# Lösungen zum Aufgabenblatt 7
# Logik und modelltheoretische Semantik

Universität München, CIS, SoSe 2016

Hans Leiß

Abgabe: Do, 6.6.2016, in der Übungsstunde

## Aufgabe 7.1

(a) Zeige, daß für beliebige Formeln $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Aussage

$$(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$$

allgemeingültig (in jeder Struktur $\mathcal{A}$ wahr) ist, aber nicht die „umgekehrte“ Aussage

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi).$$

Gib für den zweiten Teil ein Gegenbeispiel an!

(b) Leiten Sie die Sequenz

$$\triangleright\ (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$$

mit den Regeln des Gentzen-Kalküls für die Prädikatenlogik (vgl. Folien) her.

**Lösung von Aufgabe 7.1** (a) Erster Teil: Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur mit $\mathcal{A} \models \forall x\varphi \vee \forall x\psi$. Dann ist mindestens eines der Disjunktionsglieder in $\mathcal{A}$ wahr, etwa $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$. Für beliebiges $a \in A$ ist also $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}}_{[x/a]} = 1$ und damit auch

$$[\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{A}}_{[x/a]} = \max\{[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}}_{[x/a]}, [\![\psi]\!]^{\mathcal{A}}_{[x/a]}\} = 1.$$

Da das für alle $a \in A$ gilt, ist $[\![\forall x(\varphi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{A}} = \min\{\, [\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{A}}_{[x/a]} \mid a \in A \,\} = 1$, also

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \vee \psi).$$

Damit ist gezeigt, daß $(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$ in jeder Struktur $\mathcal{A}$ wahr ist.

Zweiter Teil: Sei $P$ ein einstelliges Relationszeichen, und $\varphi(x) := P(x)$, $\psi(x) = \neg P(x)$. Sei $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}})$ mit $\emptyset \neq P^{\mathcal{A}} \neq A$, etwa $a, b \in A$ mit $a \in P^{\mathcal{A}}$, $b \notin P^{\mathcal{A}}$. Offenbar ist

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \vee \psi), \text{ d.h. } \mathcal{A} \models \forall x(P(x) \vee \neg P(x)),$$

aber

$$\mathcal{A} \not\models \forall x\varphi \quad \text{wegen } b \notin P^{\mathcal{A}}, \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A} \not\models \forall x\psi \quad \text{wegen } a \in P^{\mathcal{A}}.$$

Also ist $\mathcal{A}$ eine Struktur, in der $\forall x(\varphi \vee \psi) \to \forall x\varphi \vee \forall x\psi$ nicht wahr ist.

(b) Herleitung der Sequenz mit den Beweisregeln:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi(x/x), \forall x\varphi \rhd \varphi, \psi}{\forall x\varphi \rhd \varphi, \psi}\,(\forall L) \qquad \dfrac{\psi(x/x), \forall x\varphi \rhd \varphi, \psi}{\forall x\varphi \rhd \varphi, \psi}\,(\forall L)}{(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \rhd \varphi, \psi}\,(\vee L)}{(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \rhd (\varphi \vee \psi)}\,(\vee R)}{(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \rhd \forall x(\varphi \vee \psi)}\,(\forall R, x!)}{\rhd (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)}\,(\to R)$$

Da $\varphi(x/x) = \varphi$ und $\psi(x/x) = \psi$ sind, sind die obersten Sequenzen Axiome.

**Aufgabe 7.2** Beweisen Sie mit den Regeln des Gentzen-Kalküls der Prädikatenlogik die folgenden Sequenzen:

(a) $\exists x\, P(x), \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \rhd \exists x\, Q(x)$

(b) $\rhd \forall y[\varphi(x/y)] \to \forall x\, \varphi$, falls $y \notin \mathit{frei}(\varphi)$

Da im Kurs die Umkehrung von (b) gezeigt wurde,

$$\rhd \forall x\, \varphi \to \forall y[\varphi(x/y)], \qquad \text{falls } y \notin \mathit{frei}(\varphi),$$

können wir also einen Fall der „Umbenennung gebundener Variablen“, nämlich

$$\rhd \forall y[\varphi(x/y)] \leftrightarrow \forall x\, \varphi, \qquad \text{falls } y \notin \mathit{frei}(\varphi),$$

mit den vorhandenen Regeln schon beweisen und brauchen dafür keine eigenen Beweisregeln. Man überlege sich, daß man mit Hilfe der Schnittregel (siehe Folien) eine Annahme $\forall x\varphi$ durch $\forall y[\varphi(y/x)]$ ersetzen darf, sofern $y \notin \mathit{frei}(\varphi)$. Ebenso für eine Behauptung $\forall x\varphi$. Dasselbe muß man analog für $\exists x\varphi$ machen.

