

Kategorialgrammatiken

K.Ajdukiewicz (Die syntaktische Konnexität, 1935) hat funktionale Begriffe in die syntaktischen Kategorien eingebaut: bei der Verkettung wird der eine Ausdruck als Funktion, der andere als sein Argument behandelt; das Argument kann rechts oder links stehen:

$$\frac{u : A/B, \quad v : B}{u \cdot v : A} (/) \qquad \frac{u : B, \quad v : B \setminus A}{u \cdot v : A} (\backslash)$$

Interpretiert man Kategorien durch formale Sprachen (Mengen von Zeichenreihen), so entspricht dies den „Kürzungsregeln“

$$A/B \cdot B \subseteq A \qquad B \cdot B \setminus A \subseteq A$$

oder den kontextfreien Regeln

$$A \rightarrow A/B \cdot B \qquad A \rightarrow B \cdot B \setminus A$$

Funktionale Eigenschaften von Ausdrücken werden direkt durch ihre Kategorien ausgedrückt, nicht wie in einer CFG durch die Regeln zu diesen Kategorien:

Beispiele

1. attributive Verwendung des Adjektivs:

CFG: Kategorie A Regel $N \rightarrow A \cdot N$

KG: Kategorie $A := N/N$

2. transitives Verb im einfachen Satz:

CFG: Kategorie TV Regeln
 $VP \rightarrow TV \cdot NP$
 $S \rightarrow NP \cdot VP$

KG: $VP := NP \setminus S$
 $TV := VP / NP$
 $= (NP \setminus S) / NP$

Es folgt: $NP \cdot (TV \cdot NP) \subseteq NP \cdot (NP \setminus S) \subseteq S$

Kategorialgrammatiken (Bar-Hillel 1960)

Die Menge Cat der **Kategorien** (syntaktische Typen) wird aus einer nicht-leeren Menge von *Basiskategorien* durch

$$A, B \in Cat \Rightarrow A/B \in Cat, B \setminus A \in Cat$$

aufgebaut. Eine **Kategorialgrammatik** $G = (\Sigma, T, S)$ besteht aus

- (i) einem endlichen Alphabet bzw. Lexikon Σ ,
- (ii) einer Kategorisierung $T : \Sigma \rightarrow \mathcal{P}_{fin}(Cat)$, und
- (iii) einer Satzategorie $S \in Cat$.

Die von G definierte Sprache ist $L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid T \vdash w : S\}$, wobei $T \vdash v : A$ besagt, daß $v : A$ durch die Axiome

$$u : B, \quad \text{für } B \in T(u),$$

mit den Schlußregeln ($/$) und (\setminus) beweisbar ist.

Beispiel als CFG

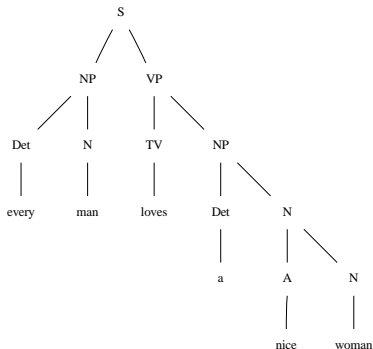
CFG:

$S \rightarrow NP VP$ $TV \rightarrow loves$

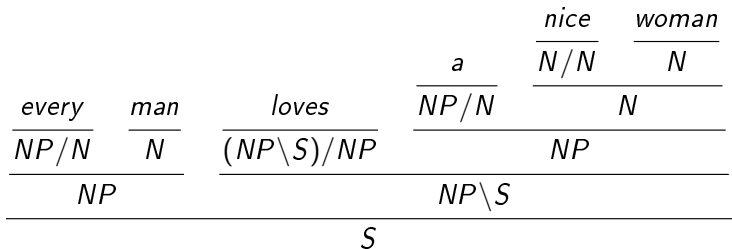
$VP \rightarrow TV NP$ $Det \rightarrow a \mid every$

$NP \rightarrow Det N$ $N \rightarrow man \mid woman$

$N \rightarrow A N$ $A \rightarrow nice$



Kurzform: Wörter als Blätter, ihre Kategorien als Präterminale



Wie man sieht, ist das ein „umgedrehter“ Syntaxbaum.

