Semantik II

Vorlesung SS 2002
CIS, Universität München

Hans Leiß

Inhalt:

(i) Die Kategorien des Aristoteles (384 – 322 v.Chr.)

(ii) Die Relationenalgebra von C.S.Peirce (1839-1914)

(iii) Sinn und Bedeutung bei G.Frege (1848-1925)

(iv) Bedeutung und Modalitäten bei R.Carnap

(v) Sinn als Intension bei R.Montague (1930 - 1971)

(vi) Formale Theorie von Sinn und Bedeutung, A.Church

(vii) Sinn und Bedeutung bei Y. N. Moschovakis (UCLA)

Die Kategorien des Aristoteles

Aristoteles unterscheidet nicht zwischen Semantik und Ontologie. Er unterteilt das, „was ist", nach den Ausdrücken, mit denen davon gesprochen wird.

Die Klassen des „Seienden" hängen daher mit Klassen oder *Typen* von Ausdrucksweisen zusammen.

In heutiger Sprechweise: zu jedem *Typ* τ gibt es

(i) *Ausdrücke* α *vom Typ* τ, kurz $\alpha : \tau$,

(ii) *Objekte* a *vom Typ* τ, kurz $a \in D_\tau$, wobei D_τ der Bereich aller Objekte vom Typ τ ist.

Die *Bedeutung* $[\![\alpha]\!]$ eines Ausdrucks α vom Typ τ ist ein Objekt vom Typ τ:

$$\alpha : \tau \implies [\![\alpha]\!] \in D_\tau \tag{1}$$

Metasprachliche Unterscheidungen

Auf der sprachlichen Seite unterscheidet Aristoteles (Kap.5, 2a20) zwischen

(i) τον ὄνομα κατηγορεῖν[1] „den Namen von etwas aussagen“: etwas *nennen*

(ii) τον λόγον κατηγορεῖν[2] „den Begriff von etwas aussagen“: etwas *erklären*, *als etwas beurteilen*

Daraus folgt die Unterscheidung (Kap.1)

(i) *Homonymie*: $a \simeq_{hom} b :\iff a$ und b haben gleiche Bezeichnungen mit verschiedenen Erklärungen

Beispiel: Bild und Mensch werden ζῶον genannt

(ii) *Synonymie*: $a \simeq_{syn} b :\iff a$ und b haben gleiche Bezeichnungen mit gleichen Erklärungen

Beispiel: Tier und Mensch werden ζῶον genannt

(iii) *Paronymie*: $a \simeq_{par} b :\iff a$ und b haben von einander abgeleitete Bezeichnungen

Beispiel: ἡ ἀνδρεία – ὁ ἀνδρειός: d.Mut – d.Mutige

---

[1] ton onoma kategorein
[2] ton logon kategorein

Grundlegende Aussageformen

Aristoteles unterscheidet (Kap.2) zwei Arten von Grundaussagen:

(i) τινὸς καθ' ὑποκειμένου τινὸς λέγεται[3], „x wird über y ausgesagt", kurz: $x(y)$, „y *ist ein* x"

(ii) τινὸς ἐν ὑποκειμένου τινὸς ἐστίν[4], „x kommt an y vor", kurz: $x[y]$, „y *ist* x"

Das ὑποκείμενον, über das in (i) etwas gesagt wird und an dem in (ii) etwas vorkommt, ist „das zu Grunde liegende", das *Subjekt*, der *Satz„gegenstand"*

Die Redeweise in (ii), daß etwas ἐν τινὸς ἐστίν, „y ist (in/an) x", erklärt Aristoteles so: y ist nicht Teil von x, kann aber nicht „ohne" x sein, ist also abhängig von x.

(Bei Peirce werden daraus die *Relative*: Begriffe wie *Liebhaber*, die nicht monadisch sind, sondern von Beziehungen abgeleitet sind.)

[3] tinos kat hypokeimenu tinos legetai
[4] tinos en hypokeimenu tinos estin

Einteilung des „Seienden“

Aus diesen *Aussageformen* ergeben sich vier Arten von *Seiendem*:

(i) Allgemeinbegriffe A: das, was von etwas ausgesagt wird, aber an nichts vorkommt. Falls $x : A$ (und y ein Seiendes), so ist $x(y)$ eine Aussage, aber $x[y]$ ist keine Aussage.

Beisp.: ἄνθρωπος(Σωκράτης) = S. ist ein Mensch

(ii) Eigenschaften oder Qualitäten E: das, was an etwas vorkommt, aber von nichts ausgesagt wird. Falls $x : E$, so ist $x[y]$ eine Aussage, aber $x(y)$ ist keine Aussage.

Beisp.: λευκός[ςῶμα] = der Körper ist weiß

(iii) Fähigkeiten F: das, was an etwas vorkommt und von etwas ausgesagt wird: Falls $x : F$, so sind $x[y]$ und $x(y)$ Aussagen.

Beisp.: ἐπιστήμη[ψυχῆ], ἐπιστήμη(γραμματικῆ)

(iv) Objekte I: das, was nicht an etwas vorkommt und auch nicht von etwas ausgesagt wird. Falls $x : I$, so sind weder $x[y]$ noch $x(y)$ Aussagen.

Beisp.: τὶς ἵππος = dieses Pferd

Anders dargestellt:

	$x[\cdot] : \overline{prop}$	$x[\cdot] : prop$
$x(\cdot) : prop$	allgem. Substanz Mensch $x : A$	allgem. Qualität Farbe $x : F$
$x(\cdot) : \overline{prop}$	individ. Substanz Sokrates $x : I$	individ. Qualität Weiß $x : E$

Beispiel:

$x(\cdot)$ $x[\cdot]$	Skr. *ist ein* Mensch. —	Weiß *ist eine* Farbe. Milch *hat eine* Farbe.
$x(\cdot)$ $x[\cdot]$	— —	— Milch *ist* weiß.

Objekte I sind unteilbar, also *Individuen, Atome*, und der Zahl nach eines, d.h. Singularia.

Allgemeinbegriffe sind teilbar, also Gesamtheiten (Mengen) und der Zahl nach mehreres, also Pluralia .

Eigenschaften der „ist-ein“-Prädikation $x(y)$

(i) Sie ist transitiv: (Kap 3:1b10, 5:2a34, *dictum de omni*)

$$x(y) \wedge y(z) \Rightarrow x(z)$$

In Begriffsumfängen ausgedrückt ($x(z)$ ambig!):

$$\begin{array}{lcl} X \supseteq Y \wedge Y \supseteq Z & \Rightarrow & X \supseteq Z \\ X \supseteq Y \wedge Y \ni z & \Rightarrow & X \ni z \end{array}$$

Beisp.: $\mathit{Lebewesen}(\mathit{Mensch}) \wedge \mathit{Mensch}(\mathit{Sokrates})$
$\Rightarrow \mathit{Lebewesen}(\mathit{Sokrates})$.

(ii) In $x(y)$ wird x stets sowohl als Benennung wie zur Erklärung verwendet: (Kap 5, 2a20)

- *dieses Haus*: Der Allgemeinbegriff[5] dient zur Bezeichung des (namenlosen) Objekts
- *dies ist ein Haus*: Der Allgemeinbegriff dient zur Erklärung auf die Frage *Was ist dieses?*

Modellierung der Bedeutung durch Begriffsumfänge:

$$[\![x(y)]\!] = \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![x]\!] \supseteq [\![y]\!] \text{ bzw. } [\![x]\!] \ni [\![y]\!], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[5] „nomen communis“!

Eigenschaften der „ist|hat“-Prädikation $x[y]$

(i) In $x[y]$ wird x normalerweise weder zur Benennung noch zur Erklärung benutzt: (Kap 5, 2a27)

- *der Körper ist krank*: Die Benennung ist *dieser Körper*, nicht *dieses Kranke*
- *dieser Körper ist weiß | hat eine Farbe*: Das ist keine Erklärung im Sinne von *Was ist das? – ein Weiß(es), eine Farbe.*

  Bei $x[y]$ fällt y nicht unter die *Definition (λόγος)* von x.

(ii) Bei $x[y]$ wird manchmal x auch zur Benennung benutzt: (Kap 5, 2a31)

- *der Körper ist weiß*: Die Benennung *dieses Weiße* ist möglich

Frage: Ist das adjektivische Attribut nicht auch Teil einer Benennung? *der weiße Körper*

Modellierung der Bedeutung durch (implizite, von x abhängende) Qualitätsmaße μ:

$$[\![x[y]]\!] = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mu([\![y]\!]) = [\![x]\!] \text{ bzw. } \mu([\![y]\!]) \in [\![x]\!], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierarchie der Allgemeinbegriffe

Allgemeinbegriffe sind partiell geordnet, $x \geq x'$, nach ihrem Umfang $[\![x]\!]$ durch Inklusion $\supseteq$, z.B.

$$[\![\mathit{Lebewesen}]\!] \supseteq [\![\mathit{Tier}]\!] \supseteq [\![\mathit{Mensch}]\!].$$

Anordung: *Gattung* (γένος) $\geq$ *Art* (εἶδος).

Unterschied

Eine Gattung x kann durch (gattungsspezifische) *Unterschiede* x_i zerlegt werden. (Kap. 3)

Beisp.: die geflügelten, die im Wasser lebenden, die zweifüßigen Lebewesen.

Mit den Unterschieden x_i lassen sich Aussagen $x_i(y)$ bilden, aber nicht Aussagen der Form $x_i[y]$.

Nur wenn $x(y)$ und x_i eine für die Gattung x spezifische Unterscheidung ist, hat $x_i(y)$ einen Sinn.

Die 10 Kategorien von Ausdrücken

Es geht um Ausdrücke, die (Kap. 2:1a15, 4:2a5).

(i) außerhalb einer Verbindung zu einem Satz eine Bedeutung haben (die kein Wahrheitswert ist),

(ii) deren Verbindung erst zu *Aussagen* führt (deren Bedeutung ein Wahrheitswert ist).

Nr.	Name		gramm. Begriff
1.	οὐσία	seiendes Wesen	(Allgemein-) Name
2.	ποσὸν	wieviel	Maßausdruck
3.	ποιὸν	wie beschaffen	Adjektiv
4.	πρός τι	im Verhältnis zu	Vergleichsausdrücke
5.	ποὺ	wo	Ortsadverbiale
6.	ποτὲ	wann	Zeitadverbiale
7.	κεῖσθαι	befinden	Zustandsverben
8.	ἔχειν	haben	(Verben (medium) ?)
9.	ποιεῖν	tun	Verben (aktiv)
10.	πάσχειν	leiden	Verben (passiv)

Die οὐσία können auch Individuen sein und entsprechen den *Subjekten* von Aussagen.

Kategorische Aussagen

Die Aussageformen, die Aristoteles in seinen logischen Schriften analysiert, sind wie y *ist ein* x, $x(y)$, gebildet: nach dem Schema

Subjekt Kopula Prädikat

S kop P	Bedeutung	Mengenaussage
$A\,a\,B$	alle A sind B	$A \subseteq B$
$A\,e\,B$	alle A sind keine B	$A \subseteq \overline{B}$
$A\,i\,B$	einige A sind B	$A \cap B \neq \emptyset$
$A\,o\,B$	einige A sind keine B	$A \cap \overline{B} \neq \emptyset$

Man betrachtet $(A\,a\,B)$ und $(A\,i\,B)$ als *affirmative* Grundformen und die beiden anderen als *negative* Aussagen; sie sind die Negationen der affirmativen:

$$(A\,o\,B) \iff \neg(A\,a\,B)$$
$$(A\,e\,B) \iff \neg(A\,i\,B)$$

Die Aussagen $(A\,a\,B)$ und $(A\,e\,B)$ heißen *universell*, $(A\,i\,B)$ und $(A\,o\,B)$ *partikulär* im Subjekt.

Modellierung erststufiger Objekte

Erststufige Objekte haben

(i) eine Art oder *Typ* τ, der zeitunabhängig ist,

(ii) eine Identität, die von der Zeit unabhängig ist,

(iii) einige typspezifische *Qualitäten* Q, deren Wert mit der Zeit variieren kann.

Sei T die Zeit, wie immer sie eingeteilt werde. Jede Qualität von τ-Objekten ist eine Funktion

$$Q : \tau \to (T \to |Q|),$$

die einem Objekt $a : \tau$ und einer Zeiteinheit $t : T$ einen *Wert* $Q^a(t) := Q(a)(t)$ aus einer Menge $|Q|$ von Qualitätswerten zuordnet.

Daher: erststufige Objekte sind *Felder*

$$a = \{typ = \tau, id = n, Q_i = \lambda t : T.Q_i^a(t)\}_{i \in I}$$

mit Komponenten $a.typ$, $a.id$, $a.Q_i$.

Auswertung von Aussagen über erststufige Objekte

Wir interpretieren die Grundaussagen wie folgt:

(i) $x(y)$, falls x ein Typ τ und y ein Individuum ist, d.h. „*y ist ein* τ“, ab jetzt $y : \tau$.

$$[\![a : \tau]\!] = \begin{cases} 1, & \text{falls } a.typ \leq \tau, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei $\leq$ die partiellen Ordnung $\leq$ der zweitstufigen Objekte ist.

Diese Aussagen sind zeitunabhängig.

(ii) $x[y]$, falls x ein Qualitätswert und y ein Individuum ist, d.h. *y hat den Qualitätswert x*:

$$[\![v[a]]\!]_t = \begin{cases} 1, & \text{falls } a.Q(t) = v, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu wird vorausgesetzt[6], daß es genau eine für $a.typ$ spezifische Qualität Q mit $v \in |Q|$ gibt.

Diese Aussagen sind zeitabhängig.

[6] oder durch Q als *Typ* $v : Q$ von v garantiert.

Modellierung zweitstufiger Objekte

Zweitstufige Objekte:

(i) *Gattungen* σ, die bezüglich $\leq$ maximalen Objekte, die wir mit ihren spezifischen Unterscheidungen $U_i : \sigma \to \mathbf{t}$ identifizieren:

$$\sigma = \langle U_j^\sigma \rangle_{j \in J}.$$

Jede Gattung hat eine[7] *Definition* $\lambda y.\phi$, oder ist ein undefinierter Grundbegriff.

Jeder Gattung ist ein *Bereich* $D_\sigma =: [\![\sigma]\!]$ von erststufigen Objekten zugeordnet.

