Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Eigenschaften von Relationen

Florian Fink

Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung (CIS)

2. Juni 2014

Table of Contents

1 Eigenschaften von Relationen
- Reflexivität
- Transitivität
- Symmetrie
- Antisymmetrie
- Irreflexivität
- Implikationen
- Euklidische Relationen
- Weitere Eigenschaften

2 Zusammenfassung

Eigenschaften von Relationen

Ähnlich wie Funktionen besitzen Relationen charakteristische Eigenschaften. Diese Eigenschaften definieren wie einzelne Elemente der Relationen in Beziehung zueinander stehen. Die wichtigsten fünf charakteristischen Eigenschaften von zweistelligen Relationen sind:

- Reflexivität
- Transitivität
- Symmetrie
- Antisymmetrie
- Irreflexivität

Antisymmetrie und Irreflexivität

Antisymmetrie und Symmetrie sind zwei *unterschiedliche* Eigenschaften von zweistelligen Relationen. Es gilt nicht, dass eine nicht-symmetrische Relation automatisch antisymmetrisch ist und umgekehrt.
Das selbe gilt für die Reflexivität und die Irreflexivität. Eine irreflexive Relation stellt nicht eine Relation dar die nicht reflexiv ist.

Definition der Eigenschaften

Definition (charakteristische Eigenschaften von Relationen)

Sei $R \subseteq A \times A$ eine zweistellige Relation.

(a) R heißt *reflexiv* genau dann, wenn gilt:
$\forall a \in A : R(a, a)$.

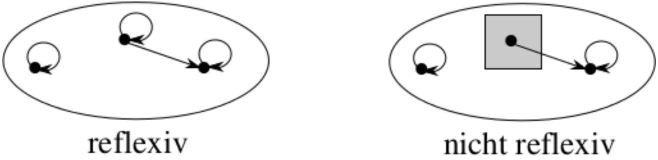
(b) R heißt *transitiv* genau dann, wenn gilt:
$\forall a, b, c \in A : ((R(a, b) \wedge R(b, c)) \Rightarrow R(a, c))$.

(c) R heißt *symmetrisch* genau dann, wenn gilt:
$\forall a, b \in A : (R(a, b) \Rightarrow R(b, a))$.

(d) R heißt *antisymmetrisch* genau dann, wenn gilt:
$\forall a, b \in A : ((R(a, b) \wedge R(b, a)) \Rightarrow a = b)$.

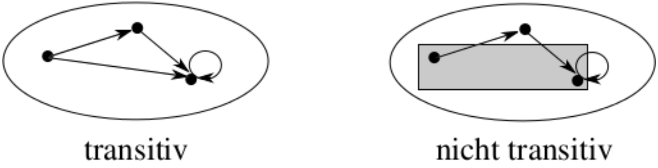
(e) R heißt *irreflexiv* genau dann, wenn gilt:
$\forall a \in A : \neg R(a, a)$.

Reflexivität



Alle Elemente einer reflexiven Relation stehen immer mit sich selbst in Beziehung. Es gilt für alle Elemente: $R(a, a)$. Beispiel für (nicht ausschließlich) reflexive Relationen sind z.B. die $\leq$ und $\geq$ Relationen, bei denen alle Elemente stets mit sich selbst in Beziehung stehen.
Die Abbildung zeigt ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für reflexive Relationen.

Transitivität

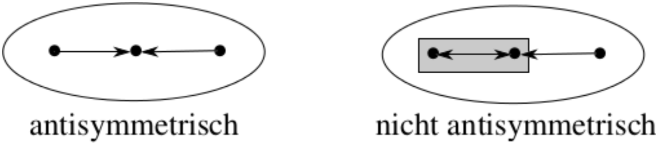


Die Elemente einer transitiven Relation stehen immer in einer Dreiecksbeziehung zueinander. Aus $R(a,b)$ und $R(b,c)$ folgt stets $R(a,c)$. Ein Beispiel für eine transitive Relation ist z.B. die $<$ Relation. Es gilt immer: $(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$.
Die Abbildung zeigt ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für transitive Relationen.

Symmetrie

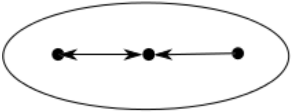
Zwei Elemente einer symmetrischen Relation stehen immer wechselweise in Beziehung zueinander. Es gilt dass falls $R(a, b)$ gilt, muss immer auch $R(b, a)$ gelten.
Die Abbildung zeigt ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für symmetrische Relationen.

Antisymmetrie

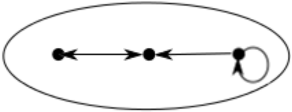


Zwei Elemente einer antisymmetrischen Relation stehen niemals wechselweise in Beziehung zueinander, es sei denn es handelt sich um die gleichen Elemente. Die Relation $<$ ist z.B. antisymmetrisch. Es gilt niemals $a < b \wedge b < a$. Es gilt für alle *unterschiedlichen* Elemente *niemals* $R(a, b) \wedge R(b, a)$.
Die Abbildung zeigt ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für antisymmetrische Relationen.