Da die Kürzungsregeln als kontextfreie Grammatikregeln aufgefaßt werden können (s.o.), gilt offenbar:

Prop.: Zu jeder Kategorialgrammatik $G = (\Sigma, T, S)$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (\Sigma, N, P, S)$ mit $L(G) = L(G')$.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

Satz (H.Gaifman 1957) Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (\Sigma, N, P, S)$ mit $\epsilon \notin L(G)$ gibt es eine Kategorialgrammatik $G' = (\Sigma, T, S)$ mit $L(G) = L(G')$.

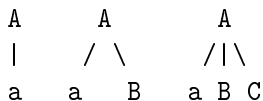
Der Beweis benutzt, daß man kontextfreie Grammatiken in eine Normalform (Greibach-NF) bringen kann, und konstruiert daraus eine Kategorialgrammatik.

Beweis (Skizze): Man kann annehmen, daß $G = (N, \Sigma, P, S)$ in „Greibach-Normalform“ gegeben ist, d.h. nur Regeln der Form $A \rightarrow a$, $A \rightarrow aB$ und $A \rightarrow aBC$ mit $a \in \Sigma$ und $A, B, C \in N$ hat. Für $G' = (\Sigma, T, S)$ setzt man

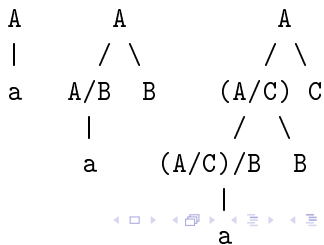
$$\begin{aligned}
 T(a) &:= \{A \in N \mid (A \rightarrow a) \in P\} \\
 &\cup \{A/B \in N \mid (A \rightarrow aB) \in P\} \\
 &\cup \{(A/C)/B \in N \mid (A \rightarrow aBC) \in P\}
 \end{aligned}$$

$L(G') \supseteq L(G)$: Jedem Syntaxbaum von G ordnet man einen Ableitungsbaum von G' zu, indem man die Verzweigungen wie folgt umwandelt:

G-Syntaxbaum



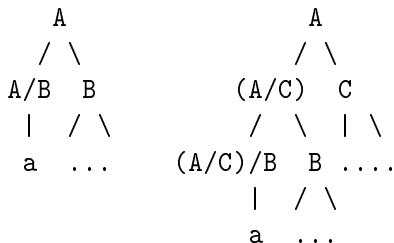
G'-Ableitungsbaum



$L(G') \subseteq L(G)$: Man zeigt durch Induktion über die Anzahl r der Knoten in G' -Ableitungsbäumen mit Wurzel $A \in N$ und w an den Blättern, daß es eine G -Ableitung $A \Rightarrow_G^* a$ gibt.

$r = 2$: Der G' -Baum entspricht der Annahme $a : A$, daher $A \Rightarrow_G^* a$.

$r > 2$: Es gibt es einen Knoten mit 2 Nachfolgern, von denen einer eine Kategorie X/Y oder $Y \setminus X$ hat. Da der Baum endlich tief ist, muß dabei einmal dieser Nachfolger ein *nichtverzweigender* Knoten sein, also ein $a \in \Sigma$ dominieren. Dann hat der Baum einen Teilbaum



mit Basiskategorien B, C . Zu den Teilbäumen unter B und C gibt es nach Induktion G -Ableitungen; man setzt sie mit den G -Regeln $(A \rightarrow aB)$ bzw. $A \rightarrow aBC$ zu einer G -Ableitung aus A zusammen.

Bemerkung: Bloomfield hatte *Attribute* durch die Distribution definiert: in einer Zusammensetzung $A B$ ist A ein Attribut, wenn in jedem Kontext $A B$ durch B ersetzt werden kann, d.h. wenn $D_L(A B) \subseteq D_L(B)$ ist.

In der Kategorialgrammatik ist ein (vorangestelltes) B -Attribut ein Ausdruck der Kategorie B/B :

$$\frac{v : B/B \quad w : B}{v \cdot w : B}$$

Analog: nachgestellte B -Modifikatoren haben die Kategorie $B \setminus B$.

Ob ein Ausdruck w ein Satz ist, wird bei Ajdukiewicz und Bar-Hillel darauf zurückgeführt, daß $w : A$ und $A \subseteq S$ für eine Kategorie A . Die Inklusion muß durch Anwenden der „Kürzungsregeln“ gezeigt werden. Man braucht i.a. aber weitere Möglichkeiten.