(ii) *Arten* $\tau < \sigma$, die aus der Gattung σ durch Unterscheidungen U_i hervorgehen, und die weitere artspezifische Unterschiede V_k haben:

$$\tau = \langle \sigma, U_i, \overline{U}_j, V_k \rangle_{i \in J^+, j \in J^-, k \in K},$$

mit $J^+ \dot{\cup} J^- \subseteq J$. Der *Bereich* der Art τ ist

$$D_\tau = \{a \in D_\sigma \mid \bigwedge_{i \in J^+, j \in J^-} U_i(a) = \overline{U}_j(a) = 1\}$$

[7] notfalls $\phi(y) := \bigwedge_{l \in J}(U_j(y) \vee \overline{U_j}(y))$ oder $\phi(y) := \sigma(y)$.

Auswertung von Aussagen über zweitstufige Objekte

Nach Konstruktion ist für $\tau < \sigma$ auch $D_\tau \subseteq D_\sigma$.

Wir interpretieren die Grundaussagen wie folgt:

(i) $x(y)$, falls x eine Art τ_1 der Gattung σ_1 und y eine Art τ_2 der Gattung σ_2 ist:

Wir schreiben $\tau_2 < \tau_1$ statt $\tau_1(\tau_2)$ und setzen

$$[\![\tau_2 \leq \tau_1]\!] = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma_1 = \sigma_2 \text{ und} \\ & \text{jedes } U_i, \overline{U}_j, V_k \text{ von } \tau_1 \\ & \text{auch in } \tau_2 \text{ vorkommt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich $[\![\tau_2 < \tau_1]\!]$ wie üblich.

Offenbar ist für $\tau_2 \leq \tau_1$ auch $D_{\tau_2} \subseteq D_{\tau_1}$.

(ii) $x(y)$, falls x eine maximale Gattung σ_1 und y eine Art τ_2 der Gattung σ_2 ist:

$$[\![\sigma_1(\tau_2)]\!] = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma_2 = \sigma_1 \text{ und } \tau_2 < \sigma_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Übungsaufgabe:

(i) Ist obiges $\leq$ eine partielle Ordnung / ein Baum?

(ii) Folgt aus $a : \tau$ tatsächlich $a \in D_\tau$?

(iii) Ist $D_{\tau_1} \cap D_{\tau_2} = \emptyset$ für $\leq$-unvergleichbare τ_1, τ_2?

Beispiel 1: *Sokrates ist ein Lebewesen* $= 1$, da

$$\begin{array}{rcl} \textit{Sokrates.typ} & = & \textit{Mensch}, \\ \textit{Mensch} & \leq & \textit{Lebewesen}. \end{array}$$

für $\textit{Mensch} := \langle \textit{Lebewesen}, \textit{vernunftbegabt}, \textit{sterblich} \rangle$

Beispiel 2: *dieses Blatt ist weiß* $= 1$, da

$$\begin{array}{rcl} \textit{weiß.typ} & = & \textit{Farbe}, \\ (\textit{dieses Blatt}).\textit{Farbe} & = & \textit{weiß} \end{array}$$

für $\textit{d.Blatt} := \langle \textit{typ} = \textit{Gegenstand}, \textit{Farbe} = \lambda t : T.\textit{weiß} \rangle$

Problem: Sollte nicht der Typ *Gegenstand* sagen, daß es eine $\textit{Farbe} : T \times \textit{Geg.stand} \to |\textit{Farbe}|$ gibt?

Weitere Grundaussagen

Was ist mit den anderen Kategorien?

Kat./ Frage	Antwort
Allg.Name	
y ist ein *was*?	$y : \tau$, oder $y < \sigma$
	y ist ein Indiv. der Art τ,
	y ist eine Art der Gattung σ
Maßausdr.	
y ist *wieviel* E. lang?	y ist 2 Ellen lang.
Adjektiv	
y ist *wie* beschaffen?	y ist gesund.
y hat *welche Farbe*?	$y.Farbe = weiß$
	y ist weiß.
Vergleich	
	y ist größer als z
	y ist genauso groß wie z
Ortsadverbial	
y ist *wo*?	y ist auf dem Marktplatz.
Zeitadverbial	
Zustand	
Haben	
Handlung	
PassivVerb	

Die Kategorie πρός τι: Relationen

In den bisher betrachteten Grundaussagen

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{diese} \\ \textit{einige} \\ \textit{alle} \end{array} \right\} A \textit{ sind} \left\{ \begin{array}{c} B \\ \textit{keine } B \end{array} \right\}$$

sind A, B Gemeinnamen, also *einstellige Prädikate.*

Aristoteles betrachtet auch *zweistellige* Prädikate:

πρός τι οὖν ἐστὶν ὅσα αὐτὰ ἅπερ ἐστὶν ἑτέρων λέγεται.
„*relativ* ist nun dasjenige, von dem, *was* es ist, in Bezug auf ein anderes gesagt wird“

In der Definition (dem „was es ist“) muß auf etwas anderes Bezug genommen werden:

Beisp. Ein *Diener* ist jemand, der jemandem dient.

Beispiele sind durch Genitivattribute gebildet:

μεῖζον τινὸς	*y ist größer als z*	$y > z$
διπλάσιον ἑτερου	*y ist das Doppelte von z*	$y = f(z)$
τινὸς ἕξις	*y ist ein Verhalten zu z*	$V(y, z)$
τινὸς ἐπιστήμη	*y ist ein Wissen von z*	$W(y, z)$
δοῦλος (δεσπότης)	*y ist Sklave (eines Herrn)*	$\exists z S(y, z)$

Den *Teil-von*-Genitiv nimmt er aus, also τινὸς κεφαλὴ, „jemandes Kopf“, damit gilt:

weder erst- noch zweitstufige Objekte sind relativ.

Also: die Grundbegriffe, die Gattungen und Unterscheidungsprädikate, sind *unabhängig* von den Relationen: die durch *Projektion*

$$P(x) :\Longleftrightarrow \exists y R(y, z)$$

aus Relationen entstandenen einstelligen Prädikate definieren keine Arten oder Unterscheidungsprädikate, mit denen Arten definiert werden.

„Relative“ und Relationen bei C.S.Peirce und E.Schröder

Erst Ende des 19. Jahrhunderts werden die Relationen als wichtiger Bestandteil der Sprache und Logik erkannt, von C.S.Peirce und E.Schröder.

Terminologie bei Peirce (1897):

a) *Relative* sind Wörter, die „zu einem Gemeinnamen werden, wenn ihnen ein anderer Gemeinname als Objekt hinzugefügt wird“.

(i) Präpositionen: *zu der Zeit des*

(ii) Relationsnomen: *Bruder des*, *Stifter von* · *an* ·

(iii) transitive Verben: *kaufen*, *geben*

b) Ein *Relativ* ist (ggf. nach Hinzufügen von „ist“) ein Satz, in dem einige Eigennamen weggelassen sind.

c) Ein *Verhältnis* (heute: eine *Relation*) R zwischen Objekten der Arten $A_1, \ldots, A_n$ ist eine Tupelmenge

$$\{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Die i-te *Relation* (heute: *Projektion*) von R ist

$$\{a \mid \exists a_1 \in A_1 \ldots \exists a_n \in A_n(a = a_i \wedge R(a_1, \ldots, a_n))\}$$

Projektionen

Aus den transitiven Verben erhält man durch Projektion standardmäßig zwei Gemeinnamen:

Extension	Verbal	Nominal
$\{(a,b) \mid L(a,b)\}$	lieben	Verliebte
$\{a \mid \exists b\, L(a,b)\}$	jemanden lieben	Liebende(r)
$\{b \mid \exists a\, L(a,b)\}$	geliebt werden	Geliebte(r)

Sie entstehen als *Nominalisierungen der Partizipien.*

Festhalten eines Arguments

Aus dem transitiven Verb erhält man Gemeinnamen auch durch Festhalten eines Arguments:

xLb	x liebt b
$x(Lb)$	x ist ein *Liebhaber des b*
$(aL)y$	y ist ein *Geliebter des a*

Sie entstehen durch *Genitivattribut mit Eigennamen.*

Die „Kopula der Relative“

Die klassische Kopula der Gemeinnamen, $M\,a\,L$, in

„*Alle* Menschen *sind* Lebewesen“,

verallgemeinert Peirce zu einer *Kopula der Relative*:

$$(R\,a\,S)(x,z) :\Longleftrightarrow \forall z(R(x,z) \to S(z,y))$$

Beispiel: $L =$ liebt, $D =$ dient, $(L\,a\,D)(x,y) =$

„*Alle* von x geliebten *sind* Diener von y”

Entsprechend kann man die kategorischen Aussagen der klassischen Logik verallgemeinern:

$$\begin{aligned} (R\,e\,S)(x,y) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall z(R(x,z) \wedge \overline{S}(z,y)) \\ (R\,i\,S)(x,y) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists z(R(x,z) \wedge S(z,y)) \\ (R\,o\,S)(x,y) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists z(R(x,z) \wedge \overline{S}(z,y)) \end{aligned}$$

Bem.: Die Kopula der Relative kann durch

$$x(L\,a\,D)y \quad = \quad (xL)\,a\,(Dy).$$

auf die Kopula der Gemeinnamen und das Festhalten von Argumenten reduziert werden.

Graphischer Kalkül der Relative

Die Relativkopula stellt Peirce graphisch in der Form

$$\boxed{\cdot\ \text{Antezedens}\ \cdot-}\!-\cdot\ \text{Konsequenz}\cdot$$

dar, wobei $\boxed{\cdot\ R\ \cdot-}\!-\cdot\ S\cdot$ der Formel $R\,a\,S$ entspricht.

Entsprechend für Relative verschiedener Stelligkeit:

$$\boxed{\cdot\,\text{R}\ \cdot-}\!-\cdot\,\text{S} \quad \text{für} \quad \forall z(R(x,z) \to S(z))$$

Beisp.: „Alexander steht nur zu ehrenhaften Personen in der Relation ‘x liebt nur diejenigen, die y fördern’“:

$$\boxed{\text{ist Alex.}\ \cdot-}\!-\cdot\ \boxed{-\boxed{\text{liebt}\ \cdot-}\!-\cdot\ \text{fördert}\ \cdot-}\!-\cdot\ \text{ist ehrenhaft}$$

Die Algebra dyadischer Relationen

Pierce betrachtet vier Grundoperationen:

(i) das *Komplement* einer Relation,

$$\overline{R} := \{(a,b) \mid \neg\, R(a,b)\}$$

(ii) das *nicht-relative Produkt* zweier Relationen,

$$R \cdot S := \{(a,b) \mid R(a,b) \wedge S(a,b)\}$$

(iii) die *Konverse* einer Relation,

$$\breve{R} := \{(b,a) \mid R(a,b)\}$$

(iv) die *relative Summe* zweier Relationen,

$$R \mathbin{\overset{+}{;}} S := \{(a,c) \mid \forall b(R(a,b) \vee S(b,c)\}$$

Definierbar sind die *nicht-relative Summe* und das *relative Produkt*:

$$R + S := \overline{\overline{R} \cdot \overline{S}} = \{(a,b) \mid R(a,b) \vee S(a,b)\}$$

$$R \,;\, S := \overline{\overline{R} \mathbin{\overset{+}{;}} \overline{S}} = \{(a,c) \mid \exists b(R(a,b) \wedge S(b,c)\}$$

Relative Divisionen

Auch die „Divisionen mit Rest“ sind definierbar, das *linke Residuum von R durch S*,

$$S \backslash R := \overline{\breve{S} ; \overline{R}} = \{(a, c) \mid \forall b(S(b, a) \to R(b, c))\}$$

und das *rechte Residuum von R durch S*,

$$R/S := \overline{\overline{R} ; \breve{S}} = \{(a, c) \mid \forall b(S(b, c) \to R(a, b))\}$$

Zeige:

a) $S \backslash R$ ist die *größte Relation* X mit $S; X \subseteq R$.

b) R/S ist die größte Relation X mit $X; S \subseteq R$.

Beisp.: (Pratt 1991) Sei k = king, t = tax, L = loves, P = pays. Dann heist

$$\begin{aligned} (L \backslash P)(k, t) &= k(L \backslash P)t = (Lk)\, a\, (Pt) \\ &= \forall z(zLk \to zPt) \\ &= \text{Those who love the king pay the taxes.} \end{aligned}$$

Temporale Interpretation der Junktoren

Man kann die Operatoren $;$, $\dagger$, $\backslash$ und $/$ als logische Junktoren mit *temporaler* Bedeutung interpretieren:

$$
\begin{array}{rcl}
(\varphi \,;\, \psi) & := & \textit{vorher } \varphi \textit{ und jetzt } \psi \\
(\varphi \dagger \psi) & := & \textit{vorher } \varphi \textit{ oder jetzt } \psi \\
(\varphi \backslash \psi) & = & (\varphi \to \psi) \;=\; \text{„\textit{Präimplikation}“} \\
 & := & \textit{wenn vorher } \varphi\textit{, dann jetzt } \psi \\
(\psi / \varphi) & = & (\psi \leftarrow \varphi) \;=\; \text{„\textit{Postimplikation}“} \\
 & := & \textit{wenn jetzt } \varphi\textit{, dann vorher } \psi
\end{array}
$$

Beisp. (Pratt 1991) φ := Ich wette, daß χ.
ψ := Ich gewinne viel Geld.

Dann hat man

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi \,;\, \chi \,;\, (\varphi \to (\chi \to \psi)) & \models & \psi. \\
\chi \,;\, (\varphi \to (\chi \to \psi)) \,;\, \varphi & \not\models & \psi.
\end{array}
$$

Präimplikation: *If I bet on the horse and the horse then wins, I'll be rich.*

Postimplikation: *Had I bet on the horse, then, since the horse won, I would be rich.*

Axiome der Relationenalgebra

Eine *Relationenalgebra* (Tarski 1955)

$$(M, +, \cdot, -, 0, 1, ;, ^\smile, I)$$

besteht aus einer Menge M von „Relationen“ sodaß

(i) $(M, +, \cdot, -, 0, 1)$ ist eine Boole'sche Algebra

und für alle $r, s, t \in R$ gelten:

(ii) $r; (s; t) = (r; s); t$

(iii) $r; I = r = I; r$

(iv) $r^{\smile\smile} = r$

(v) $(r + s); t = (r; t) + (s; t)$

(vi) $(r + s)^\smile = r^\smile + s^\smile$

(vii) $(r; s)^\smile = s^\smile; r^\smile$

(viii) $r^\smile;\ -(r; s) \leq -s$,

wobei $r \leq s :\iff r + s = s$ ist.

