# Aufgabenblatt 1
# Logik und modelltheoretische Semantik

Universität München, CIS, SS 2014

Hans Leiß

Abgabe: Do, 24.4.2014, 16.ct Uhr
in der Übungsstunde

## Aufgabe 1.1

(a) Prüfe, ob die aussagenlogische Formel

$$\varphi := ((p \to (q \to p)) \to ((p \wedge q) \to p))$$

logisch wahr ist. (3 Punkte)

(b) Sind die Aussagen $(p \leftrightarrow (q \to p))$ und $((p \wedge q) \leftrightarrow p)$ logisch äquivalent? (3 Punkte)

**Aufgabe 1.2** Zeige, daß die Konjunktion *(deshalb), weil*, mit der man in der Umgangssprache zwei Aussagen $A$ und $B$ zur Aussage

$$A, \text{ weil } B$$

verbinden kann, *nicht* durch eine Wahrheitsfunktion $f : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ interpretieren kann, d.h. daß der Wahrheitswert einer Ausssage ($A$ deshalb, weil $B$) nicht allein durch die Wahrheitswerte von $A$ und $B$ bestimmt ist. (4 Punkte)

Hinweis: Suche Beispielaussagen $A, A'$ mit demselben Wahrheitswert und Aussagen $B, B'$ mit demselben Wahrheitswert, aber so, daß ($A$, weil $B$) *nicht* denselben Wahrheitswert wie ($A'$, weil $B'$) hat.

**Aufgabe 1.3** Sei $T$ die Aussagenmenge $\{\, p_{2n} \leftrightarrow p_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

(a) Ist $T$ erfüllbar, und wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht? (2 Punkte)

(b) Zeige, daß $(p_8 \leftrightarrow p_1)$ aus $T$ folgt. (2 Punkte)

(c) Gib eine endliche Teilmengen $E \subseteq T$ an, aus der $(p_8 \leftrightarrow p_1)$ folgt. (2 Punkte)

**Aufgabe 1.4** Sei $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ eine Boole'sche Algebra und $\leq$ die durch n

$$a \leq b :\Longleftrightarrow\ a + b = b \qquad \text{für alle } a, b \in A,$$

definierte partielle Ordnung auf $A$. Zeige mit den Axiomen, daß $+$ monoton und $^-$ anti-monoton ("antiton") im ersten Argument ist, d.h. für alle $a, b \in A$:

$$\begin{aligned} a \leq b &\implies a + c \leq b + c \\ a \leq b &\implies \overline{b} \leq \overline{a}. \end{aligned}$$

Wegen der Kommutativität ist $+$ auch im zweiten Argument monoton.

**Hinweis**: Benutze beim Komplement eine der DeMorgan'schen Regeln (s. Folien, mit $0 \leq a \leq 1$).

**Aufgabe 1.5** Sei $\mathcal{A}$ eine Boole'sche Algebra, $g : \mathit{Var} \to A$ (dem Individuenbereich von $\mathcal{A}$), und $f : \mathcal{A} \to \mathbb{B}$ ein Homomorphismus. Dann gilt für jede aussagenlogische Formel $\varphi$:

$$f([\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}}_g) = [\![\varphi]\!]^{\mathbb{B}}_{f \circ g}.$$

Das beweist man durch Induktion über den Aufbau von $\varphi$. Behandle davon die beiden Fälle $\varphi = p$ und $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von $M \neq \emptyset$, und für ein $a \in M$ sei $f(X) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in X, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
Ist dieses $f : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{B}$ ein Homomorphismus? Was besagt hierfür $f([\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}}_g) = [\![\varphi]\!]^{\mathbb{B}}_{f \circ g}$ ?