Lambek-Kategorialgrammatik

Zunächst sind Ausdrücke der Kategorie A/B Funktionen, die Ausdrücke der Kategorie B zu Ausdrücken der Kategorie A erweitern, z.B. $every : NP/N$, $to : PP/NP$.

Man kann mit A/B aber auch Ausdrücke beschreiben, die „von der Kategorie A wären, wenn ein Ausdruck der Kategorie B folgte“, d.h. als A -Ausdrücke mit einer B -Lücke am Ende:

Beispiel: Relativsätze sind nachgestellte Nomenmodifikatoren, also $S_{rel} := N \setminus N$. Da das Relativpronomen ein vorgezogenes Objekt ist, folgt darauf „ein Satz mit einer NP-Lücke am Ende“:

$$\begin{array}{c} \text{woman} : N \\ \hline \text{whom} : (N \setminus N) / (S / NP) \quad \frac{\quad ?}{\text{he talks to} : S / NP} \\ \hline \text{whom he talked to} : N \setminus N \\ \hline \text{woman whom he talked to} : N \end{array}$$

Man würde gerne aus den Kategorisierungen der Pronomen, Verben und Präpositionen

$$he : NP, \quad talks : (NP \setminus S) / PP, \quad to : PP / NP$$

schließen, daß, weil für beliebige $x : NP$ gilt:

$$\frac{\frac{he : NP}{\quad} \quad \frac{talks : (NP \setminus S) / PP \quad \frac{to : PP / NP \quad x : NP}{to \ x : PP}}{talks \ to \ x : NP \setminus S}}{he \ talks \ to \ x : S},$$

man ohne ein solches $x : NP$ noch hat: $he \ talks \ to : S / NP$.

Man will mit **temporäreren Annahmen** argumentieren können, hier:

$$\frac{he : NP, \ talks : (NP \setminus S) / PP, \ to : PP / NP, \ x : NP \vdash he \ talks \ to \ x : S}{he : NP, \ talks : (NP \setminus S) / PP, \ to : PP / NP \vdash he \ talks \ to : S / NP}$$

Lambek-Kalkül

J.Lambek (The mathematics of sentence structure, 1958) hat einen Beweiskalkül vorgeschlagen, in dem man hypothetische Annahmen verwenden kann, um Inklusionen zwischen Kategorien zu beweisen.

1. **Kategorien** werden aus einer Menge $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von atomaren Kategorien durch (A/B) , $(A \setminus B)$ und $(A \cdot B)$ erzeugt.
2. **Sequenzen** $C_1, \dots, C_{n+1} \triangleright C_0$ sind Folgen von Kategorien C_i .
3. **Axiome** sind alle Sequenzen $A \triangleright A$, für atomare Kategorien A .

3. **Schlussregeln** zur Herleitung von Sequenzen sind folgende, wobei Γ , Δ und Θ für endliche Folgen von Kategorien stehen, und A , B für beliebige Kategorien :

$$\frac{\Theta \triangleright A \quad \Gamma, B, \Delta \triangleright C}{\Gamma, \Theta, A \setminus B, \Delta \triangleright C} (\setminus L)$$

$$\frac{A, \Gamma \triangleright B}{\Gamma \triangleright A \setminus B} (\setminus R)$$

$$\frac{\Theta \triangleright A \quad \Gamma, B, \Delta \triangleright C}{\Gamma, B/A, \Theta, \Delta \triangleright C} (/ L)$$

$$\frac{\Gamma, A \triangleright B}{\Gamma \triangleright B/A} (/ R)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \triangleright C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \triangleright C} (\cdot L)$$

$$\frac{\Gamma \triangleright A \quad \Delta \triangleright B}{\Gamma, \Delta \triangleright A \cdot B} (\cdot R)$$

$$\frac{\Theta \triangleright B \quad \Gamma, B, \Delta \triangleright A}{\Gamma, \Theta, \Delta \triangleright A} (\textit{Schnitt})$$

Wir schreiben $\Gamma \vdash A$, wenn $\Gamma \triangleright A$ mit diesen Regeln in endlich vielen Schritten aus den Axiomen herleitbar ist.