Bezeichnungen:

(i) r heißt *reflexiv*, falls $I \leq r$.

(ii) r heißt *transitiv*, falls $r\,;r \leq r$.

(iii) r heißt *symmetrisch*, falls $r^{\smile} \leq r$.

Eine Relation r ist eine *(totale) Äquivalenz*, falls r (reflexiv,) transitiv und symmetrisch ist.

Standardinterpretation

Die *volle Relationenalgebra über der Menge U* ist

$$(2^{U\times U}, \cup, \cap, -, \emptyset, 1, ;\,, {}^{\smile}, I)$$

mit

$$\begin{array}{rcl} 1 & := & U \times U, \\ -r & := & \{(a,b) \in U \times U \mid (a,b) \notin r\}, \\ r\,;s & := & \{(a,c) \mid \exists b \in U \ (a,b) \in r \wedge (b,c) \in s\}, \\ r^{\smile} & := & \{(a,b) \mid (b,a) \in r\}, \\ I & := & \{(a,a) \mid a \in U\}. \end{array}$$

Einfache Sätze

Satz (Chin, Tarski 1951) In jeder Relationenalgebra gilt für jedes r, s, t, u:

(i) $0^\smile = 0$, $1^\smile = 1$ und $I^\smile = I$,

(ii) $r \leq s$ gdw. $r^\smile \leq s^\smile$

(iii) $(r \cdot s)^\smile = r^\smile \cdot s^\smile$ und $(-r)^\smile = -(r^\smile)$

(iv) $r\,;0 = 0 = 0\,;r$ und $1\,;1 = 1$

(v) $r\,;(s + t) = (r\,;s) + (r\,;t)$

(vi) Wenn $r \leq s$ so ist $t\,;r \leq t\,;s$ und $r\,;t \leq s\,;t$

(vii) $(r\,;s)\cdot t = 0$ gdw. $(r^\smile;t)\cdot s = 0$ gdw.$(t\,;s^\smile)\cdot r = 0$

(viii) $(r\,;s) \cdot (t\,;u) \leq r\,;((r^\smile;t) \cdot (s\,;u^\smile))\,;u$

(ix) Wenn $r \leq I$, dann ist r eine Äquivalenz

(x) Wenn $s\,;1 = s$, dann ist $r \cdot s = (s \cdot I)\,;r$

Eine Relationenalgebra M ist *einfach*, wenn 1 und I die einzigen Äquivalenzen in M sind.

Satz (Tarski, Jónsson 1952) M ist einfach gdw.

$\forall r(r \neq 0 \to (1\,;r\,;1 = 1)$ gdw.
$\forall r(r = 1\,;r\,;1 \leftrightarrow (r = 0 \vee r = 1))$.

Komplexität der Relationenalgebra

Satz (Schröder 1895) Jede Aussage der Relationenalgebra kann auf die Form $R = S$ gebracht werden.

Daher genügt eine reine *Gleichungslogik*. Gleichungen, die nur die Boole'schen Operationen enthalten, sind mit der *boole'schen Unifikation* lösbar.

Frage Wie weit kann man das auf Gleichungen ausdehnen, in denen auch die Operationen $;$ und I benutzt werden?

Bem. (Tarski 1941) Eine Relation R ist

(i) eine surjektive Funktion, falls $R^{\smile} ; R = I$,

(ii) total und injektiv, falls $(R ; R^{\smile}) = I$.

Die Relationen mit beiden Eigenschaften erfüllen die Axiome der Gruppentheorie.

Da die Gruppentheorie unentscheidbar ist, ist es auch die (Horntheorie der) Relationenalgebra.

Die elementare Theorie der dyadischen Relationen

A.Tarski (1941) faßt die Relationenalgebra als Teil einer logischen Theorie mit folgenden Axiomen auf:

1.	$\forall x \forall y$	$x1y$
2.	$\forall x \forall y$	$\neg\, x0y$
3.	$\forall x$	$x1'x$
4.	$\forall x \forall y \forall z$	$((xRy \wedge y1'z) \rightarrow xRz)$
5.	$\forall z \forall y$	$(x0'y \leftrightarrow \neg\, x1'y)$
6.	$\forall x \forall y$	$(x\overline{R}y \leftrightarrow \neg\, xRy)$
7.	$\forall x \forall y$	$(x\breve{R}y \leftrightarrow yRx)$
8.	$\forall x \forall y$	$(x(R \cdot S)y \leftrightarrow (xRy \wedge xSy))$
9.	$\forall x \forall y$	$(x(R + S)y \leftrightarrow (xRy \vee xSy))$
10.	$\forall x \forall y$	$(x(R \dagger S)y \leftrightarrow \forall z(xRz \vee zSy))$
11.	$\forall x \forall y$	$(x(R\,;S)y \leftrightarrow \exists z(xRz \wedge zSy))$
12.		$R = S \leftrightarrow \forall x \forall y(xRy \leftrightarrow xSy)$

1 bzw. 0 sind die universelle bzw. leere Relation,

$\overline{R}$, $R + S$, $R \cdot S$ sind Komplement, Vereinigung und Durchschnitt,

$\breve{R}$ ist die Inverse von R,

$R \dagger S$, $R\,;S$ sind relative Summe und Produkt

$R = S$ ist die extensionale Gleichheit von Relationen

Relationen und Mengen

Durch Anwenden der Relationenkopula auf Relationen unterschiedlicher Stelligkeit erhält man weitere sprachlich übliche Konstruktionen:

Peirce'sches Produkt

Aus transitiven Verben erhält man einstellige Prädikate auch durch *Genitivattribut mit einem Gemeinnamen*:

$$R : B := \{a \mid \exists b(R(a, b) \wedge B(b))\}$$

Beispiel: $L : F =$ Liebhaber einer Frau

Das Peirce'sche Produkt der Relation R mit der Menge B ist das *Urbild von b unter R*.

Bild einer Menge unter einer Relation

Das *Bild der Menge B unter der Relation R* ist

$$R''B := \{a \mid \exists b(B(b) \wedge R(b, a)\}.$$

Beispiel: $L''F =$ Geliebter einer Frau

Peirce'sche Algebren

Ein *Boole'scher Modul* (Brink 1988) $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mathcal{R}, :)$ besteht aus

(i) einer Boole'schen Algebra $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$,

(ii) einer Relationenalgebra $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1, ;, \breve{}, I)$,

(iii) und einer Abbildung : von $\mathcal{R} \times \mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}$, so daß für alle $a, b \in B$ und $r, s \in R$ gilt:

  (a) $r : (a + b) = r : a + r : b$,

  (b) $(r + s) : a = r : a + s : a$,

  (c) $r : (s : a) = (r ; s) : a$,

  (d) $I : a = a$,

  (e) $0 : a = 0$

  (f) $\breve{r} : -(r : a) \leq -a$.

Eine *Peirce'sche Algebra* (Britz 1988) $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ ist ein Boole'scher Modul mit einer Abbildung $^c : \mathcal{B} \to \mathcal{R}$, so daß für alle $a \in B$ und $r \in R$ gilt:

(i) $a^c : 1 = a$,

(ii) $(r : 1)^c = r ; 1$.

Beispiel

Die *volle Peirce'sche Algebra über der Menge* V ist

$$P(V) := (\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, {}^c),$$

wobei

(i) $\mathcal{B}$ die volle Boole'sche Algebra über V ist,

(ii) $\mathcal{R}$ die volle Relationenalgebra über V ist, und

(iii) $A^c := A \times V$ für jedes $A \subseteq V$.

A^c heißt die *Rechtszylindrifizierung* von A. Sie erfüllt die Axiome:

$$A^c : 1 = (A \times V) : V = A.$$

$$\begin{aligned}
(R:1)^c &= (R:V)^c \\
&= (R:V) \times V \\
&= \{a \in V \mid \exists b \in V\, R(a,b)\} \times V \\
&= R\,;(V \times V) \\
&= R\,;1.
\end{aligned}$$

In einer Peirce'schen Algebra $P(V)$ hat man

(i) das *kartesische Produkt zweier Mengen*:

$$\begin{aligned} A \times B &:= \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= (A \times V) \cap (V \times B) \\ &= A^c \cap (B^c)^{\smile} \end{aligned}$$

(ii) die *Vorbeschränkung einer Relation auf eine Menge*:

$$\begin{aligned} R \upharpoonright A &:= \{(a,b) \mid a \in A, b \in V, R(a,b)\} \\ &= R \cap (A \times V) \\ &= R \cap A^c. \end{aligned}$$

(iii) Die *Beschränkung der Identität auf eine Menge*,

$$\begin{aligned} I_A &:= \{(a,a) \mid a \in A\} \\ &= I \cap (A \times V) \\ &= I \cap A^c \end{aligned}$$

Daraus folgt die Definierbarkeit vieler weiterer Mengen und Relationen, und Zusammenhänge der Mengenoperationen mit $\times$, z.B.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Testfunktionen

Aufgabe: Zeige, daß man in $P(V)$ die Tests

$$
\begin{aligned}
U(X) &:= \begin{cases} V, & \text{falls } V = X, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases} \\
E(X) &:= \begin{cases} V, & \text{falls } X \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

aus X mit den Operationen der Peirce'schen Algebra definieren kann.

Wir benutzen die Boole'schen Werte $1 = V$ und $0 = \emptyset$ von $P(V)$ nun als Wahrheitswerte *wahr* und *falsch*.

Peirce'sche Grammatiken
(Suppes 1975-80, Böttner 1997)

Eine *Peirce'sche Grammatik* (G, F, v) besteht aus

(i) einer kontextfreien Grammatik $G = (\Sigma, N, P, S)$,

(ii) einer *Denotationsfunktion* F, die jeder Regel $A \to A_1 \cdots A_k \in P$ eine k-stellige Peirce'sche Funktion $F_{A \to A_1 \cdots A_k}$ zuordnet, und

(iii) einer partiellen *Belegung* $v : \Sigma \to P(D)$ der Terminale durch Elemente von $P(D)$, der vollen Peirce'schen Algebra über der Menge D.

Jedem Syntaxbaum t eines Ausdrucks $w \in \Sigma^+$ bezüglich G wird eine *Denotation* $[\![t]\!]_v \in P(D)$ zugeordnet:

(i) Ist $t = \cdot a$, so ist $[\![t]\!]_v := v(a)$, für $a \in \Sigma$,

(ii) Ist $t = A(t_1, \ldots, t_k)$ und A_i die Wurzelmarke von t_i, so ist

$$[\![t]\!]_v := F_{A \to A_1 \cdots A_k}([\![t_1]\!]_v, \ldots, [\![t_k]\!]_v).$$

Statt $F_{A \to A_1 \cdots A_k}(X_1, \ldots, X_k)$ schreibe ich

$$A(f(X_1, \ldots, X_k)) \to A_1(X_1) \cdots A_k(X_k),$$

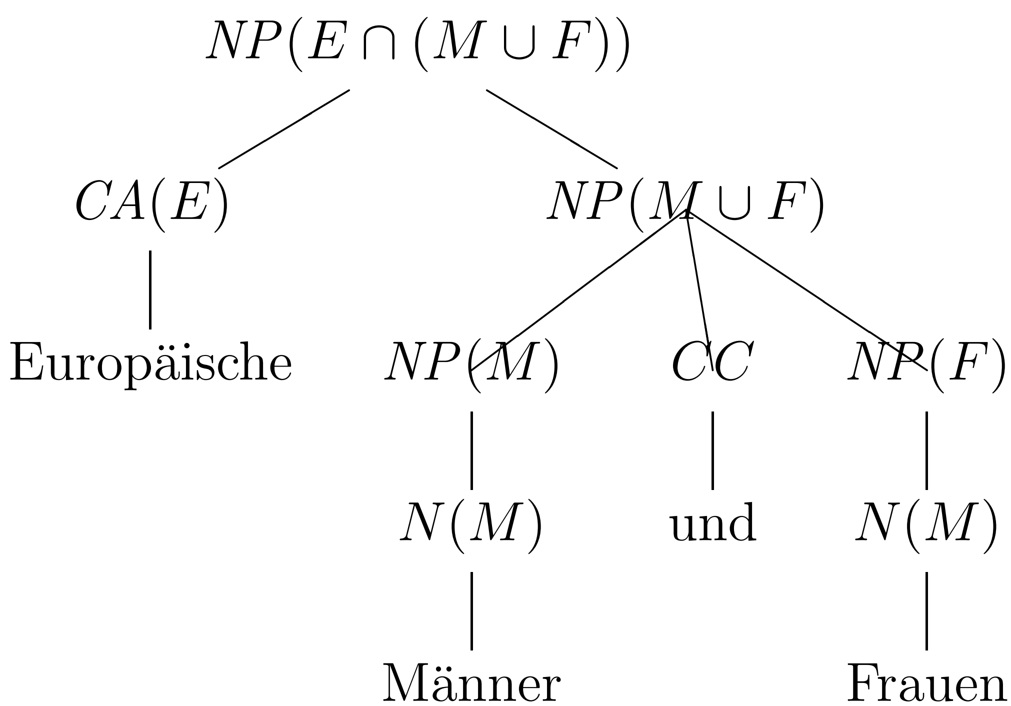
wobei $f(X_1, \ldots, X_k)$ aus $X_1, \ldots, X_k$ mit Peirce'schen Operationen aufgebaut ist.

Eine *Boole'sche Grammatik* ist eine Peirce'sche Grammatik, in der in den Funktionen $f(X_1, \ldots, X_k)$ nur die Boole'schen Operatoren verwendent werden.

