Logik und modelltheoretische Semantik

Prädikatenlogik (PL)

Robert Zangenfeind

Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung, LMU München

30.4.2024

Einführendes zur PL (First Order Logic)

- baut auf Aussagenlogik auf
- wesentlich detaillierter als AL
  - innere Struktur von Sätzen erkennbar
  - enthält Ausdrücke, die Namen und Prädikaten (0-, 1-, n-stellig) der natürlichen Sprache entsprechen
  - Quantifizierung ist möglich
- ebenfalls nur Aussagesätze

Prädikatenlogik: Motivation

- Aussagenlogik ist oft nicht ausreichend zur Formalisierung von Problemen der natürlichen Sprache oder von mathematischen bzw. logischen Problemen
- Sprache der Prädikatenlogik ist deutlicher mächtiger:
  - kann Objekte einer 'Welt' beschreiben
  - kann deren Eigenschaften und ihre Beziehungen untereinander beschreiben

Syntax der PL (1)

- Individuenkonstanten (*a, b, c,* etc.): stehen für Eigennamen aus den natürlichen Sprachen wie z.B. 'Paris', 'Bodensee', 'Quentin Tarantino', ...
- Individuenvariablen (*x, y, z, ...*)
- Prädikatbuchstaben (hier mit Angabe der Stelligkeit, vgl. Beckermann: F^1, G^1, H^2, F^3, etc.): stehen für Prädikate aus den natürlichen Sprachen wie z.B. '... läuft', '... ist groß', '... ist ein Bruder von ...', '... befindet sich zwischen ... und ...'
- Satzoperatoren (wie in AL): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- quantifizierende Ausdrücke:
  - Alloperator ('alle ...') $\forall$
  - Existenzoperator ('es gibt mindestens ein ...') $\exists$
- Hilfszeichen: ( )

Syntax der PL (2)

- (i) Atomare Sätze:
  Prädikatbuchstabe + Individuenkonstante(n) z.B. (vgl. Beckermann): $\mathrm{F}^1\mathrm{a}$, $\mathrm{G}^1\mathrm{b}$, $\mathrm{H}^2\mathrm{ab}$, $\mathrm{F}^3\mathrm{aeh}$; ansonsten übliche Standardschreibweise: F(a), G(b), H(a,b), F(a,e,h)
- (ii) Komplexe Sätze:
  atomare Sätze + Satzoperator(en) z.B.: $\neg \mathrm{F}^1\mathrm{a}$, $(\mathrm{G}^1\mathrm{b} \wedge \mathrm{H}^2\mathrm{ab})$
- (iii) Quantifizierende Sätze:
- dazu ist eine Satzfunktion nötig: Ausdruck, bei dem statt Individuenkonstanten (*a, b, c, ...*) mindestens eine Individuenvariable (*x, y, z, ...*) steht, z.B. $\mathrm{F}^1\mathrm{x}$, $\mathrm{F}^2\mathrm{xb}$
- aus einer Satzfunktion wird ein Satz, wenn (i) Variable wiederum durch Konstante ersetzt wird oder (ii) ein Quantor (mit Variable) vor die Satzfunktion geschrieben wird
- Bsp. quantifizierender Satz: $\forall \mathrm{x} \mathrm{F}^1\mathrm{x}$

Terminologie und eine Definition

- Namen und Prädikate: deskriptive Ausdrücke
- Satzoperatoren und quantifizierende Ausdrücke: logische Ausdrücke
- Individuenkonstanten und Individuenvariablen: Terme
- Formeln von PL (nach Carstensen et al. 2010:46f.):
  - wenn $t_1, ..., t_n$ Terme sind und P ein n-stelliges Prädikat ist, so ist $P(t_1, ..., t_n)$ eine Formel
  - ist φ eine Formel, so ist auch $\neg\ \varphi$ eine Formel
  - sind φ und ψ Formeln, so sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Formeln
  - Ist φ eine Formel und x eine Variable, so sind auch $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ Formeln

Skopus (Bereich) eines Quantors

- Bereich eines Quantors (z.B. $\forall$x) ist die Satzfunktion, die unmittelbar auf den Quantor folgt, z.B.:
- $\forall x \exists y F^2 xy$
  ->
- Skopus des Quantors '$\forall$x' ist '$\exists y F^2 xy$'
- Skopus des Quantors '$\exists$y' ist '$F^2 xy$'
- Das Vorkommnis einer Variable x in einer Satzfunktion heißt gebunden, wenn dieses Vorkommnis in einem Quantor oder im Skopus eines Quantors mit derselben Variablen liegt – sonst heißt es frei.