Eine **Lambek'sche Kategorialgrammatik** $G = (\Sigma, T, S)$ ist eine Kategorialgrammatik, mit einer Kategorisierung $T : \Sigma \rightarrow \mathcal{P}_{fin}(Cat)$ der aus Basiskategorien mit \backslash , $/$ und \cdot aufgebauten Kategorien Cat , die den Kategorien A die Wortmengen

$$A^G := \{ a_1 \cdots a_n \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \Sigma, \\ A_1 \in T(a_1), \dots, A_n \in T(a_n), \\ A_1, \dots, A_n \vdash A \}$$

zuordnet. Die **von G definierte Sprache** ist $L(G) := S^G$.

Mit den Regeln $(\backslash R)$ und $(/ R)$ kann man zum Nachweis der Inklusion $C_1 \cdots C_n \subseteq C_0$ auch Hilfsannahmen verwenden. Die Regeln $(\backslash L)$ und $(/ L)$ entsprechen den Kürzungsregeln (s.u.).

Interpretation der Kategorien

Sei $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1)$ ein Monoid, d.h. eine Menge M mit einer Operation $\cdot : M \times M \rightarrow M$ und einem Element $1 \in M$, so daß

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \text{ und } x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$$

für alle $x, y, z \in M$. Man denke an die Folgen über Σ und die Verkettung \cdot von Folgen, d.h. $(M, \cdot, 1) = (\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$.

Den Basiskategorien C seien Teilmengen $C^{\mathcal{M}} \subseteq M$ zugeordnet. Dann interpretiert man die Produktkategorien $(A \cdot B)$ durch das elementweise Produkt der Mengen $A^{\mathcal{M}}$ und $B^{\mathcal{M}}$:

$$(A \cdot B)^{\mathcal{M}} := A^{\mathcal{M}} \cdot B^{\mathcal{M}} := \{u \cdot v \mid u \in A^{\mathcal{M}}, v \in B^{\mathcal{M}}\}$$

Für die Divisionskategorien geht es nicht entsprechend, weil auf M i.a. keine Divisionsoperation definiert ist. Stattdessen nimmt man

$$(A/B)^{\mathcal{M}} := \{u \in M \mid \{u\} \cdot B^{\mathcal{M}} \subseteq A^{\mathcal{M}}\},$$

$$(B \setminus A)^{\mathcal{M}} := \{u \in M \mid B^{\mathcal{M}} \cdot \{u\} \subseteq A^{\mathcal{M}}\}.$$

Eine Folge $\Gamma = C_1, \dots, C_n$ von Kategorien werde interpretiert durch

$$\Gamma^{\mathcal{M}} := (C_1 \cdot C_2 \cdots C_n)^{\mathcal{M}}.$$

Proposition: Die Axiome und Schlußregeln sind bei der Interpretation in Monoiden \mathcal{M} korrekt: Ist $\Gamma \vdash C$, so ist $\Gamma^{\mathcal{M}} \subseteq A^{\mathcal{M}}$.

Beweis: Für die Axiome $A \vdash A$ ist $A^{\mathcal{M}} \subseteq A^{\mathcal{M}}$ klar. Angenommen, der Beweis endet mit einer Anwendung von

$$\frac{\Theta \triangleright A \quad \Gamma, B, \Delta \triangleright C}{\Gamma, \Theta, A \setminus B, \Delta \triangleright C} (\setminus L)$$

Nach Induktion ist $\Theta^{\mathcal{M}} \subseteq A^{\mathcal{M}}$ und $\Gamma^{\mathcal{M}} \cdot B^{\mathcal{M}} \cdot \Delta^{\mathcal{M}} \subseteq C^{\mathcal{M}}$, also

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mathcal{M}} \cdot \Theta^{\mathcal{M}} \cdot (A \setminus B)^{\mathcal{M}} \cdot \Delta^{\mathcal{M}} &\subseteq \Gamma^{\mathcal{M}} \cdot A^{\mathcal{M}} \cdot (A \setminus B)^{\mathcal{M}} \cdot \Delta^{\mathcal{M}} \\ &\subseteq \Gamma^{\mathcal{M}} \cdot B^{\mathcal{M}} \cdot \Delta^{\mathcal{M}} \subseteq C^{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Analog für die anderen Regeln, mit der Definition von $(A/B)^{\mathcal{M}}$. \square