Boole'sche Grammatik

Beisp.(Boole) CA := klassifikatorisches Adjektiv,
CC := konjunktivische Koordination.

$$
\begin{array}{rcll}
NP(X \cap Y) & \rightarrow & CA(X) \cdot NP(Y) & (2) \\
NP(X \cup Z) & \rightarrow & NP(X) \cdot CC \cdot NP(Z) & (3) \\
NP(X) & \rightarrow & N(X) & (4) \\
CC & \rightarrow & \text{und} & (5) \\
N(X) & \rightarrow & \text{Männer} \mid \text{Frauen} & (6) \\
CA(X) & \rightarrow & \text{Europäisch} & (7) \\
v(\text{Frauen}) = F, & \cdots, & v(\text{Europäisch}) = E. & (8)
\end{array}
$$



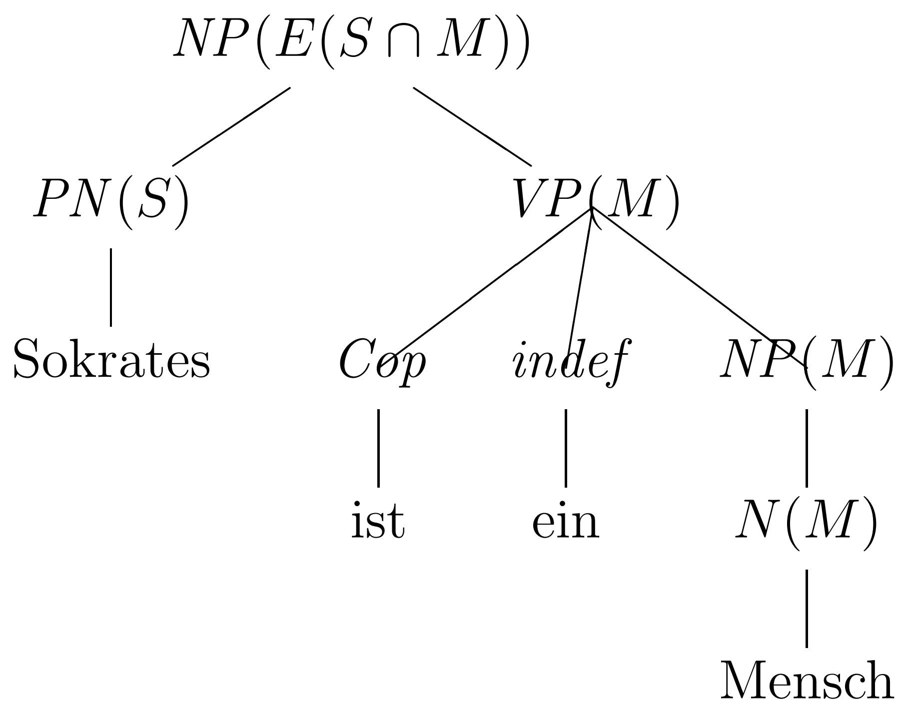
Grammatik kategorischer Aussagen
(nach Böttner 1997)

Bei Aristoteles sind Quantoren *nicht* Teil der Nominalphrasen, sondern der Kopula.

$$
\begin{aligned}
S(E(X \cap Y)) &\rightarrow PN(X) \cdot VP(Y) && (1)\\
VP(Y) &\rightarrow IV(Y) && (2)\\
VP(Y) &\rightarrow Cop \cdot AP(Y) && (3)\\
VP(Y) &\rightarrow Cop \cdot indef \cdot NP(Y) && (4)\\
AP(Y) &\rightarrow CA(Y) && (5)\\
NP(X) &\rightarrow N(X) && (6)\\
n\,VP(\overline{Y}) &\rightarrow Cop \cdot neg \cdot CA(Y) && (7)\\
S(U(\overline{X} \cup Y)) &\rightarrow UQ \cdot NP(X) \cdot VP(Y) && (8)\\
S(E(X \cap Y)) &\rightarrow EQ \cdot NP(X) \cdot VP(Y) && (9)\\
S(N(X \cap Y)) &\rightarrow NQ \cdot NP(X) \cdot VP(Y) && (10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U(X) &:= \begin{cases} V, & \text{falls } V = X, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}\\
E(X) &:= \begin{cases} V, & \text{falls } X \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}\\
N(X) &:= \begin{cases} V, & \text{falls } X = \emptyset, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

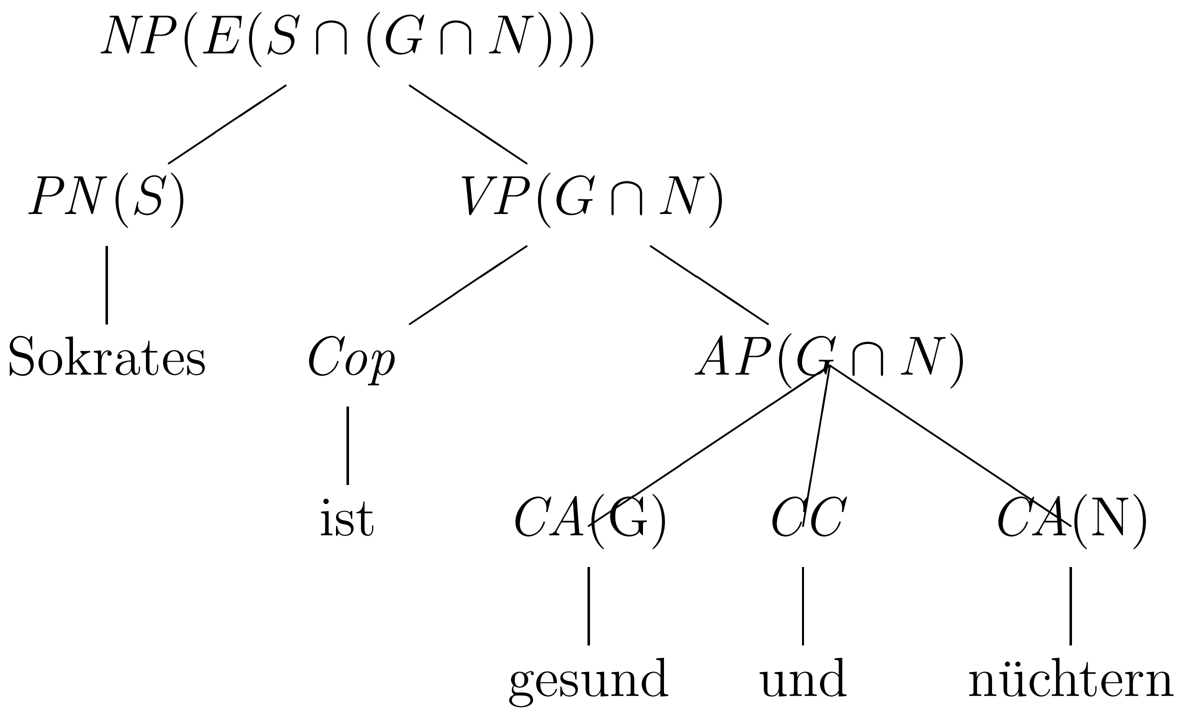
Beispiele



Adjektivkonjunktion

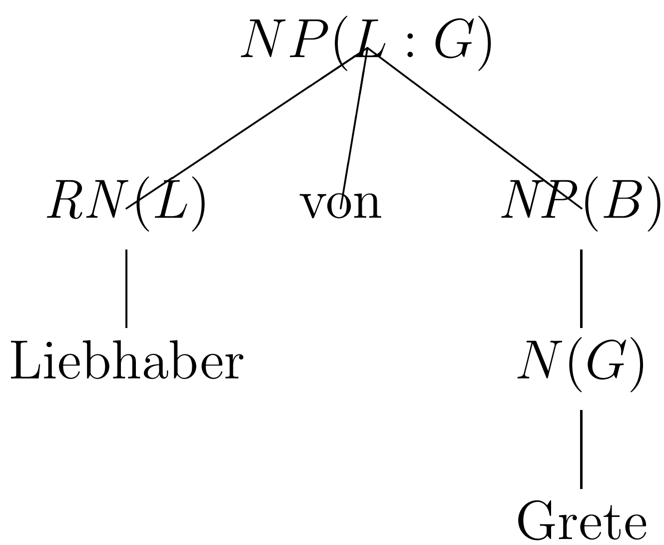
Dagegen ist die Bedeutung der Adjektivkonjunktion:

$$AP(X \cap Y) \quad \rightarrow \quad CA(X) \cdot CC \cdot CA(Y) \qquad (11)$$



Relationsnomen und Präpositionalobjekt

$$NP(X:Y) \quad \to \quad RN(X) \cdot von \cdot PN(Y) \qquad (11)$$



Relationale Aussagen und quantifizierte Objekte

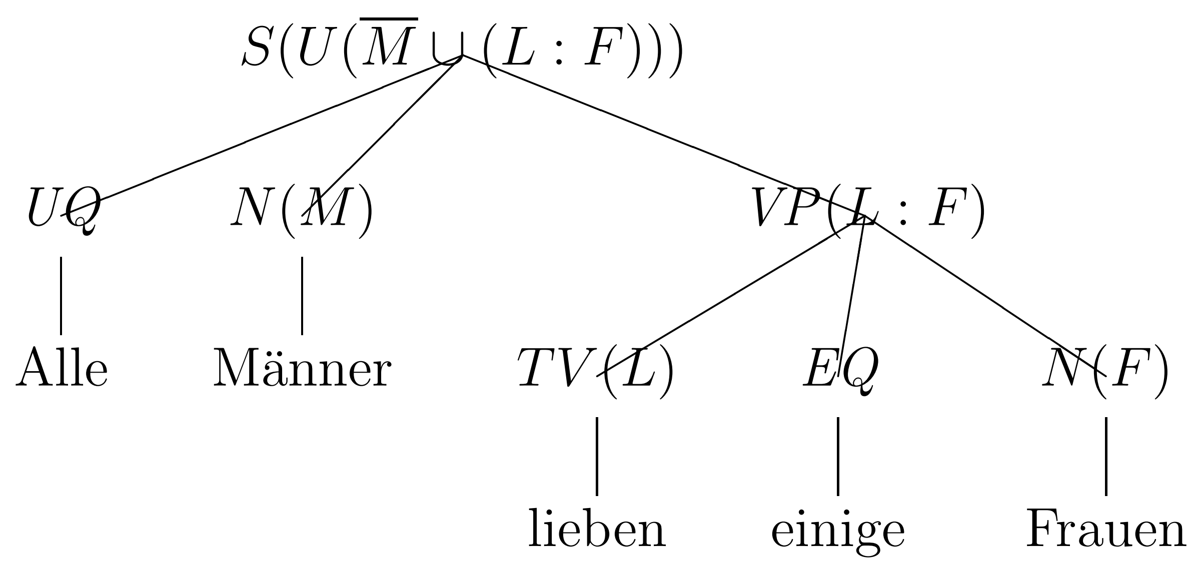
Für Relationen R und Mengen A sei

$$
\begin{aligned}
R[A] \quad &:= \quad \overline{\overline{R}'' A} \\
&= \quad V - \{b \mid \exists a \in A \, \neg R(a,b)\} \\
&= \quad \{b \mid \forall a \in A \, R(a,b)\}
\end{aligned}
$$

$$VP(X^{\smile}[Y]) \quad \rightarrow \quad TV(X) \cdot UQ \cdot NP(Y) \qquad (12)$$

$$VP(X : Y) \quad \rightarrow \quad TV(X) \cdot EQ \cdot NP(Y) \qquad (13)$$

$$VP(\overline{X : Y}) \quad \rightarrow \quad TV(X) \cdot NQ \cdot NP(Y) \qquad (14)$$



$$NP \to Det \cdot N \quad \textbf{?}$$

Frege: Quantoren sind *nicht* Teil des Subjekts:

$$\begin{aligned} \neg(x \ \mathit{ist\ ein}\ N) &:= x \ \mathit{ist\ kein}\ N, \\ \neg(\mathit{alle}\ X \ \mathit{sind}\ N) &:= \mathit{nicht\ alle}\ X \ \mathit{sind}\ N, \\ &\neq \mathit{alle}\ X \ \mathit{sind\ keine}\ N. \end{aligned}$$

Lemma (Suppes 1976) Es gibt keine Boole'sche Grammatik, bei der die Quantoren Teil der *NP* sind, d.h. mit den Regeln

$$\begin{aligned} S &\to NP \cdot VP \\ NP &\to UQ \cdot N \\ NP &\to EQ \cdot N \end{aligned}$$

und die semantisch korrekt ist.

Beweis: Man zeigt, daß in der Boole'schen Algebra $\{0, 1\}$ keine Funktionen f, g, φ existieren mit

$$\begin{aligned} S(\varphi(X, Y)) &\to NP(X) \cdot VP(Y) \\ NP(f(X)) &\to UQ \cdot N(X) \\ NP(g(X)) &\to EQ \cdot N(X) \end{aligned}$$

Solche Funktionen müßten die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
\varphi(f(0),0) &= U(\overline{0}+0)=1\\
\varphi(f(0),1) &= U(\overline{0}+1)=1\\
\varphi(f(1),0) &= U(\overline{1}+0)=0\\
\varphi(f(1),1) &= U(\overline{1}+1)=1\\
\varphi(g(0),0) &= E(\overline{0}\cdot 0)=0\\
\varphi(g(0),1) &= E(\overline{0}\cdot 1)=0\\
\varphi(g(1),0) &= E(\overline{1}\cdot 0)=0\\
\varphi(g(1),1) &= E(\overline{1}\cdot 1)=1
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich ein Widerspruch:

f und g sind nicht konstant (1.+3. bzw. 6.+8.), außerdem $f(0) \neq g(0)$ wegen $\varphi(f(0),1) \neq \varphi(g(0),1)$.

Wäre $f(0) = 0 \neq g(0) = 1$, so wäre wegen $g(0) \neq g(1)$

$$1 = \varphi(f(0),0) = \varphi(0,0) = \varphi(g(0),0) = 0.$$

Analog im anderen Fall. $\square$

Interpretation von Befehlen

Auch *Befehle*, z.B. Programme α einer imperativen Programmiersprache, sind in $P(V)$ interpretierbar.

Der Individuenbereich V ist die Menge der *Zustände des Speichers*.

$$
\begin{array}{llcll}
\textit{Befehle}: & \alpha & := & a & \text{Grundbefehl} \\
 & & \mid & (\alpha\,;\beta) & \text{Sequenz} \\
 & & \mid & (\alpha+\beta) & \text{Alternative} \\
 & & \mid & \alpha^* & \text{Iteration (Schleife)}
\end{array}
$$

Jeder Grundbefehl a wird als *Speicherveränderung* $R_a \subseteq V \times V$ interpretiert. Die Iteration R^* von R ist die *reflexive transitive Hülle* von $R \subseteq V \times V$.