**Lösung von Aufgabe 7.2**

(a) Wenn man den Beweis von unten nach oben konstruiert, muß man zuerst $(\exists L)$ anwenden, dann $(\forall L)$ und $(\exists R)$, damit die Nebenbedinung an freie Variablen bei $(\exists L)$ erfüllt ist:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x), \forall x(P(x) \to Q(x)) \rhd Q(x), P(x) \qquad P(x), \forall x(P(x) \to Q(x)), Q(x) \rhd Q(x)}{P(x), \forall x(P(x) \to Q(x)), (P(x) \to Q(x)) \rhd Q(x)}\,(\to L)}{P(x), \forall x(P(x) \to Q(x)) \rhd \exists x Q(x)}\,(\forall L, \exists R)}{\exists x P(x), \forall x(P(x) \to Q(x)) \rhd \exists x Q(x)}\,(\exists L, x!)$$

(b) Da $\varphi(x/y)(y/x) = \varphi$ ist, ist die oberste Sequenz im folgenden Beweis ein Axiom:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y[\varphi(x/y)], \varphi(x/y)(y/x) \rhd \varphi}{\forall y[\varphi(x/y)] \rhd \varphi}\,(\forall L)}{\forall y[\varphi(x/y)] \rhd \forall x\varphi}\,(\forall R, x!)}{\rhd \forall y[\varphi(x/y)] \to \forall x\varphi}\,(\to R)$$

**Aufgabe 7.3** Die Regel zum Umgang mit Annahmen der Form $\exists x\varphi$, also

$$\frac{\Gamma, \varphi \rhd \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \rhd \Delta}\,(\exists L), \text{ falls } x \notin \mathit{frei}(\Gamma, \Delta),$$

ist *korrekt*, d.h., wenn die Obersequenz allgemeingültig ist, dann auch die Untersequenz allgemeingültig ist. (Das können Sie selber zeigen, oder wir machen es in der Übungsstunde). [Eine Sequenz $\Gamma \rhd \Delta$ hieß *allgemeingültig*, wenn die Formel

$$\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$$

für jede Struktur $\mathcal{A}$ und Belegung $g : \mathit{Var} \to A$ wahr ist.]

Zeige durch ein Beispiel mit $\varphi := P(x)$ und geeigneten $\Gamma, \Delta$, daß die Regel ($\exists$ L) *ohne* die Nebenbedingung $x \notin \mathit{frei}(\Gamma, \Delta)$ *nicht* korrekt ist.

**Lösung von Aufgabe 7.3** Die Regel ($\exists$ L) ist ohne die Nebenbedingung *nicht* korrekt: im Beispiel

$$\frac{\neg P(x), P(x) \rhd P(x)}{\neg P(x), \exists x\, P(x) \rhd P(x)}\,(\exists L \text{ ohne die Nebenbedingung})$$

ist die Obersequenz allgemeingültig, denn bei jeder Struktur $\mathcal{A}$ und jedem $g : \mathit{Var} \to A$ ist

$$[\![(\neg P(x) \wedge P(x)) \to P(x)]\!]_g^{\mathcal{A}} = 1,$$

da der „wenn“-Teil den Wert 0 hat. Aber die Untersequenz ist nicht allgemeingültig, denn bei $\mathcal{A} = (\{a, b\}, P^{\mathcal{A}})$ mit $P^{\mathcal{A}} = \{a\}$ und $g(x) = b$ ist die Untersequenz nicht wahr:

$$[\![(\neg P(x) \wedge \exists x\, P(x)) \to P(x)]\!]_g^{\mathcal{A}} = 0,$$

da der „wenn“-Teil wahr ist ($g(x) = b \notin P^{\mathcal{A}}$, aber es gibt ein Element in $P^{\mathcal{A}}$, nämlich $a$), aber der „dann“-Teil ($b \in P^{\mathcal{A}}$) ist falsch.