Irreflexivität



irreflexiv

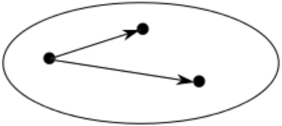


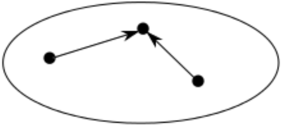
nicht irreflexiv

Alle Elemente einer irreflexiven Relation stehen niemals mit sich selbst in Beziehung. Es gilt für alle Elemente *niemals* $R(a, a)$. Beisiele für irreflexive Relationen sind z.B. die Relationen $<$ und $>$. Die Abbildung zeigt ein Beispiel und ein Gegenbeispiel für antisymmetrische Relationen.

Implikationen der Eigenschaften

Alle Bedingungen, die Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie charakterisieren, beinhalten jeweils spezielle Implikationen, die für beliebige Elemente der Menge A gelten müssen.
Da die Implikation stets wahr ist, falls schon die Prämisse falsch ist, sind folgende beiden Relationen transitiv.





Was für weitere Eigenschaften haben die beiden Relationen?

Spezielle Relationen

Lemma

Die *leere Relation* $R_\emptyset = \emptyset$ ist immer transitiv, symmetrisch und antisymmetrisch.
Die *Identitätsrelation* Id_A auf einer Menge A ist immer reflexiv, transitiv, symmetrisch und antisymmetrisch.

Euklidische Relationen

Der Vollständigkeit halber seien hier noch zwei weitere Eigenschaften zweistelliger Relationen erwähnt.

Definiton (euklidische Relation)

Eine zweistellige Relation $R \subseteq A \times A$ heißt *euklidisch* genau dann, wenn gilt:

$$\forall a, b, c \in A : ((R(a, b) \wedge R(a, c)) \Rightarrow R(b, c))$$

R heißt *anti-euklidisch* genau dann, wenn gilt:

$$\forall a, b, c \in A : ((R(a, b) \wedge R(c, b)) \Rightarrow R(a, c))$$

Reflexivität, *Symmetrie* und *Transitivität* können auch mit Hilfe der Identitätsrelation, der Umkehrrelation und der Komposition wie folgt definiert werden.

Lemma

Es sei R eine zweistellige Relation auf der Menge A. Dann gilt:

(a) R ist reflexiv genau dann, wenn $\mathrm{Id}_A \subseteq R$ gilt.

(b) R ist symmetrisch genau dann, wenn $R^{-1} \subseteq R$ gilt.

(c) R ist transitiv genau dann, wenn $R \circ R \subseteq R$ gilt.

(d) R ist antisymmetrisch genau dann, wenn $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{Id}_A$.

Matrixdarstellungen

In der Matrixdarstellung sind all jene Relationen reflexiv, deren Diagonale überall mit einer 1 besetzt ist. Irreflexive Relationen dagegen haben in ihrer Matrixdarstellung immer eine 0 stehen. Die Matrix von symmetrischen Relationen ist stets spiegelsymmetrisch zur Diagonalen.

R	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	1

S	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	1
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0

Abgeschlossenheit

Reflexive, symmetrische und transitive Relationen sind abgeschlossen über der Durchschnittsbildung.

Lemma (Abgeschlossenheit)

Es sei $R = \{R_i \subseteq A \times A | i \in I\}$ eine nichtleere Menge zweistelliger Relationen auf der selben Menge A.

(a) Sind alle Relationen $R_i (i \in I)$ reflexiv, so ist auch $\bigcap_{i \in I} R_i$ reflexiv.

(b) Sind alle Relationen $R_i (i \in I)$ symmetrisch, so ist auch $\bigcap_{i \in I} R_i$ symmetrisch.

(c) Sind alle Relationen $R_i (i \in I)$ transitiv, so ist auch $\bigcap_{i \in I} R_i$ transitiv.

Table of Contents

1. Eigenschaften von Relationen
   - Reflexivität
   - Transitivität
   - Symmetrie
   - Antisymmetrie
   - Irreflexivität
   - Implikationen
   - Euklidische Relationen
   - Weitere Eigenschaften
2. Zusammenfassung

tl;dr

- Bei reflexiven Relationen stehen alle Elemente mit sich selbst in Beziehung.
- Die Elemente transitiver Relationen bilden stets eine Dreiecksbeziehung $R(a, b), R(b, c), R(a, c)$.
- Die Elemente symmetrischer Relationen stehen immer in einer wechselseitigen Beziehung $R(a, b), R(b, a)$.
- Die Elemente antisymmetrischer Relationen stehen *niemals* in einer wechselseitigen Beziehung zueinander.
- Bei irreflexiven Relationen stehen Elemente *niemals* in Beziehung zu sich selbst.
- Reflexive, transitive und symmetrische Relationen sind abgeschlossen über der Durschnittsbildung.