Grundbefehle sind z.B. $x := x + 1$ oder $x := y$. Ein *Speicherzustand* $v \in V$ ist eine Belegung der Variablen $x, y, \ldots$ durch Zahlen.

Beispiel: Das Programm

$$\alpha := (x := 2); ((x := x + 1) + (x := x + x)).$$

hat die Bedeutung

$$R_\alpha = \{(v, w) \mid v \in V, w \in V, w(x) \in \{3, 4\}\}.$$

Progamme mit Tests

Realistischer sind Programme mit Test,

$$\begin{array}{rrcl} \textit{Tests}: & t & := & x = 0? \mid x = y? \\ & & \mid & (t_1 \wedge t_2) \mid (t_1 \vee t_2) \mid \neg t \end{array}$$

Einem Test t entspricht zunächst eine Eigenschaft $E_t \subseteq V$ von Zuständen,

$$E_t = \{v \in V \mid v \text{ erfüllt die Bedingung } t\}.$$

Man kann sie aber auch als Relationen interpretieren: falls die Eigenschaft erfüllt ist, darf man mit der Berechnung fortfahren, sonst nicht:

$$I_t = \{(v, v) \mid v \in E_t\} \subseteq I.$$

Damit kann man die üblichen Konstrukte sequentieller imperativer Programmiersprachen definieren:

$$\begin{array}{rcl} \textit{(if } t \textit{ then } \alpha \textit{ else } \beta\textit{)} & := & (t\,;\alpha) + (\neg t\,;\beta) \\ \textit{(while } t \textit{ do } \alpha\textit{)} & := & (t\,;\alpha)^*; (\neg t\,;1) \end{array}$$

Beisp. $(\textit{while}\, x < 5 \textit{ do } x := x{+}2)$ hat die Bedeutung

$$\begin{array}{l} \{(v, w) \mid v(x) \in \{0, 2, 4\}, w = v\{6/x\}\} \\ \quad \cup \quad \{(v, w) \mid v(x) \in \{1, 2, 3\}, w = v\{5/x\}\} \\ \quad \cup \quad \{(v, v) \mid v(x) > 5\}. \end{array}$$

Sinn und Bedeutung von Termen

G. Frege untersucht *die Gleichheit von Gegenständen a und b als Zeichen*, $a =_{Zeichen} b$, wobei *Zeichen, Namen* „einen Eigennamen vertreten, deren Bedeutung ein Gegenstand (im weitesten Sinn) ist“ (S.41).

Einem Zeichen a kann zugeordnet sein:

eine *Vorstellung* $\langle\!|\, a \,|\!\rangle$,
ein *Sinn* $\{\!|\, a \,|\!\}$,
eine *Bedeutung* $[\![a]\!]$.

Mit dem Sinn definiert man die Zeichengleichheit:

$$t =_{Zeichen} s \quad :\Longleftrightarrow \quad \{\!|\, t \,|\!\} = \{\!|\, s \,|\!\}.$$

Def 1 Der *Sinn* $\{\!|\, t \,|\!\}$ des Zeichens t ist die *Art des Gegebenseins seiner Bedeutung.* Die *Bedeutung* $[\![t]\!]$ *des Zeichens* t ist der mit t bezeichnete Gegenstand.

Def 2 Ein Term t *drückt* den Sinn $\{\!|\, t \,|\!\}$ *aus* und *bezeichnet* die Bedeutung $[\![t]\!]$.

Freges Annahmen über Sinn und Bedeutung von Termen

(i) Der Sinn $\{\!|\, t \,|\!\}$ hängt von einem *Kontext* Γ ab:

$$\{\!|\, t \,|\!\}_\Gamma.$$

Daher: jedes Vorkommen von t in einem Ausdruck φ kann einen anderen Sinn haben.

(ii) Der Sinn $\{\!|\, t \,|\!\}$ existiert immer und ist unabhängig von der Bedeutung $[\![t]\!]$.

(iii) Die Bedeutung hängt funktional vom Sinn ab, existiert aber nicht immer: es gibt eine partielle Funktion E mit

$$[\![t]\!] = E(\{\!|\, t \,|\!\}).$$

Daher: Falls $\{\!|\, a \,|\!\} = \{\!|\, b \,|\!\}$, so ist

$$[\![a]\!] = E(\{\!|\, a \,|\!\}) = E(\{\!|\, b \,|\!\}) = [\![b]\!].$$

Die Beispiele für Terme sind bei Frege meist definite Beschreibungen, $\iota x.\varphi$ mit Aussagen φ. z.B. *der von der Erde am weitesten entfernte Himmelskörper*, oder *der Schnittpunkt der Geraden a und b*.

Gerader und ungerader Gebrauch

Wörter haben in der direkten Rede *gewöhnliche* oder *gerade* Bedeutung/Sinn und in der indirekten Rede *ungewöhnliche* oder *ungerade* Bedeutung/Sinn:

„Wenn man in der gewöhnlichen Weise Worte gebraucht, so ist das, wovon man sprechen will, deren Bedeutung“:

$$P(t): \qquad [\![t]\!] \in \textit{Umfang von } P.$$

Wenn man von den Worten selbst oder ihrem Sinn reden will, gebraucht man sie in ungewöhnlicher Weise:

$$
\begin{aligned}
&a\ \textit{sagte: „}\varphi\textit{“}:\\
&\qquad [\![\varphi]\!]_\Gamma = \varphi, \quad \text{für } \Gamma = a\ \textit{sagte: „}\cdot\textit{“}\\
&a\ \textit{glaubt, daß}\ \varphi:\\
&\qquad [\![\varphi]\!]_\Gamma = \{\!|\,\varphi\,|\!\} \quad \text{für } \Gamma = a\ \textit{glaubt, daß}\ \cdot\\
&\qquad\qquad \in \{g \mid a\ \textit{hält den Gedanken } g \textit{ für wahr.}\}
\end{aligned}
$$

Gewöhnlicher Gebrauch: a,
ungewöhnlicher Gebrauch: „a“ bzw. *der Sinn von a.*

Kompositionsprinzipien für Sinn und Bedeutung

Frege macht folgende (zu präzisierende) Annahmen:

(i) *Kompositionsprinzip für* $\{\!|\cdot|\!\}$: Der Sinn eines Satzes hängt nur vom Sinn, nicht von der Bedeutung seiner Teilausdrücke ab.

(ii) *Kompositionsprinzip für* $[\![\cdot]\!]$: Die Bedeutung eines Satzes hängt nur von der Bedeutung, nicht vom Sinn seiner Teilausdrücke ab.

(iii) *Striktheit der Bedeutung* $[\![\cdot]\!]$: Existiert $[\![\varphi]\!]$, so auch $[\![a]\!]$ für alle Teilausdrücke a von φ.

Die Kompositionsprinzipien besagen: $\{\!|\varphi|\!\}$ bzw. $[\![\varphi]\!]$ kann rekursiv über den Aufbau von φ (und dem impliziten Kontext Γ) definiert werden.

Sinn und Bedeutung von Aussagen

(i) Der Sinn $\{\!|\varphi|\!\}$ eines Behauptungssatzes φ ist ein *Gedanke*.

(ii) Die Bedeutung $[\![\varphi]\!]$ eines Behauptungssatzes φ ist ein *Wahrheitswert*.

	Name t	Satz φ
Vorstel-lung	$\langle\!|\, t \,|\!\rangle$ (subjektiv, zeitlich)	Bild $\langle\!|\, \varphi \,|\!\rangle$ (subjektiv)
Sinn	Art $\{\!|\, t \,|\!\}$ d. Gegebenseins $t \mapsto \{\!|\, t \,|\!\}$ ist total	Gedanke $\{\!|\, \varphi \,|\!\}$ $\varphi \mapsto \{\!|\, \varphi \,|\!\}$ ist total
Bedeu-tung	Gegenstand $[\![t]\!]$ $t \mapsto [\![t]\!]$ ist partiell	Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]$ $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$ ist partiell

Warum ist $[\![\varphi]\!]$ kein Gedanke?

Beh. 1 Die Bedeutung $[\![\varphi]\!]$ eines Aussagesatzes φ ist nicht der in ihm enthaltene Gedanke.

Beweis: Der in φ enthaltene Gedanke kann sich ändern, wenn man in φ einen Namen a durch einen Namen b mit $\{\!|\, a \,|\!\} \neq \{\!|\, b \,|\!\} \wedge [\![a]\!] = [\![b]\!]$ ersetzt, z.B. bei

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & \text{„}x \textit{ ist ein von der Sonne} \\ & & \qquad \textit{beschienener Himmelskörper}\text{“}, \\ a & = & \textit{der Morgenstern}, \\ b & = & \textit{der Abendstern}. \end{array}$$

Nach dem Kompositionsprinzip ist

$$[\![\varphi[a/x]]\!] = [\![\varphi[b/x]]\!],$$

aber ggf.

$$[\![A \textit{ glaubt } \varphi[a/x]]\!] = 1 \neq 0 = [\![A \textit{ glaubt } \varphi[b/x]]\!].$$

Also kann „der in φ enthaltene Gedanke“ nicht seine Bedeutung sein (wenn der Glaubensinhalt[8] *der in φ enthaltene Gedanke* ist). $\square$

[8] Das Argument zeigt, daß die Termpositionen in Komplementsätzen von Glaubensprädikaten nicht extensional sind.

Da nur zwischen der *Bedeutung* $[\![\varphi]\!]$ und dem *Sinn* $\{\!|\varphi|\!\}$ von φ unterschieden werden soll, muß *der in* φ *enthaltene Gedanke* $= \{\!|\varphi|\!\}$ sein.

Es gibt Aussagesätze ohne Bedeutung, insbesondere die, in denen Terme vorkommen, die keine Bedeutung haben.[9] Außerdem haben Befehlssätze nur einen Sinn, aber keine Bedeutung.[10]

[9] Aber auch paradoxe Sätze wie der Lügnersatz *Dieser Satz ist falsch*, dessen Terme alle eine Bedeutung haben. Oder soll man sagen, er enthält den nicht-denotierenden Term *dieser Satz = der durch diesen Satz ausgedrückte Gedanke*?

[10] Das würde man heute wohl nicht mehr so sehen: die Bedeutung eines Befehls ist die Gesamtheit der durch seine Ausführungen bewirkten Zustandsveränderungen.

Bedeutung von Begriffen

Im Nachlaß von Frege wird die Unterscheidung auf Begriffe ausgedehnt.

(i) „Ein *Begriff* B ist eine Funktion eines Arguments, deren Wert ein Wahrheitswert ist.“

$$\begin{array}{lcl} \textit{Begriff } B & = & B : V \to \{0,1\}, \\ \textit{Umfang } U(B) & := & \{v \in V \mid B(v) = 1\}. \end{array}$$

Jedes $U \subseteq V$ ist Umfang eines Begriffs:

$$\chi_U(v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \in U, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} .$$

(ii) Die *Bedeutung* $[\![A]\!]$ eines Begriffsworts A ist der Begriff

$$v \mapsto [\![A(x)]\!][v/x].$$

Falls nicht für jedes a eindeutig bestimmt ist, ob a zum Umfang von A gehört oder nicht, hat der Begriff *keine Bedeutung*.

Gleichheit von Gegenständen

Zwei Gegenstände sind gleich, wenn sie unter dieselben Begriffe fallen:

$$a = b :\iff \forall B\,(B(a) = 1 \iff B(b) = 1).$$

Das ist eine Form der Definition von Leibniz:

Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate.

D.h. für Namen mit Substitution, Aussagen und Bedeutung gesagt:

$$s = t :\iff \forall\varphi(x)(\llbracket\varphi[s/x]\rrbracket = \llbracket\varphi[t/x]\rrbracket).$$

Gleichheit von Begriffen

Frege: Zwei Begriffe sind gleich, wenn sie denselben Umfang haben:

$$A = B :\iff \forall a\,(A(a) = 1 \iff B(a) = 1).$$

Trotzdem unterscheidet Frege den *ungesättigten* Begriff von seinem (gesättigten) Umfang, einem Gegenstand.

Der Sinn von Begriffen

„Die Logik muss sowohl vom Eigennamen wie vom Begriffsworte fordern, dass der Schritt vom Worte zum Sinne und der vom Sinne zur Bedeutung unzweifelhaft bestimmt sei.“

„So bezieht sich der Eigenname durch Vermittlung des Sinnes und nur durch diese auf den Gegenstand.“

$$t \mapsto \{\!|\, t \,|\!\}_\Gamma \mapsto [\![t]\!]_\Gamma.$$

Frege sagt nicht, was der Sinn eines Begriffs sein soll. Die Grundidee ist aber offenbar:

Wir *erfassen den Sinn* von Namen t und Begriffswörtern A und können *deshalb* beurteilen, ob $[\![t]\!]$ unter den Begriff $[\![A]\!]$ fällt - sofern beide existieren.

Reichen uns $\{\!|\, A(t) \,|\!\}$ und *die Annahme,* $[\![t]\!]$ *und* $[\![A]\!]$ *existierten*, um $[\![A(t)]\!]$ zu bestimmen? Möglicherweise:

(i) Der *Sinn* $\{\!|\, t \,|\!\}_\Gamma$ eines Namens t ist das (durch t und Γ gegebene) *Verfahren*, $[\![t]\!]$ zu bestimmen.

(ii) Der *Sinn* $\{\!|\, A \,|\!\}_\Gamma$ eines Begriffsworts A ist das (durch A und Γ bestimmte) *Verfahren*, wie man von jedem v feststellt, ob $[\![A(x)]\!][v/x] = 1$ ist.

Kompositionsprinzip der Bedeutung

Für Aussagen $\varphi(t)$, mit ausgezeichnetem Vorkommen des Terms t, ist für eine passende Funktion $F_{\varphi(\cdot)}$

$$[\![\varphi(t)]\!]_\Gamma = F_{\varphi(\cdot)}([\![\varphi(\cdot)]\!]_\Gamma, [\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}}),$$

wobei $\tilde{\Gamma}$ der Kontext bei der Auswertung des Vorkommens von t ist.

