorkommenden Variablen sind (F' ist also geschlossen) und F frei von Quantoren ist.
- In F' heisst F die *Matrix* der Formel, $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n$ das *Präfix* der Formel.

Transformation einer Formel in Pränexform

- Wiederholte Anwendung der aufgeführten Äquivalenzen (im worst-case exponentiell):
- Zunächst Elimination der Junktoren $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$ mittels:
  $(F \leftrightarrow G) \equiv ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$ und $(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$
- Dann Anwendung von $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$ und $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$
  bzw.
  $(QxF \circ G) \equiv Qy(F[x/y] \circ G)$ und
  $(G \circ QxF) \equiv Qy(G \circ F[x/y])$
  für $\circ \in \{\vee, \wedge\}$ wobei y neu in F und G
  (Umbenennung unnötig falls Formel bereinigt)

Skolemform

Eine prädikatenlogische Formel Φ heißt *Skolemformel* oder in *Skolem-Form*, falls Φ eine Pränexformel der Struktur $\forall x_1 \cdots \forall x_n F$ ist ($n \geq 0$), wobei F quantorenfrei ist.
Wie können die Existenzquantoren beseitigt werden bei Beibehaltung der Pränexform und welche Eigenschaften können dabei erhalten werden?

- Beispiel: Man betrachte die Formel $\forall x \exists y S(x,y)$.
  y kann hier nicht frei gewählt werden, es hängt von der vorherigen Wahl des x ab.
- Es besteht also eine funktionale Abhängigkeit zwischen x und y
- Diese funktionale Abhängigkeit kann in der Prädikatenlogik durch *Skolemfunktionen* ausgedrückt werden.

Die Skolemisierung

Skolemisierung einer Formel F in bereinigter Pränexform:

Solange F einen Existenzquantor enthält, wiederhole den folgenden Schritt:

1. F habe die Form $\forall x_1 \cdots x_n \exists y G$, wobei G in Pränexform und $n \geq 0$.
2. Sei f_{sko} ein bisher nicht in F vorkommendes n-stelliges Funktionssymbol.
3. Bilde $F' = \forall x_1 \cdots \forall x_n G\{y/f_{\text{sko}}(x_1, \ldots, x_n)\}$

Die Skolemisierung ist i.A. keine Äquivalenztransformation, aber sie erhält die Unerfüllbarkeit und die Erfüllbarkeit (die Menge der Modelle kann evtl. schrumpfen, es bleibt aber auf jeden Fall eines erhalten, falls die Eingabeformel erfüllbar war).

Die Skolemisierung: Beispiel

Die Formel $\forall x \exists y \forall z \exists w (\neg P(a, w) \vee Q(f(x), y))$
kann skolemiziert werden zu:
$\forall x \forall z (\neg P(a, f_{\text{sko}_2}(x, z)) \vee Q(f(x), f_{\text{sko}_1}(x)))$

Die Klauselnormalform

- Die Matrix einer Skolemformel kann in Klauselform transformiert werden, d.h. in eine Konjunktion von m Disjunktionen von n_i Literalen
- Diese Darstellung nennen wir *Klauselnormalform*
- Skolemformel in Klauselform kann als eine Menge von Mengen von Literalen angegeben werden.
- Da alle Variablen allquantifiziert sind, können wir das Quantorenpräfix weglassen
- Beispiel:
  $\forall xy((\neg P(x, f(y)) \vee R(y, f(x))) \wedge (P(x, g(x)) \vee R(x, f(x))))$
  wird zu
  $\{\{\neg P(x, f(y)), R(y, f(x))\}, \{Q(x, g(x)), R(x, f(x))\}\}$

Soundness, completeness, decidability

- A logical system has the soundness property if and only if every formula that can be proved in the system is logically valid with respect to the semantics of the system.
- "proof in the system": next lecture
- First order logic is sound.
- A formal system is called complete with respect to logic validity if every logically valid formula can be (syntactically) derived using that system.
- First order logic is complete.
- "decidable":
  a correct algorithm exists that always returns true or false
- That is: doesn't loop indefinitely, doesn't crash, doesn't return "don't know" or wrong answer
- First order logic is semi-decidable.

Die Vollständigkeit der Prädikatenlogik 1. Stufe

Im Unterschied zur Aussagenlogik gibt es für die Prädikatenlogik erster Stufe keine Entscheidungsverfahren für den logischen Status einer Formelmenge, sondern lediglich *Semi-Entscheidungsverfahren*. Genauer: Es gibt effektive Methoden, die logische Gültigkeit einer Formel bzw. die Unerfüllbarkeit einer Formel(menge) zu verifizieren.
Wir werden Semi-Entscheidungsverfahren für die *Unerfüllbarkeit* von Formelmengen betrachten.
Die Existenz solcher Verfahren ist auf die *Kompaktheit* der Prädikatenlogik zurückzuführen, d.h. auf folgenden
Satz: Jede unerfüllbare Menge von Skolemformeln (prädikatenlogischen Formeln) hat eine endliche unerfüllbare Teilmenge.

Terminologie

Formel (kann freie Variablen enthalten) = Satzfunktion
atomare vs. komplexe Formeln
Formel ohne freie Variablen = geschlossene Formel = Satz

Outline

MOSSBERG · APPLE · TECH

Mossberg: Why does Siri seem so dumb?

And if it doesn't get smarter soon, what does it mean for Apple?

