Logik und modelltheoretische Semantik

Aussagenlogik (AL)

Robert Zangenfeind

Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung, LMU München

23.4.2024

Sprache der AL

- Anforderungen an logische Sprachen:
- (i) logische Form der Sätze entspricht genau der grammatischen Form
- (ii) verwendete logische Ausdrücke haben jeweils nur eine klar definierte Bedeutung
- -> AL ist sehr viel ärmer als natürliche Sprachen
- Vokabular:
- (i) Ausdrücke, die ganzen (einfachen) Sätzen entsprechen (Satzbuchstaben)
- (ii) Satzoperatoren
- daraus: neue (komplexe bzw. negierte) Sätze

Ein paar grundlegende Aspekte von Sprache

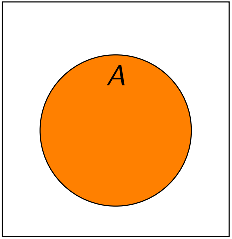
- Syntax:
  - (i) Welche Grundausdrücke enthält die Sprache?
  - (ii) Wie erzeugt man daraus komplexe Ausdrücke und Sätze?
- Semantik:
  - (i) Was bedeuten die Grundausdrücke?
  - (ii) Wie ergeben sich daraus die Bedeutungen der komplexen Ausdrücke und die Wahrheitsbedingungen der Sätze?
- Unterscheidung Gebrauch (Wörter, mit denen man über etwas spricht) – Erwähnung (Wörter, über die man spricht)
  (1) Karl ist ein kluger Junge. – (2) ‘Karl’ ist ein guter Name.
- Unterscheidung Metasprache (Sprache, in der gesprochen bzw. etwas beschrieben wird) – Objektsprache (Sprache, über die bzw. über deren Ausdrücke gesprochen wird)
  z.B. auf Deutsch über die Aussagenlogik sprechen
  -> Metasprache: Deutsch – Objektsprache: Aussagenlogik

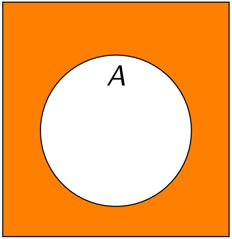
Die Syntax von AL

- Satzbuchstaben: Ausdrücke, die ganzen Sätzen entsprechen, z.B. p, q, r, A, B, C, ... (deskriptive Zeichen von AL)
- 5 Satzoperatoren (Junktoren, logische Zeichen von AL):
  - Negation (nicht) $\neg$
  - Konjunktion (und) $\wedge$
  - Adjunktion (nicht ausschließendes oder) $\vee$
  - Subjunktion / Implikation (wenn, dann) $\rightarrow$
  - Bisubjunktion / Äquivalenz (genau dann, wenn) $\leftrightarrow$
- Hilfszeichen: ( )
- bisweilen verwendete Konvention: '$\wedge$' und '$\vee$' binden stärker als '$\rightarrow$' und '$\leftrightarrow$'
- A ist Satz von AL, wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist:
- (i) A ist ein Satzbuchstabe
- (ii) B und C sind Sätze von AL und A ist: $\neg$B, (B $\wedge$ C), (B $\vee$ C), (B $\rightarrow$ C) oder (B $\leftrightarrow$ C)

Die Semantik von AL: Wahrheitswerttabelle Negation

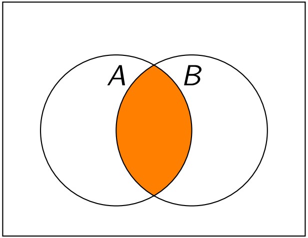
A	$\neg A$
w	f
f	w





Die Semantik von AL: Wahrheitswerttabelle Konjunktion

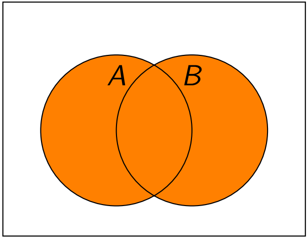
A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f



- Eine Konjunktion ist wahr, wenn beide Konjunktionsglieder wahr sind; in den anderen Fällen ist sie falsch.

Die Semantik von AL: Wahrheitswerttabelle Adjunktion

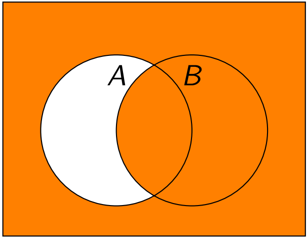
A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f



- Eine Adjunktion ist falsch, wenn beide Adjunktionsglieder falsch sind; in den anderen Fällen ist sie wahr.