Beisp. Für Gemeinnamen A und Eigenname t ist

$$[\![A(t)]\!]_\Gamma = [\![A]\!]_\Gamma([\![t]\!]_\Gamma).$$

Hier ist also $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ und $F_{A(\cdot)}(B, v) := B(v)$ für Begriffe $B : V \to \{0, 1\}$ und Objekte $v \in V$

Wenn man Begriff und Umfang identifiziert:

$$[\![t \text{ ist ein } A]\!]_\Gamma = \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![t]\!]_\Gamma \in [\![A]\!]_\Gamma, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bem. Peano hat $\in$ nach <u>ἐ</u>στίν benannt und $\subset$ nach <u>c</u>*onsequentia*.

Lemma 1 Für Terme s und t und Aussagen $\varphi(\cdot)$ gilt:

$$[\![s]\!]_\Gamma = [\![t]\!]_\Gamma \quad \Rightarrow \quad [\![\varphi(s)]\!]_\Gamma = [\![\varphi(t)]\!]_\Gamma,$$

sofern der Kontext $\tilde{\Gamma}$ von $\cdot$ in $\varphi(\cdot)$ sich nicht von Γ unterscheidet.

Beweis: Sei $a = [\![s]\!]_\Gamma$, $b = [\![t]\!]_\Gamma$ und $B = [\![\varphi(\cdot)]\!]_\Gamma$. Dann ist nach dem Leibniz-Prinzip

$$\begin{array}{rcll} [\![\varphi(s)]\!]_\Gamma & = & F_{\varphi(\cdot)}([\![\varphi(\cdot)]\!]_\Gamma, [\![s]\!]_{\tilde{\Gamma}}) & \text{(Komp.)} \\ & = & F_{\varphi(\cdot)}(B, [\![s]\!]_\Gamma) & (\tilde{\Gamma} = \Gamma) \\ & = & B(a) & \\ & = & B(b) & (a = b) \\ & = & F_{\varphi(\cdot)}([\![\varphi(\cdot)]\!], [\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}}) & \\ & = & [\![\varphi(t)]\!]. & \end{array}$$

Statt $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ reicht $[\![s]\!]_{\tilde{\Gamma}} = [\![s]\!]_\Gamma$ und $[\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}} = [\![t]\!]_\Gamma$. □

Man schreibt heute $\varphi(x)$ und formuliert es als ein *Substitutionslemma*:

$$[\![\varphi(t)]\!]_\Gamma = [\![\varphi(x)]\!]_{\Gamma[[\![t]\!]_\Gamma / x]}$$

Gilt das Substitutionslemma für Teilsätze?

Frege untersucht dann, ob und wann bedeutungsgleiche Teilsätze austauschbar sind, d.h. ob auch gilt:

$$[\![\psi_1]\!]_\Gamma = [\![\psi_2]\!]_\Gamma \quad \Rightarrow \quad [\![\varphi(\psi_1)]\!]_\Gamma = [\![\varphi(\psi_2)]\!]_\Gamma.$$

In welchen Satzkontexten $\varphi(\cdot)$ kommt es nur auf die *Bedeutung* der Teilaussagen an, nicht auf ihren Sinn?

Mit *daß* eingeleitete Nennsätze

Bei Komplementsätzen von Verben R wie *sagen, hören, meinen, überzeugt sein, bedauern, hoffen, fürchten, billigen, sich freuen, daß* φ.

$$\begin{array}{rcl} [\![t\ R, \textit{daß}\ \varphi^{konj}]\!]_\Gamma & = & F_R([\![R]\!]_\Gamma, [\![t]\!]_\Gamma, [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}}), \\ & := & [\![R]\!]_\Gamma([\![t]\!]_\Gamma, \{\!|\,\varphi\,|\!\}_\Gamma), \end{array}$$

wobei $[\![R]\!]_\Gamma : V \times \textit{Gedanken} \to \{0, 1\}$. Ebenso bei:

- indirekter Rede (als impl. Komplementsätze),
- *es scheint (mir), daß* φ, und
- t *schließt* φ *aus (der Annahme, daß)* $\tilde{\varphi}$.

Adverbsätze des Zwecks

Ein Zweck zählt als Gedanke, daher:

$$\begin{aligned}
&[\![\psi,\, damit\ \varphi^{konj}]\!]_\Gamma \\
&\quad = \quad F_{damit(\cdot,\cdot)}([\![damit]\!]_\Gamma, [\![\psi]\!]_{\tilde{\Gamma}_1}, [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}_2}) \\
&\quad := \quad [\![damit]\!]_\Gamma([\![\psi]\!]_\Gamma, \{\!|\, \varphi \,|\!\}_{\tilde{\Gamma}_2}),
\end{aligned}$$

wobei $[\![damit]\!]_\Gamma : \{0,1\} \times \mathit{Gedanken} \to \{0,1\}$.

Folgerung

Der Wahrheitswert $[\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi]\!]$ hängt nicht von $[\![\varphi]\!]$ ab und besagt nichts über $[\![\varphi]\!]$.

Daher ist in diesen Fällen i.a.

$$\begin{aligned}
[\![s]\!] = [\![\tilde{s}]\!] \quad \not\Rightarrow \quad & [\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi[s/z]]\!] \\
& = [\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi[\tilde{s}/z]]\!].
\end{aligned}$$

Der Sinn $\{\!|\, t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi \,|\!\}$ ist ein einziger Gedanke, von dem $\{\!|\, \varphi \,|\!\}$ nur ein Teilgedanke ist.

Aber in diesen Fällen gilt stets

$$\begin{aligned}
\{\!|\, s \,|\!\} = \{\!|\, \tilde{s} \,|\!\} \quad \Rightarrow \quad & [\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi[s/z]]\!] \\
& = [\![t\ \mathit{glaubt,\ daß}\ \varphi[\tilde{s}/z]]\!].
\end{aligned}$$

Abhängige Fragesätze

Verben des *fragens*, *zweifelns* oder *nicht wissens* erzeugen indirekte Bedeutung.

a) bei eingebetteten Satzfragen:

$$\begin{aligned} &[\![t \textit{ zweifelt, ob } \varphi^{konj}]\!]_\Gamma \\ &\quad = \quad F_{bezweifeln(\cdot,\cdot)}([\![bezweifeln]\!]_\Gamma, [\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}_1}, [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}_2}) \\ &\quad := \quad [\![bezweifeln]\!]_\Gamma([\![t]\!]_\Gamma, \{\!| \varphi |\!\}_{\tilde{\Gamma}_2}), \end{aligned}$$

wobei $[\![bezweifeln]\!]_\Gamma : V \times Gedanken \to \{0,1\}$.

b) bei eingebetteten Konstituentenfragen (W-Fragen):

$$\begin{aligned} &[\![t \textit{ fragt, } wer_x\ \varphi(x)^{konj}]\!]_\Gamma \\ &\quad = \quad F_{fragen(\cdot,\cdot)}([\![fragen]\!]_\Gamma, [\![t]\!]_{\tilde{\Gamma}_1}, [\![wer_x\ \varphi(x)]\!]_{\tilde{\Gamma}_2}) \\ &\quad := \quad [\![fragen]\!]_\Gamma([\![t]\!]_\Gamma, \{\!| wer_x\ \varphi(x) |\!\}_{\tilde{\Gamma}_2}), \end{aligned}$$

wobei $[\![fragen]\!]_\Gamma : V \times \textit{Objekt-Fragen} \to \{0,1\}$.

Was ist hier $\{\!| wer_x\ \varphi(x) |\!\}_{\tilde{\Gamma}_2}$?

Bedeutung von Konstituentenfragen

Identifiziert man die Bedeutung einer Frage mit der Menge der Bedeutungen ihrer Antworten, so hat man:

$$[\![wer_x\ \varphi(x)]\!]_\Gamma \quad = \quad \{v \in V \mid [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]} = 1\},$$

d.h. die Bedeutung einer W-Frage ist der Umfang des durch die Frage definierten Begriffs

$$B : V \to \{0,1\} \qquad \text{mit} \quad B(v) := [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]}.$$

Da eine Frage ein „ungesättigter“ Ausdruck ist, würde Frege wohl eher sagen, $[\![wer_x\ \varphi(x)]\!]_\Gamma$ *sei* der Begriff B.

Vielleicht sollte die Bedeutung der W-Frage aber die Menge der (korrekten) Antwort*terme* s sein:

$$\begin{array}{rcl} [\![wer_x\ \varphi(x)]\!]_\Gamma & = & \{s \mid [\![t\ kennt\ s]\!]_\Gamma = 1 = [\![\varphi(s)]\!]_\Gamma\} \\ & \neq & \{v \in V \mid [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]} = 1\}. \end{array}$$

Korrekte Antworten scheinen nur die Namen zu sein, deren Bedeutung $\varphi(x)$ erfüllt und der Fragende kennt.

Freie Relativsätze

Freie Relativsätze, die das Subjekt ihres Matrixsatzes bilden. *Der die elliptische Gestalt der Planetenbahnen entdeckte, starb im Elend.*

Es geht also um die definite Beschreibung. Ihre Bedeutung ist ein Objekt, kein Wahrheitswert:

$$\begin{aligned} [\![der_x\ \varphi(x^{rel})^{ind}]\!]_\Gamma &= [\![\iota x.\varphi]\!]_\Gamma \\ &:= \ das\ v \in V\ mit\ [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]} = 1 \end{aligned}$$

Der Sinn von $\{\!|\ der_x\ \varphi(x^{rel})^{ind}\ |\!\}_\Gamma$ ist kein Gedanke, sondern

$$\{\!|\ \iota x.\varphi\ |\!\} \text{ ist } \textit{die Art, wie } [\![\iota x.\varphi]\!] \textit{ gegeben ist.}$$

Frege an Russell (28.12.1902) „Es kommt oft vor, dass verschiedene Zeichen denselben Gegenstand bezeichnen und doch nicht unbedingt vertauschbar sind, *indem sie den Gegenstand in verschiedener Weise bestimmen.* Man könnte sagen: *sie führen von verschiedenen Seiten auf ihn hin.*“

Restriktive Relativsätze

Auch Beisätze, d.h. restriktive Relativsätze wie in

die Quadratwurzel aus 4, *die kleiner ist als 0*,

haben als Bedeutung keinen Wahrheitswert und als Sinn keinen Gedanken, nur „einen Gedankenteil".

Der Teilsatz ist eine *Formel* $\varphi(x)$ mit einer freien Variablen x. Er drückt ein Merkmal des Gesamtbegriffs

Quadratwuzel aus 2, die kleiner ist als 0,

aus und damit eine Eigenschaft der darunter fallenden Objekte. Daher

$$\begin{aligned}
&[\![das_x\ N, \varphi^{rel,ind}(x^{rel})]\!]_\Gamma \\
&\quad = \quad [\![\iota x.(N(x) \wedge \varphi(x))]\!]_\Gamma \\
&\quad = \quad F_{\iota x:N.\varphi}([\![N]\!]_{\tilde{\Gamma}_1}, [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}_2}) \\
&\quad = \quad [\![dasjenige]\!]_\Gamma([\![N]\!]_\Gamma, v \mapsto [\![\varphi]\!]_{\tilde{\Gamma}_2[v/x]})
\end{aligned}$$

Also ist

$$[\![\varphi^{rel,ind}(x^{rel})]\!]_\Gamma := \left\{ \begin{array}{l} \text{der Begriff } B \text{ mit} \\ B(v) = [\![\varphi]\!]_{\Gamma[v/x]}. \end{array} \right.$$

Nominalisierung und Abstraktion

Beisp. 1 Was ist eine *Eigenschaft* eines Gegenstands, z.B. eine Farbe, eine räumliche Gestalt, ein Gewicht?

Eine Abstraktion, die durch *Vergleich* verschiedener(!) Gegenstände gebildet wird:

a und b sind gleich schwer (zu heben)
$$\iff \quad \textit{das Gewicht von } a = \textit{das Gewicht von } b$$

Erinnerung: Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt

(i) *partielleÄquivalenzrelation*, falls $R \circ R \cup \breve{R} \subseteq R$, d.h. falls R transitiv und symmetrisch ist,

(ii) totale *Äquivalenzrelation*, falls auch $1_M \subseteq R$ ist, d.h. R reflexiv, transitiv und symmetrisch.

Satz: R ist genau dann eine partielle (bzw. totale) Äquivalenzrelation auf M, wenn es eine partielle (bzw. totale) Abbildung $f : M \to N$ gibt mit

$$\forall a, b \in M\, (R(a, b) \iff f(a) = f(b))$$

Beweis $\Rightarrow$: Setze

$$\begin{aligned} [a]_R &:= \{c \in M \mid R(a, c)\}, \\ N &:= \{[a]_R \mid a \in M, R(a, a)\}, \\ f(a) &:= [a]_R, \quad \text{falls } R(a, a). \end{aligned}$$

Abstraktion

Beisp. 2 (Frege) Die *Richtung* einer Geraden:

die Gerade a ist parallel der Geraden b, „$a \parallel b$“,
$\iff$: *die Richtung von a = die Richtung von b.*

Die *Anzahl* $|A|$ einer Menge A:

A und B umfassen gleich viele Gegenstände
$\iff$ es gibt ein ein-eindeutiges $f : A \to B$
$\iff$: $|A| = |B|$

Der *Wertverlauf* $\grave{\varepsilon}.t(\varepsilon)$ einer Funktion $x \mapsto t(x)$:

Für jeden Gegenstand a bedeuten $t(a)$ und $s(a)$ denselben Gegenstand
$\iff$: $\grave{\varepsilon}.t(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}.s(\varepsilon)$

Axiom V (Frege, Grundgesetze der Arithmetik, 1893)

$$\forall x(f(x) = g(x)) \iff \grave{\varepsilon}.f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}.g(\varepsilon).$$

(i) Können wir so „Gegenstände“ $\grave{\varepsilon}.f(\varepsilon)$ bilden?
(ii) Wie können wir vom Gegenstand a erkennen, ob er ein Wertverlauf ist?
(iii) Wie können wir Eigenschaften eines Wertverlaufs erkennen?

Das Cantor'sche Diagonalverfahren

Satz (Cantor 1892) $|M| < |\mathcal{P}(M)|$ für jede Menge.

Bew: $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$: $m \mapsto \{m\}$ ist injektiv.

$|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$: (Cantor'sches Diagonalverfahren)

Zu $f : M \to \mathcal{P}(M)$ betrachte

$$D := \{m \in M \mid m \notin f(m)\}.$$

Dann ist f nicht surjektiv:

$$D = f(m) \quad \Rightarrow \quad (m \in D \iff m \notin D).$$

Es gibt also keine größte Mächtigkeit.