Beispiele für Herleitungen von Sequenzen

Im Lambek-Kalkül sind die Kürzungsregeln herleitbar, etwa ($/$):

$$\frac{\frac{A \triangleright A \quad B \triangleright B}{A/B, B \triangleright A} (/ L)}{A/B \cdot B \triangleright A} (\cdot L)$$

Aber auch andere Beziehungen wie $((A \setminus B)/C)^{\mathcal{M}} \subseteq (A \setminus (B/C))^{\mathcal{M}}$:

$$\frac{C \triangleright C \quad \frac{A \triangleright A \quad B \triangleright B}{A, A \setminus B \triangleright B}}{A, (A \setminus B)/C, C \triangleright B}}{A, (A \setminus B)/C \triangleright B/C}}{(A \setminus B)/C \triangleright A \setminus (B/C)}$$

Weitere Beispiele

Folgende Beziehungen gelten bei der Interpretation in \mathcal{M} :

1. $(A \setminus B) / C = A \setminus (B / C)$ (Argumentreihenfolge)
2. $A \subseteq (B / A) \setminus B, A \subseteq B / (A \setminus B)$ (Anhebung)
3. $A / (B \cdot C) = (A / C) / B$ (Currying)
4. $(A / B) \cdot (B / C) \subseteq A / C$ (Funktions-Komposition)
5. $A / B \subseteq (A / C) / (B / C), A / B \subseteq (C / A) \setminus (C / B)$ (Geach-Regeln)

Dazu beweise man die entsprechenden Sequenzen im Lambek-Kalkül, z.B. $A / B \triangleright (A / C) / (B / C)$ für 5.

Die wesentliche Beziehung zwischen Produkt und Divisionen ist:

$$C \subseteq B \setminus A \iff B \cdot C \subseteq A \iff B \subseteq A / C$$

Das besagt u.a.: A / C ist das größte B mit $B \cdot C \subseteq A$.

Eigenschaften des Lambek-Kalküls

Lemma (Lambek 1958)

- (i) Jede herleitbare Sequenz kann auch ohne Verwendung der Schnittregel hergeleitet werden.
- (ii) Es gibt ein Verfahren, mit dem man für jede Sequenz $\Gamma \triangleright A$ feststellen kann, ob sie herleitbar ist.

Proposition Die durch $G = (\Sigma, T, S)$ definierte Sprachfamilie $\{A^G \mid A \in \text{Cat}\}$ ist die Familie der kleinsten $\llbracket A \rrbracket \subseteq \Sigma^+$ mit

1. $A^T := \{a \in \Sigma \mid A \in T(a)\} \subseteq \llbracket A \rrbracket$, und
2. $\llbracket A_1 \rrbracket \cdots \llbracket A_n \rrbracket \subseteq \llbracket A \rrbracket$, falls $A_1, \dots, A_n \vdash A$.

Im Unterschied zu kontextfreien Grammatiken werden hier die Bedeutungen *unendlich vieler* Kategorien simultan definiert. Wie Chomsky schon den 60er Jahren vermutete, werden so aber keine zusätzlichen Sprachen definiert:

Satz (Pentus 1992) Zu jeder Lambek-Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.

Linguistische Anwendungen des Lambek-Kalküls

Typanhebung: durch $typ(C)$ werde einer syntaktischen Kategorie ein semantischer Typ zugeordnet, insbesondere

- ▶ $typ(S) := t$, die Wahrheitswerte,
- ▶ $typ(PN) := e$, die Individuen,
- ▶ $typ(N) = typ(VP) := (e \rightarrow t)$, Eigenschaften von Individuen.
- ▶ $typ(X \setminus Y) = typ(Y / X) := (typ(X) \rightarrow typ(Y))$, Funktionen.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{Maria}{PN \simeq e} \quad \frac{arbeitet}{VP \simeq (e \rightarrow t)}}{S \simeq t} \qquad \frac{\frac{\frac{Jeder}{Det \simeq ?} \quad \frac{Student}{N \simeq (e \rightarrow t)}}{NP \simeq ?} \quad \frac{arbeitet}{VP \simeq (e \rightarrow t)}}{S \simeq t}
 \end{array}$$