Semantik der PL (1)

- Die Interpretation *I* legt (i) die Bedeutung der deskriptiven Ausdrücke von PL fest und gibt (ii) durch Angabe einer nicht leeren Menge *D* (bzw. Universum $\mathcal{U}$) den Bereich an, auf den sich die Quantoren beziehen.
- 1. Bereich einer Interpretation kann z.B. die Menge aller Menschen sein oder die Menge der Städte Berlin und München, also z.B.: D = Menge aller Menschen bzw. D = {Berlin, München}
- 2. Bedeutung der Individuenkonstanten wird dadurch bestimmt, dass *I* jeder Individuenkonstanten von PL einen Gegenstand aus *D* zuordnet; *I* kann z.B. der Individuenkonstanten *a* Sokrates zuordnen, also: a: Sokrates (bzw. ι(a) = Sokrates)

Semantik der PL (2)

- 3. Bedeutung der Prädikatbuchstaben wird dadurch festgelegt, dass *I* jedem Prädikatbuchstaben ein Prädikat zuordnet, d.h. (i) Eigenschaft der Gegenstände von *D* oder (ii) Beziehung zwischen den Gegenständen von *D*; z.B.:
  F^1: ... ist ein Philosoph
  F^2: ... ist berühmter als ...
- Der Satz F^1a ist bezüglich seiner Interpretation *I* wahr, wenn der durch a bezeichnete Gegenstand die Eigenschaft F^1 hat.

Ein wichtiges prädikatenlogisches Gesetz zum Zusammenspiel von Negation und Quantoren

- $\neg\forall x F^1 x = \exists x \neg F^1 x$
  bzw.
- $\forall x F^1 x = \neg\exists x \neg F^1 x$

- $\neg\exists x F^1 x = \forall x \neg F^1 x$
  bzw.
- $\exists x F^1 x = \neg\forall x \neg F^1 x$

-$>$ Existenzoperator kann durch den Alloperator definiert werden.

Weitere wichtige prädikatenlogische Gesetze (Äquivalenzen)

- Vereinfachung bei identischen Quantoren:
- $\forall x \forall x F^1 x = \forall x F^1 x$

- Kommutation gleichartiger Quantoren:
- $\forall x \forall y F^2 xy = \forall y \forall x F^2 xy$
- $\exists x \exists y F^2 xy = \exists y \exists x F^2 xy$

- Distribution von Quantoren über Junktoren:
- $\forall x F^1 x \wedge \forall x G^1 x = \forall x (F^1 x \wedge G^1 x)$
- $\exists x F^1 x \vee \exists x G^1 x = \exists x (F^1 x \vee G^1 x)$

Beispiele für atomare Sätze

- Übersetzungen sollen möglichst strukturreich sein
- Satz A' (PL) soll in seiner Struktur dem natürlichsprachigen Satz A möglichst ähnlich sein

- (1) Der Eiffelturm ist eine Metallkonstruktion.
- D = Menge aller Bauwerke
- a: Eiffelturm
- F^1: ... ist eine Metallkonstruktion
- F^1a

- (2) Hans und Karl sind Brüder.
- Umformung: (2') Hans ist ein Bruder von Karl.
- D = Menge aller Menschen
- a: Hans, b: Karl
- F^2: ... ist ein Bruder von ...
- F^2ab

Beispiele für komplexe Sätze

- (3) Hans schläft, während Karla Natascha besucht.
- D = Menge aller Menschen
- a: Hans
- b: Karla
- c: Natascha
- F^1: ... schläft
- G^2: ... besucht ...
- $F^1a \wedge G^2bc$

- (4) Karla ist zuhause oder bei Hans
- D = Menge aller Menschen
- a: Karla
- b: Hans
- F^1: ... ist zuhause
- G^2: ... ist bei ...
- $\neg(F^1a \leftrightarrow G^2ab)$

Literatur

- A. Beckermann: Einführung in die Logik. Berlin 2003.
- K.-U. Carstensen et al.: Computerlinguistik und Sprachtechnologie. Eine Einführung. Heidelberg 2010.