Die Russell'sche Antinomie

Für „die Menge V *aller* denkbaren Objekte“ kann $|V| < |\mathcal{P}(V)|$ nicht gelten: da für jede Menge $x \subseteq V$ ja $x \in V$ ist, ist $id : V \to \mathcal{P}(V)$ surjektiv.

Das Diagonalverfahren liefert zu $id : V \to \mathcal{P}(V)$

$$D = \{x \in V \mid x \notin x\}.$$

Dies (oder V) kann also keine Menge sein.

1902 schreibt Russell an Frege, daß ihm eine „Schwierigkeit begegnet“ sei:

> Sei w das Prädicat, ein Prädicat zu sein, welches nicht von sich selbst prädiciert werden kann. Kann man w von sich selbst prädicieren? Aus jeder Antwort folgt das Gegentheil.
>
> $w = \{x \mid x \notin x\} \Rightarrow (w \in w \iff w \notin w).$

Frege kritisiert:

- In $w(w)$ muß man den *Begriff* w vom *Objekt* w unterscheiden.
- Das Objekt w kann nicht als Prädikat verwendet werden. (vgl. Aristoteles!)
- Wieso kann aus jedem Begriff B ein Objekt,

  $$U(B) = \{x \in V \mid B(x) = 1\} \in V,$$

  gebildet werden?

  $$U : (V \to \{0, 1\}) \to V \ ?$$

Frege (Über Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre):

> Und das nötigt fast unausweichlich dazu, einen Satz, in dem die gegenseitige Unterordnung von Begriffen ausgesagt wird, umzuwandeln in einen Satz, der eine Gleichheit ausspricht. Zwar die gegenseitige Unterordnung einfach als Gleichheit aufzufassen, verbietet die Grundverschiedenheit der Beziehungen erster und zweiter Stufe. Begriffe können nicht in einer Beziehung erster Stufe stehen. Das wäre nicht falsch, das wäre unsinnig. Von Gleichheit (Identität) kann nur bei Gegenständen die Rede sein. Jene Umwandlung kann also nur so geschehen, daß den Begriffen Gegenstände zugeordnet werden der Art, daß den Begriffen, die gegenseitig einander untergeordnet sind, derselbe Gegenstand zugeordnet wird. Es wird alles, sozusagen, eine Stufe herabgedrückt.
>
> „Der Umfang des Begriffes *Quadratwurzel aus 1*“ ist hier also als Eigenname auf-

zufassen, wie auch der bestimmte Artikel anzeigt. Indem man die Umwandlung zuläßt, gesteht man solchen Eigennamen Bedeutungen zu. So werden neue Gegenstände, eben die Begriffsumfänge, in die Betrachtung eingeführt. Aber mit welchem Recht geschieht eine solche Umwandlung, bei der den Begriffen Begriffsumfänge, der gegenseitigen Unterordnung die Gleichheit entspricht? Ein eigentlicher Beweis wird kaum zu liefern sein. Man wird hier ein unbeweisbares Gesetz anzunehmen haben. Freilich ist es nicht so einleuchtend, wie von einem logischen Gesetze zu wünschen wäre. Und wenn schon vorher Zweifel bestehen konnten, so hat dies Gesetz durch das russellsche Paradoxon eine größere Erschütterung erlitten.

Syntax des ungetypten λ–Kalküls

Die *Terme* des typfreien λ-Kalküls sind:

$$
\begin{array}{rcll}
t & := & x & \text{Variable} \\
 & | & c & \text{Konstante} \\
 & | & (t \cdot t) & \text{Applikation} \\
 & | & \lambda x t & \text{Abstraktion}
\end{array}
$$

Schreibweise:

$$
\begin{array}{lll}
(ts) & \text{statt} & (t \cdot s), \\
t_1 t_2 t_3 & \text{statt} & ((t_1 t_2) t_3), \\
(\lambda x_1 \ldots x_n . t) & \text{statt} & \lambda x_1 \lambda x_2 \ldots \lambda x_n t,
\end{array}
$$

Beispielterme:

$$
\begin{array}{lcllcl}
I & = & \lambda x.x, & K & = & \lambda xy.x, \\
S & = & \lambda xyz.xz(yz), & B & = & \lambda xyz.x(yz), \\
\mathbf{1} & = & \lambda xy.x, & \mathbf{0} & = & \lambda xy.y, \\
\Delta & = & \lambda x.xx, & \Omega & = & \Delta\Delta,
\end{array}
$$

Mit $[s/x]t$ ist das Ergebnis der *Einsetzung* von s in t für freie Vorkommen von x gemeint.

Gleichungstheorie der λ-Terme

Welche λ–Terme sollen dieselbe Bedeutung haben, z.B. dieselbe Funktion definieren?

Axiome und Schlußregeln des $\lambda\beta$–*Kalküls*

$$(\alpha)\quad \lambda xt = \lambda y.[y/x]t \qquad \text{für } y \notin \mathit{frei}(t)$$

$$(\beta)\quad (\lambda xt)s = [s/x]t$$

$$(\rho)\quad t = t$$

$$(\sigma)\quad \frac{t = s}{s = t} \qquad\qquad (\tau)\quad \frac{t = s, \quad s = r}{t = r}$$

$$(\mu)\quad \frac{t_1 = t_2}{st_1 = st_2} \qquad\qquad (\nu)\quad \frac{t_1 = t_2}{t_1 s = t_2 s}$$

$$(\xi)\quad \frac{t_1 = t_2}{\lambda xt_1 = \lambda xt_2}$$

Der $\lambda\beta\eta$–*Kalkül* enthält zusätzlich:

$$(\eta)\quad \lambda x.tx = t, \quad \text{falls } x \notin \mathit{frei}(t).$$

Bem.:

(ξ) $\forall f \forall g(\forall x(fx = gx) \rightarrow \lambda x.fx = \lambda x.gx)$
schwaches Extensionalitätsaxiom

(η) $\forall g(\lambda x.gx = g)$
Extensionalitätsaxiom

Reduktionstheorie der λ-Terme

Sie bestimmt die *operationale* Bedeutung der Terme (die Auswertung von Programmen) als einen Termvereinfachungsprozeß. Man benutzt dieselben Gleichungen wie oben, nur:

(i) Statt $t_1 = t_2$ wird $t_1 \to t_2$ geschrieben.

(ii) Die Symmetrieregel (σ) entfällt.

Insbesondere haben wir die Reduktionsregeln

$$\begin{array}{lll} (\to_\beta) & (\lambda x.t)s \to [s/x]t & \\ (\to_\eta) & (\lambda x.tx) \to t, & \text{falls } x \notin \mathit{frei}(t). \end{array}$$

$(\lambda xt)s$ ist ein β–*Redex*, $(\lambda x.tx)$ ein η–*Redex.*

t ist β–*Normalform*, wenn er keine β–Redexe enthält.

(i) Nicht jeder Term kann zu einer β–Normalform reduziert werden:

$$(\Delta\Delta) \equiv ((\lambda x.xx)\Delta) \to_\beta (\Delta\Delta) \to \ldots$$

(ii) Terme, bei denen manche Reduktionsfolgen zu einer β–Normalform führen, andere nicht:

$$\begin{array}{lllllll} Kx\Omega & \equiv & (\lambda xy.x)x\Omega & \to_\beta & (\lambda y.x)\Omega & \to_\beta & x \\ Kx\Omega & \equiv & Kx(\Delta\Delta) & \to_{\beta,(i)} & Kx(\Delta\Delta) & \to_\beta & \ldots \end{array}$$

(iii) Fallunterscheidung kann simuliert werden: Mit $\mathbf{1} := \lambda xy.x$ und $\mathbf{0} := \lambda xy.y$ erhält man für $(\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ s\ \mathit{else}\ t) := bst$:

$$\begin{array}{lll} \lambda\beta \vdash b = \mathbf{1} & \Rightarrow & \lambda\beta \vdash (\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ s\ \mathit{else}\ t) = s \\ \lambda\beta \vdash b = \mathbf{0} & \Rightarrow & \lambda\beta \vdash (\mathit{if}\ b\ \mathit{then}\ s\ \mathit{else}\ t) = t. \end{array}$$

Die β–Reduktion entspricht einer call-by-name Auswertung; nach (ii) ist $Kxy = (\lambda xy.x)xy = x$ auch für divergierendes Argument Ω statt y.

Die Auswertung in funktionalen Programmiersprachen verwendet eine call-by-value-Auswertung: die Argumente müssen zuerst reduziert werden.

(iv) Rekursive Definitionen erhält man über den *Fixpunktoperator*

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)).$$

Für $\tilde{f} := \lambda x.f(xx)$ ist

$$\begin{array}{rcll} \lambda\beta \vdash Yf & \to_\beta & \tilde{f}\tilde{f} & = & (\lambda x.f(xx))\tilde{f} \\ & \to_\beta & f(\tilde{f}\tilde{f}) & = & f(Yf). \end{array}$$

Also ist Yf ein Fixpunkt von f.

Für jeden λ–Term $e(x)$ kann die Rekursionsgleichung

$$(*) \quad x = e(x)$$

durch $(\mathit{rec}\ x.e) := Y(\lambda x.e)$ gelöst werden:

$$\begin{aligned} \mathit{rec}\ x.e = Y(\lambda x.e) &= (\lambda x.e)(Y(\lambda x.e)) \\ &= [Y(\lambda x.e)/x]e = e(\mathit{rec}\ x.e). \end{aligned}$$

Die meisten Programmiersprachen lassen nur rekursive Definitionen von Funktionen zu, d.h. wo e in $\mathit{rec}\ x.e$ die Form $\lambda y.t$ haben muß.

Einfache Typen

$$
\begin{array}{rcll}
\sigma, \tau & := & \iota & \text{Grundtypen} \\
 & | & (\sigma \to \tau) & \text{Funktionstypen} \\
\iota & := & \mathbf{t} & \text{Wahrheitswerte} \\
 & | & \mathbf{e} & \text{Individuen} \\
 & & & \\
\Gamma & := & \Gamma_0 & \text{Grundkontext (f.Konstante)} \\
 & | & \Gamma, x : \sigma & \text{Kontexterweiterung} \\
 & & & \\
 & & \Gamma \triangleright t : \tau & \text{getypte Terme}
\end{array}
$$

Typisierungskalkül (H.B.Curry):

(V 1) $\quad \Gamma, x : \tau \triangleright x : \tau, \qquad$ falls kein $x : \rho$ in Γ

(V 2) $\quad \dfrac{\Gamma \triangleright x : \tau}{\Gamma, y : \sigma \triangleright x : \tau}, \qquad$ falls kein $y : \rho$ in Γ

$(\to I)$ $\quad \dfrac{\Gamma, x : \sigma \triangleright t : \tau}{\Gamma \triangleright \lambda x.t : \sigma \to \tau}, \qquad$ falls kein $x : \rho$ in Γ

$(\to E)$ $\quad \dfrac{\Gamma \triangleright t : \sigma \to \tau, \qquad \Gamma \triangleright s : \sigma}{\Gamma \triangleright (t \cdot s) : \tau}$

Typisierbare Terme

Jede Variable

Untypisierbare Terme

(i) Selbstanwendung xx ist untypisierbar

(ii) Diagonalisierung Δ ist untypisierbar

(iii) Rekursionsoperator Y ist untypisierbar;

stattdessen benutzt man für jeden Typ σ eine eigene Konstante Y_σ

Behandlung der Paradoxien

Typen und Terme seien:

$$\begin{array}{rcl} \sigma, \tau & := & \mathbf{t} \quad \text{(Wahrheitswerte)} \\ & | & \mathbf{e} \quad \text{(Indidviduen)} \\ & | & (\sigma \to \tau) \quad \text{(Funktionen)} \\ & | & \sigma \times \tau \quad \text{(geordnete Paare)} \\ s, t & := & x^\tau \\ & | & 0^\mathbf{t} \mid 1^\mathbf{t} \mid \wedge^{\mathbf{t} \times \mathbf{t} \to \mathbf{t}} \mid \neg^{\mathbf{t} \to \mathbf{t}} \\ & | & \forall^{(\tau \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t}} \mid \exists^{(\tau \to \mathbf{t}) \to \mathbf{t}} \\ & | & \epsilon^{\tau \times (\tau \to \mathbf{t})} \mid b^\mathbf{e} \mid r^{\mathbf{e} \times \mathbf{e} \to \mathbf{t}} \\ & | & (\lambda x^\sigma t^\tau)^{\sigma \to \tau} \mid (t^{\sigma \to \tau} \cdot s^\sigma)^\tau \\ & | & \langle s^\sigma, t^\tau \rangle^{\sigma \times \tau} \end{array}$$

Notation: $x \epsilon y$ statt $\epsilon \cdot \langle x, y \rangle$ usw.

a) Russell'sche Paradoxie

Die charakteristische Funktion $\lambda x.\neg(x \epsilon x)$ der Menge $D = \{x \mid x \notin x\}$ ist nicht definierbar:

$$\lambda x^\tau.\neg^{\mathbf{t} \to \mathbf{t}}(x^\tau \epsilon^{\tau \times (\tau \to \mathbf{t})} \underline{x^\tau})$$

Man bräuchte bei $\underline{x^\tau}$ einen anderen Typ, $x^{\tau \to \mathbf{t}}$.

b) Barbier-Paradoxie

Problem: Rasiert der Barbier b, der alle und nur die Männer eines Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren, sich selbst? Aus

$$\forall x(\neg r(x,x) \leftrightarrow r(b,x)) \tag{15}$$

folgt der Widerspruch

$$\neg r(b,b) \leftrightarrow r(b,b). \tag{16}$$

Die reflexive Verwendung transitiver Verben muß erlaubt bleiben! Also muß (15) noch typisierbar sein.

Lösung 1: (15) typisierbar, (16) nicht

Typisierung von (15): Sei κ der Typ derer, die rasiert werden (der möglichen Kunden), und ρ der Typ derer, die jemanden rasieren. Für die rechte Teilformel:

$$b : \rho,\ r : \rho \times \kappa \to \mathbf{t}\ \vdash\ r^{\rho\times\kappa\to\mathbf{t}}(b^\rho, x^\kappa) : \mathbf{t}.$$

Für die linke Teilformel braucht x *beide* Typen:

$$x : \rho,\ x : \kappa\ \vdash\ r^{\rho\times\kappa\to\mathbf{t}}(x^\rho, x^\kappa) : \mathbf{t}.$$

Mit $\rho = \kappa$ wird zwar (15), aber auch (16) typisierbar!

