Logik und modelltheoretische Semantik

Zur 3. Übung – Prädikatenlogik: Beispiele für quantifizierende Sätze

Robert Zangenfeind

Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung, LMU München

2.5.2024

- (1) Alle Lebewesen sind sterblich.
- D = Menge aller Lebewesen
- F^1: ... ist sterblich.
- $\forall x F^1 x$

- Was bedeuten die folgenden beiden Sätze der PL:
- (2) $\neg \forall x F^1 x$
- (3) $\forall x \neg F^1 x$
- D = Menge aller Kinder
- F^1: ... ist ein Philosoph
- -> (2) Nicht alle Kinder sind Philosophen.
- -> (3) Kein Kind ist ein Philosoph.

- (4) Einige gerade Zahlen sind größer als 17.
- Achtung! nicht übersetzbar mit:
- D = Menge der geraden Zahlen
- a: 17
- F^2: ... ist größer als ...
- $\exists x F^2 xa$ -> keine statthafte Übersetzung, weil alle Individuenkonstanten einem Gegenstand zugeordnet werden müssen, der zum Bereich *D* gehört! (*a* gehört aber nicht zu *D*)
- stattdessen mit Umformung:
- (4') Einige Zahlen, die gerade sind, sind größer als 17.
- D = Menge der ganzen Zahlen
- a: 17
- F^2: ... ist größer als ...
- G^1: ... ist eine gerade Zahl
- $\exists x(G^1 x \wedge F^2 xa)$

- (5) Einige gerade natürliche Zahlen sind nicht durch 3 teilbar.
- Umformung: (5') Es gibt (mindestens) eine natürliche Zahl, die gerade ist und die nicht durch 3 teilbar ist.
- D = Menge der natürlichen Zahlen
- a: 3
- F^1: ... ist eine gerade Zahl
- G^2: ... ist durch ... teilbar
- $\exists x(F^1x \wedge \neg G^2xa)$
- alternative Entsprechung: (5'') Nicht alle geraden natürlichen Zahlen sind durch 3 teilbar.
- $\neg\forall x(F^1x \rightarrow G^2xa)$

- mehrere Quantoren:
- (6) Sind zwei Dinge einem dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich. [Euklid]
- D = Menge aller Dinge
- F^2: ... ist gleich ...
- $\forall x \forall y \forall z((F^2xz \wedge F^2yz) \rightarrow F^2xy)$

- (7) Jemand liebt alle Hunde. bzw.: (7') Es gibt einen Menschen, der alle Hunde liebt.
- D = Menge aller Lebewesen
- F^1: ... ist ein Mensch
- G^1: ... ist ein Hund
- F^2: ... liebt ...
- $\exists x(F^1x \wedge \forall y(G^1y \rightarrow F^2xy))$
- vgl. dagegen:
- (8) $\forall y(G^1y \rightarrow \exists x(F^1x \wedge F^2xy))$
- Interpretation wie oben
- -> Jeder Hund wird von einem Menschen (= jemandem) geliebt.

Literatur

- A. Beckermann: Einführung in die Logik. Berlin 2003.