Die Semantik von AL: Wahrheitswerttabelle Subjunktion

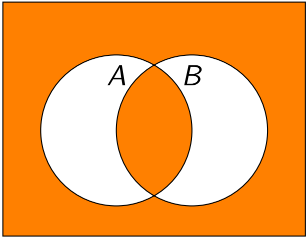
A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w



- Eine Subjunktion (Implikation) ist falsch, wenn das Vorderglied wahr und das Hinterglied falsch ist; in den anderen Fällen ist sie wahr.
- insbesondere auch:
  ex falso (sequitur) quodlibet ('Aus Falschem folgt Beliebiges')

Die Semantik von AL: Wahrheitswerttabelle Bisubjunktion

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w



- Eine Bisubjunktion (Äquivalenz, Biimplikation) ist wahr, wenn beide Teilsätze den gleichen Wahrheitswert haben; in den anderen Fällen ist sie falsch.

Zum Verstehen von Sätzen

Einen Satz verstehen, heißt, wissen was der Fall ist, wenn er wahr ist. (Wittgenstein)

Einige Äquivalenzbeziehungen (1)

- $A = \neg\neg A$

- $A \wedge A = A$ (Idempotenz der Konjunktion)
- $A \wedge B = B \wedge A$ (Kommutativität)
- $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ (Assoziativität)
- $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ (1. Gesetz von De Morgan)

- $A \vee A = A$ (Idempotenz der Adjunktion)
- $A \vee B = B \vee A$ (Kommutativität)
- $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ (Assoziativität)
- $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ (2. Gesetz von De Morgan)

Einige Äquivalenzbeziehungen (2)

- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (1. Distributivgesetz)
- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (2. Distributivgesetz)

- $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$ (Kontraposition)

- $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$ (Kommutativität)
- $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ (Assoziativität)
- $A \leftrightarrow B = \neg A \leftrightarrow \neg B$
- $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

- $A \rightarrow B = \neg\, (A \wedge \neg\, B)$
- $A \rightarrow B = \neg\, A \vee B$

Rückschlüsse aus den logischen Eigenschaften der einen Sprache auf die andere

- Voraussetzung: adäquate Übersetzung, d.h. Satz A' hat dieselbe Wahrheitsbedingung wie Satz A
- Wenn die Sätze A, A_1, ..., A_n einer Sprache L1 adäquate Übersetzungen der Sätze A', A_1', ..., A_n' einer Sprache L2 sind, dann gilt:
- (i) Ist der Satz A' logisch wahr, dann ist auch der Satz A logisch wahr
- (ii) Folgt der Satz A' logisch aus den Sätzen A_1', ..., A_n', dann folgt auch der Satz A logisch aus den Sätzen A_1, ..., A_n
- -> logische Eigenschaften und Beziehungen von Sätzen der AL können zur logischen Beurteilung natürlichsprachiger Sätze herangezogen werden

Grundsätze für die Übersetzung

- die logischen Junktoren entsprechen in etwa folgenden natürlichsprachigen Ausdrücken:
- (i) 'es ist nicht der Fall, dass' ($\neg$)
- (ii) 'und' ($\wedge$)
- (iii) 'oder' ($\vee$)
- (iv) 'wenn, dann' ($\rightarrow$)
- (v) 'genau dann, wenn' / 'dann und nur dann wenn' ($\leftrightarrow$)

- Übersetzungen sollen möglichst strukturreich sein
- A' soll in seiner Struktur dem Satz A möglichst ähnlich sein

Negationen (1)

- Paul ist nicht klug.
- entspricht: Es ist nicht der Fall, dass Paul klug ist.
- AL: $\neg p$
- p: Paul ist klug. (Bewertung)

- Berlin liegt nicht an der Elbe.
- entspricht: Es ist nicht der Fall, dass Berlin an der Elbe liegt.
- AL: $\neg p$
- p: Berlin liegt an der Elbe.

- Kein Mensch ist vollkommen.
- entspricht: Es ist nicht der Fall, dass es einen vollkommenen Menschen gibt.
- AL: $\neg p$
- p: Es gibt einen vollkommenen Menschen.

Negationen (2)

- Hans ist unvernünftig.
- entspricht: Es ist nicht der Fall, dass Hans vernünftig ist.
- AL: $\neg p$
- p: Hans ist vernünftig.

- Fritz hat Gerda nichts geschenkt.
- entspricht: Es ist nicht der Fall, dass Fritz Gerda etwas geschenkt hat.
- AL: $\neg p$
- p: Fritz hat Gerda etwas geschenkt.

- Alfred hat noch nicht geschlafen.
- AL: $\neg p$
- p: Alfred hat geschlafen. (?)

Konjunktionen (1)

- Hans und Paul sind gute Schwimmer.
- AL: $p \wedge q$
- p: Hans ist ein guter Schwimmer.
- q: Paul ist ein guter Schwimmer.