By Walt Mossberg | @waltmossberg | Oct 12, 2016, 9:00am EDT

In recent weeks, on multiple Apple devices, Siri has been unable to tell me the names of the major party candidates for president and vice president of the United States. Or when they were debating. Or when the Emmy awards show was due to be on. Or the date of the World Series. When I asked it "What is the weather on Crete?" it gave me the weather for Crete, Illinois, a small village which — while I'm sure it's great — isn't what most people mean when they ask for the weather on Crete, the famous Greek island.

Example

My brother John is married to a star.
x = "star"

{married(john,x)
$\wedge$ (celebrity(x) $\vee$ celestial_object(x))
$\wedge$ $\forall x \forall y$ [married(x,y) $\rightarrow$ (human(x) $\wedge$ human(y))]
$\wedge$ $\forall$ x (celestial_object(x) $\rightarrow$ $\neg$ human(x))}
$\rightarrow$ celebrity(x)

Assignment

My brother John is married to a star.
x = "star"

married(john,x)
∧ celebrity(x) or celestial_object(x)
∧ ∀ x,y married(x,y) → human(x) and human(y)
∧ ∀ x celestial_object(x) → ¬ human(x)
→ celebrity(x)

"When I asked it 'What is the weather on Crete?' it gave me the weather for Crete, Illinois, a small village . . . [not for] Crete, the famous Greek island."

Write down formal argument the last line of which is:
"→ greek_island(Crete)"

Outline

(from one of Francis Bond's lectures)

Professors talk to much.
$\wedge$ You talk too much.
$\rightarrow$ You are a professor.

Professors talk to much.
$\wedge$ You talk too much.
$\rightarrow$ You are a professor.

Affirming the consequent

Professors talk to much.

$\wedge$ You talk too much.

$\rightarrow$ You are a professor.

The sign on Main Street said "Fine for Parking".
$\wedge$ It was fine by me.
$\rightarrow$ I parked on Main Street.

The sign on Main Street said "Fine for Parking".
$\wedge$ It was fine by me.
$\rightarrow$ I parked on Main Street.

Equivocation

The sign on Main Street said "Fine for Parking".
$\wedge$ It was fine by me.
$\rightarrow$ I parked on Main Street.

No Scotsman puts sugar on his porridge.
$\wedge$ Angus is a Scotsman and puts sugar on his porridge.
$\rightarrow$ Angus is not a true Scotsman.

No Scotsman puts sugar on his porridge.
$\wedge$ Angus is a Scotsman and puts sugar on his porridge.
$\rightarrow$ Angus is not a true Scotsman.

No True Scotsman

No Scotsman puts sugar on his porridge.
$\wedge$ Angus is a Scotsman and puts sugar on his porridge.
$\rightarrow$ Angus is not a true Scotsman.

If we allow text abbreviations, students won't learn to write well.
$\wedge$ Students must learn to write well.
$\rightarrow$ We cannot allow text abbreviations.

Slippery Slope

If we allow text abbreviations, students won't learn to write well.
$\wedge$ Students must learn to write well.
$\rightarrow$ We cannot allow text abbreviations.

You are with us or you are against us.
$\wedge$ What you just said indicates you are not with us.
$\rightarrow$ You are against us.

False Dilemma

You are with us or you are against us.
$\wedge$ What you just said indicates you are not with us.
$\rightarrow$ You are against us.

Hitler was a vegetarian
$\wedge$ Hitler was bad.
$\rightarrow$ Vegetarians are bad.

Guilt by Association

Hitler was a vegetarian
$\wedge$ Hitler was bad.
$\rightarrow$ Vegetarians are bad.

Outline

Limitations of first-order logic

- Cannot formalize natural numbers, real line
- No decision procedure for logical consequence (semi-decidable)
- Modality, time, probability
- Predicates having predicates
- Functions having functions as arguments
- Quantification over predicates
- Quantification over functions
- Logic does not capture a big part of human reasoning, e.g., "He grew up in England, so yes, he speaks English."

Strengths of first-order logic

- Can help us think logically
  (see Francis Bond's bad arguments)
- Complete and sound
- Some real-world applications,
  e.g., verification of security protocols
  and tools for supporting proofs in mathematics
- (Weaker logics (OWL Lite/DL, semantic web) are a different story.)
- We don't know what the future holds!

Takeaway

Reasoning is critical for much of natural language understanding (NLU), but at this point there exists no efficient and effective reasoning formalism that is powerful enough for NLU.

THE AUSTRALIAN LOG IN SUBSCRIBE plus

NEWS OPINION BUSINESS REVIEW NATIONAL AFFAIRS SPORT LIFE TECH ARTS TRA

Monsanto's RoundUp has no link to cancer, study finds

stephen NOV 9, 2017

It is a great pity that the article does not make the point that the IARC classification “Probably Carcinogenic to Humans” places Roundup (glyphosate) in a select group along with red meat and emissions from fried food; slightly worse that coffee, petrol and gherkins (“Possibly Carcinogenic to Humans”), but not as bad as beer, wine or salami which are in IARC’s most high risk classification of “Carcinogenic to Humans” .

Translate into FOL

It is a great pity that the article does not make the point that the IARC classification "Probably Carcinogenic to Humans" places Roundup (glyphosate) in a select group along with red meat and emissions from fried food; slightly worse tha[n] coffee, petrol and gherkins ("Possibly Carcinogenic to Humans"), but not as bad as beer, wine or salami which are in IARC's most high risk classification of "Carcinogenic to Humans".