Links ist nötig: $VP \subseteq PN \setminus S$, rechts $NP \subseteq S / VP$, $Det \subseteq NP / N$,
und damit

$$typ(NP) = typ(VP) \rightarrow typ(S) = (e \rightarrow t) \rightarrow t,$$

$$typ(Det) = typ(N) \rightarrow typ(NP) = (e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow t)$$

Montague bringt beides auf den zweiten Fall, indem er die kontextfreie Regel $NP \rightarrow PN$ als Typanhebung interpretiert:

Um PN wie eine NP auf die VP anwenden zu können, brauchen wir

$$PN \subseteq S/VP,$$

und setzt man hierin $VP = PN \setminus S$ ein, so heißt das:

$$PN \subseteq S/(PN \setminus S).$$

Diese Typanhebung ist im Lambek-Kalkül beweisbar:

$$\frac{\frac{PN \triangleright PN \quad S \triangleright S}{PN, PN \setminus S \triangleright S} (\setminus L)}{PN \triangleright S/(PN \setminus S)} (/ R).$$

Koordination von Konstituentenfolgen:

Dowty[1] benutzt die Typanhebung und Funktionskomposition,

$$\frac{X}{(Y/X)\backslash Y}(T) \quad \text{und} \quad \frac{X\backslash Y \quad Y\backslash Z}{X\backslash Z}(C)$$

(als Regeln geschrieben), zur Koordinierung von nicht-Konstituenten, z.B. von *NP*-Paaren. Sei $TV := VP/NP$, $DTV := TV/NP$ und $X := DTV\backslash VP$ in der Kategorie des Koordinators.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{give}{DTV}}{DTV\backslash TV} T \quad \frac{\frac{\frac{Bill}{NP} \quad \frac{a \text{ book}}{NP}}{TV\backslash VP} T}{DTV\backslash VP} C \quad \frac{and}{X\backslash X/X} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{Max}{NP} \quad \frac{a \text{ record}}{NP}}{TV\backslash VP} T}{DTV\backslash VP} C}{DTV\backslash VP} C}{DTV\backslash VP} C}{VP}$$

Beispiel Die Lambek-Grammatik mit den Kategorisierungen

$der, ein : NP/N,$ $Buch, Student : N,$
 $der : (N \setminus N)/(S/NP)$ $liest : (NP \setminus S)/NP$

erlaubt eine Analyse von $der Student, der ein Buch liest : NP$. Man führt dazu

$NP/N, N, (N \setminus N)/(S/NP), NP/N, N, (NP \setminus S)/NP \triangleright NP$

mit der Schnittregel und (*) $NP \setminus (S/NP) \triangleright (NP \setminus S)/NP$, auf

$NP/N, N, (N \setminus N)/(S/NP), NP/N, N, NP \setminus (S/NP) \triangleright NP$

zurück; diese Sequenz kann allein mit ($/$ R) und (\setminus R), also in KG, hergeleitet werden, aber für (*) braucht man die Linksregeln!

Vorteile der Kategorialgrammatik:

- ▶ Linguistische Information im Lexikon $T : \Sigma \rightarrow \text{Cat}$ konzentriert
- ▶ Flexible Kategorisierung, z.B. bei Koordination, quasi kein Konstituentenbegriff mehr (ggf. Nachteil)
- ▶ Enger Zusammenhang zwischen syntaktischen Kategorien und semantischen Typen

Nachteile:

- ▶ Mit X/Y und $Y \setminus X$ wird nicht zwischen Komplement und Kontext unterschieden
- ▶ Tendiert zur Übergenerierung z.B. durch Typanhebungsregeln

Verfeinerungen durch strukturierte Kategorienannahmen Γ und Beschränkung der Regelanwendungen auf Teilannahmen möglich.



David Dowty.

Type raising, functional composition, and non-constituent conjunction.

In R.T.Oehrle et al. (eds.), editor, *Categorial Grammars and Natural Language Structures*, pages 153–197. D.Reidel, 1988.



J. Lambek.

The mathematics of sentence structure.

American Math. Monthly 65, 154–170, 1958.



J. Lambek.

On the calculus of syntactic types.

In R. Jacobson, editor, *Structure of Language and its Mathematical Aspects*, pages 166–178. Providence, 1961.