- Fritz putzt sich die Zähne und geht schlafen.
- AL?
- $p \wedge q$ ist nicht äquivalent wg. Äquivalenzbeziehung zu $q \wedge p$

- Hans und Gerda sind befreundet.
- AL?

Konjunktionen (2)

- Hans ist sowohl dumm als auch faul.
- AL: $p \wedge q$
- p: Hans ist dumm.
- q: Hans ist faul.

- Hans ist nicht dumm, aber faul.
- AL: $\neg p \wedge q$ (?)

Disjunktionen

- (i) Hans oder Fritz kommt.
- AL: $p \vee q$ (Adjunktion)

- (ii) Entweder Hans kommt oder Fritz kommt.
- AL: $\neg(p \leftrightarrow q)$ (Kontravalenz)

A	B	$\neg$	$(A \leftrightarrow B)$
w	w	f	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	w

Subjunktionen (1)

- Wenn Fritz der Vater von Paul ist, dann ist Fritz älter als Paul.
- AL: $p \rightarrow q$
- problematisch, weil inhaltlicher Zusammenhang zwischen den natürlichsprachigen Teilsätzen bestehen muss und nicht nur Wahrheitsbedingungen der Teilsätze relevant sind
- für Wahrheit des AL-Satzes reicht es, wenn Fritz nicht der Vater von Paul ist (dann ist es egal, ob Fritz älter als Paul ist)
- wenn ein wenn-dann-Satz wahr ist, dann ist auch die entsprechende Subjunktion wahr (aber nicht unbedingt umgekehrt – die Übersetzung in AL ist sozusagen schwächer)
- Subjunktionen stellen aber den ‘gemeinsamen Kern’ aller wenn-dann-Sätze dar

Subjunktionen (2)

- Achtung bei folgendem Satz:
- Hans kommt nur zur Party, wenn Karla kommt.
- Umformulierung:
- Wenn Karla nicht kommt, kommt auch Hans nicht zur Party.
- AL: $\neg p \rightarrow \neg q$
- p: Karla kommt.
- q: Hans kommt zur Party.
- wg. Äquivalenzbeziehung:
- AL: $q \rightarrow p$

Bisubjunktionen

- Hans kommt genau dann, wenn Paul kommt.
- AL: $p \leftrightarrow q$
- p: Hans kommt.
- q: Paul kommt.

- Hans kommt, es sei denn, dass Paul kommt.
- AL: $p \leftrightarrow \neg q$
- p: Hans kommt.
- q: Paul kommt.

Ein komplexeres Beispiel zur Beurteilung natürlichsprachiger Sätze

- Wenn Fritz kommt, kommt auch Paul, wenn aber Fritz nicht kommt, dann kommt Paul nicht, sondern Hans.
- AL:
- p: Fritz kommt.
- q: Paul kommt.
- r: Hans kommt.
- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge r))$

Wahrheitstafel

(Wenn Fritz kommt, kommt auch Paul, wenn aber Fritz nicht kommt, dann kommt Paul nicht, sondern Hans.)

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(\neg p$	$\rightarrow$	$(\neg q$	$\wedge$	$r))$
w	w	w	w	w	f	w			
w	w	f	w	w	f	w			
w	f	w	f	f	f	w			
w	f	f	f	f	f	w			
f	w	w	w	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	f	w	f	w	f	f

-> weder Tautologie noch Kontradiktion, sondern in bestimmten Fällen wahr (1., 2., 7. Zeile).

Begriff der Schlussfigur

- Syntaktische Regel, durch deren Anwendung auf bestehende Ausdrücke der AL (Prämissen) zu einem neuen Ausdruck (Konklusion) übergegangen werden kann.
- Schlussfolgerung
- Gewinnung von neuen Aussagen
- auch: "Schlussregel"
- vgl.a. Deduktion

Schlussfiguren (1)

- Modus ponendo ponens (Modus ponens, lat. "das zu Setzende setzend", Abtrennungsregel)
- Grundform des direkten Beweises

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

- entspricht: $((p \to q) \land p) \to q$
- z.B.:
  Wenn Karla liest, denkt sie
  Karla liest

  Karla denkt

Schlussfiguren (2)

- Modus tollendo tollens (Modus tollens, lat. “das Aufzuhebende aufhebend”; indirekter Beweis)

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

- Modus tollendo ponens

$$\frac{\begin{array}{l} p \lor q \\ \neg p \end{array}}{q}$$

- Modus ponendo tollens

$$\frac{\begin{array}{l} \neg(p \land q) \\ p \end{array}}{\neg q}$$

Literatur

- A. Beckermann: Einführung in die Logik. Berlin 2003.