Subtypen: ungleiche Typisierung verschiedener Vorkommen

(i) Wir verlangen nicht, daß die Objektbereiche D_τ verschiedener Typen τ disjunkt sind.

(ii) Wir nehmen an, es gebe eine partielle Ordnung $\leq$ zwischen Typen, so daß für alle $\sigma \leq \tau$ gilt:

$$D_\sigma \subseteq D_\tau, \tag{17}$$

$$s : \sigma \vdash s : \tau. \tag{18}$$

(iii) Wir nehmen $\kappa \leq \rho = \mathbf{e}$ an (nur Barbiere!).

Ich schreibe $(s^\sigma)^\tau$ für eine Typumwandlung nach (18).

Dann erhalten wir für (15) einen Typ:

$$\vdash \lambda x^\kappa.(\neg r((x^\kappa)^\rho, x^\kappa)^{\mathbf{t}} \leftrightarrow r(b^\rho, x^\kappa)^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} : (\kappa \to \mathbf{t}).$$

Andererseits ist (16) untypisierbar, wie gewünscht:

$$\not\vdash r^{\rho\times\kappa\to\mathbf{t}}(b^\rho, \underline{b^\kappa}) : \mathbf{t},$$

da $b : \kappa$ *nicht* angenommen wurde.

(Fazit: $b \in D_\rho \setminus D_\kappa$, genauer:
$\{(x^\kappa) : \rho \mid \neg r(x,x)\} \cap \{y : \rho \mid \forall x^\kappa.r(y,x)\} = \emptyset$.)

Lösung 2: (15) und (16) typisierbar für jedes κ ein $b_\kappa \notin D_\kappa$

Annahmen:

(i) Ein „homogenes“ Prädikat $r : \mathbf{e} \times \mathbf{e} \to \mathbf{t}$.

(ii) Für jeden Grundtyp κ gibt es einen Grundtyp κ' mit

$$\kappa' \not\leq \kappa \leq \mathbf{e}.$$

und Elemente $b_\kappa : \kappa'$

Sei $g_\kappa := \lambda x^\kappa.(\neg r(x,x) \leftrightarrow r(b_\kappa, x))$.

Damit sind mit (i) über $(x^\kappa)^{\mathbf{e}}$ und $(b_\kappa^{\kappa'})^{\mathbf{e}}$ typisierbar:

$$r(b_\kappa^{\mathbf{e}}, b_\kappa^{\mathbf{e}}) : \mathbf{t} \quad \text{und} \quad g_\kappa : \kappa \to \mathbf{t}$$

und damit auch (15) und (16).

Ein Modell muß allerdings für jedes κ erfüllen:

$$b_\kappa \notin D_\kappa \wedge \forall a \in D_\kappa(\neg r(a,a) \leftrightarrow r(b_\kappa, a)).$$

Für b_κ ist (16) einfach falsch!

Sei $f : \mathbf{e} \to (\kappa \to \mathbf{t})$ mit

$$f(b) = \{a \in D_\kappa \mid r(b, a)\} \subseteq D_\kappa$$

die Aufzählung von Mengen, die jedem Barbier seine Kunden *aus dem Dorf* κ zuordnet.

Betrachte die Barbiere, die nicht zu ihren Kunden aus dem Dorf κ gehören, d.h.

$$D_{f,\kappa} := \{b \in D_{\mathbf{e}} \mid b \notin f(b)\}.$$

Angenommen $f(b) = D_{f,\kappa}$ für ein $b : \mathbf{e}$. Wäre $b \in D_\kappa \cap D_{f,\kappa}$, so hätte man einen Widerspruch:

$$(b \in D_\kappa \wedge b \notin f(b) = D_{f,\kappa}).$$

Ist aber $b \notin D_\kappa$, so auch $b \notin f(b) \subseteq D_k$, also $b \in D_{f,\kappa}$, und es ergibt sich kein Widerspruch.

Sinn als Intension bei Carnap und Montague

Rudolf Carnap (1891 – 1970), der in Jena die Logik-Vorlesungen von Frege besuchte, präzisiert in

> „Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic" (1947)

informelle Ideen von G.W.Leibniz (1646-1716):

(i) $\Box\varphi$, oder *notwendigerweise ist* φ *wahr*, falls φ in allen möglichen Welten wahr ist,

(ii) $\Diamond\varphi$, oder *möglicherweise ist* φ *wahr*, falls φ in einer der möglichen Welten wahr ist,

(iii) φ, oder φ *ist tatsächlich wahr*, falls φ in der wirklichen Welt wahr ist.

Dazu unterscheidet er zwischen der *Extension* und *Intension* von Begriffen sowie zwischen *extensionalen* und *intensionalen Kontexten*.

Beisp. Die Aussage: „der Morgenstern ist der Abendstern." ist zwar tatsächlich wahr, aber nicht notwendigerweise wahr.

Modaloperatoren als Quantoren über „Welten“

(i) eine „mögliche Welt“ ist eine widerspruchsfreie und vollständige Menge von Beobachtungsaussagen, den atomaren Aussagen,

(ii) die wirkliche Welt $\mathcal{A}$ ist eine dieser möglichen Welten,

(iii) definiere „in der Welt $\mathcal{B}$ gilt φ“, $\mathcal{B} \models \varphi$, und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \Box\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \mathcal{B} : \mathcal{B} \models \varphi, \\ \mathcal{A} \models \Diamond\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \mathcal{B} : \mathcal{B} \models \varphi. \end{aligned}$$

Dieser Notwendigkeitsbegriff ist *absolut*, d.h. für jede Welt derselbe.

Saul Kripke (1957?) hat später den Begriff der Notwenigkeit *relativiert*, indem er eine *Erreichbarkeitsrelation*, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ für „$\mathcal{B}$ ist von $\mathcal{A}$ errreichbar“ zwischen Welten annimmt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \Box\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \mathcal{B} \succ \mathcal{A} : \mathcal{B} \models \varphi, \\ \mathcal{A} \models \Diamond\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \mathcal{B} \succ \mathcal{A} : \mathcal{B} \models \varphi. \end{aligned}$$

Sinn und Bedeutung als Algorithmus und Wert

Freges Formulierung, der Sinn eines Terms sei *die Art des Gegebenseins* der Bedeutung, legt folgende Interpretation nahe:

(i) Der Sinn $\{\!|\, \alpha \,|\!\}_\Gamma$ eines Ausdrucks $\Gamma \rhd \alpha : \tau$ ist ein *Algorithmus*, der seine Bedeutung ermittelt.

(ii) Die Bedeutung $[\![\alpha]\!]_\Gamma$ des Ausdrucks $\Gamma \rhd \alpha : \tau$ ist der Wert $a \in D_\tau$, den der Algorithmus $\{\!|\, \alpha \,|\!\}_\Gamma$ liefert, *falls* er terminiert.

Der Logiker Y. Moschovakis (UCLA) versucht, diese Interpretation durch eine *Definition* des Begriffs „Algorithmus“ zu präzisieren. Die Algorithmen sollen

(i) *abstrakt*, insbesondere von Maschinenbegriffen unabhängig, sein,

(ii) *relativ* sein, auf frei wählbaren Grundfunktionen als elementaren Schritten aufbauen,

(iii) *höherstufig* sein, d.h. Argumente und Werte nicht nur vom Grundtyp zulassen.

Beispiel: Formelauswertung

Beisp.(Y.M.) Sei $\chi \equiv \forall x \exists y R(x,y) \vee \exists z Q(z)$. Sei $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}})$ eine Menge A mit vorgegebenen Extensionen $Q^{\mathcal{A}} \subseteq A$ und $R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$.

Der Sinn $\{\!|\, \chi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ von χ relativ zu $\mathcal{A}$ ist dann folgendes, im wesentlichen eindeutiges Verfahren zur Bestimmung des Wahrheitswerts $[\![\chi]\!]^{\mathcal{A}}$:

(1) Führe (2) und (4) aus. Falls eine der beiden Ausführung den Wert **1** liefert, antworte mit **1**. Falls beide den Wert **0** liefern, antworte mit **0**.

(2) Für jedes $a \in A$ führe (3) aus. Falls jede Ausführung **1** liefert, antworte mit **1**. Falls für ein a der Wert **0** geliefert wird, antworte mit **0**.

(3) Bestimme für jedes $b \in A$ den Wahrheitswert von $R^{\mathcal{A}}(a,b)$. Falls er **1** ist für mindestens ein b, antworte mit **1**. Falls er **0** ist für jedes b, antworte mit **0**.

(4) Bestimme für jedes $c \in A$ den Wert von $Q^{\mathcal{A}}(c)$. Falls er **1** ist für mindestens ein c, antworte mit **1**. Falls er **0** ist für alle c, antworte mit **0**.

Beachte: $\{\!|\, \chi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ hängt *uniform* von $\mathcal{A}$ ab:

(i) der Bereich A (und damit $\forall, \exists$) die Grundbegriffe $Q^{\mathcal{A}}$, $R^{\mathcal{A}}$ hängen von $\mathcal{A}$ ab,

(ii) der Rest des Verfahrens hängt nur von χ ab.

Außerdem:

(iii) Die Grundbegriffe $Q^{\mathcal{A}} : A \to \mathbf{t}$ und $R^{\mathcal{A}} : A \times A \to \mathbf{t}$ sind Elementarschritte, die die Bedeutungen atomarer Aussagen wie $Q(c)$ festlegen.

(iv) Durch „Bestimme den Wert von $Q(c)$" wird ein Verfahren $\{\!|\, Q \,|\!\}$ angenommen, das (ggf.) $[\![Q]\!]^{\mathcal{A}}(c)$ liefert. Man kann zulassen, daß $Q^{\mathcal{A}}$ partiell ist.

(v) Durch (1) wird $\{\!|\, \varphi \vee \psi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ auf $\{\!|\, \varphi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$, $\{\!|\, \psi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ zurückgeführt.

(vi) Durch (4) wird $\{\!|\, \exists z\varphi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ auf $\{\!|\, \lambda z\varphi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ zurückgeführt (ein Beispiel suchen).

(vii) Durch (2) wird $\{\!|\, \forall x\varphi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ auf $\{\!|\, \lambda x\varphi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ zurück geführt (Gegenbeispiel suchen und negieren).

(viii) Falls A unendlich ist, terminiert das Verfahren $\{\!|\, \chi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ nicht.

Das Programm von Moschovakis

Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Strukturen $\mathcal{A}$.

(i) Wie lautet eine genaue Definition von $\{\!|\, \varphi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$?

(ii) Ist zu φ, ψ entscheidbar, ob $\{\!|\, \varphi \,|\!\}^{\mathcal{A}} = \{\!|\, \psi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$?

(iii) Ist zu φ, ψ entscheidbar, ob $\{\!|\, \varphi \,|\!\}^{\mathcal{A}} = \{\!|\, \psi \,|\!\}^{\mathcal{A}}$ für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$?

(iv) Für welche $\mathcal{A}$ und $\mathcal{K}$ kann man die Sinngleichheit $\sim_{\mathcal{A}}$ und $\sim_{\mathcal{K}}$ aus (ii), (iii) axiomatisieren?

Anschlußfragen sollten m.M. sein:

(i) Wie vererbt sich eine Relation $R(\{\!|\, c \,|\!\}^{\mathcal{A}}, \{\!|\, d \,|\!\}^{\mathcal{B}})$ zwischen Algorithmen in *verschiedenen* Strukturen auf komplexere Ausdrücke?

(ii) Wie kann man Übersetzungsprogramme $\cdot^{Tr} : L(\mathcal{A}) \to L(\mathcal{B})$ schreiben, die *korrekt* sind, d.h. den Sinn erhalten:

$$\{\!|\, \varphi \,|\!\}^{\mathcal{A}} = \{\!|\, \varphi^{Tr} \,|\!\}^{\mathcal{B}}.$$

(iii) Was sind *ähnliche*, aber verschiedene Sinne?

Selbstreferentielle Aussagen

Sätze mit Eigennamen, die keine Bedeutung haben, sind bei Frege die einzigen Beispiele für Sätze ohne Wahrheitswert. Andere Beispiele:

Beispiel *Wahrsager*:

$$\text{Dieser Satz (19) ist wahr.} \tag{19}$$

Algorithmus:

(1) Führe (1) aus. Falls die Ausführung den Wert **1** liefert, antworte mit **1**. Falls sie **0** liefert, antworte mit **0**.

Bem.: $[\![\text{dieser Satz } \varphi]\!] = \text{der Gedanke } \{\!|\, \varphi \,|\!\}$.

Beispiel *Lügner*:

$$\text{Dieser Satz (20) ist falsch.} \tag{20}$$

Algorithmus:

(2) Führe (2) aus. Falls die Ausführung den Wert **1** liefert, antworte mit **0**. Falls sie **0** liefert, antworte mit **1**.

Die Bedeutung existiert hier nicht unbedingt, da sie ja von den Bedeutungen der Konstituenten abhängt, also von sich selbst.

Formeln mit Selbstreferenz

Terme und Formeln:

$$\begin{array}{rcl} t & := & v \mid c \mid f(t_1,\ldots,t_n) \\ \varphi,\psi & := & t = s \mid R(t_1,\ldots,t_k) \mid P(x_1,\ldots,x_n) \\ & \mid & \neg\varphi \mid (\varphi\wedge\psi) \mid (\varphi\vee\psi) \mid (\varphi\to\psi) \\ & \mid & \forall v\varphi \mid \exists v\varphi \\ & \mid & \varphi_0 \ \mathbf{where}\ \{P_1(\vec{x}_1)\simeq\varphi_1,\ldots,P_n(\vec{x}_n)\simeq\varphi_n\}, \end{array}$$

mit Relationsvariablen P für *partielle* Relationen.

Sowohl $P_1,\ldots,P_n$ wie $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$ werden durch

$$\varphi_0 \ \mathbf{where}\ \{P_1(\vec{x}_1)\simeq\varphi_1,\ldots,P_n(\vec{x}_n)\simeq\varphi_n\}$$

gebunden, und zwar $\vec{P}$ in $\varphi_0, \{\cdots\}$ und $\vec{x}$ in $\{\cdots\}$.

Intendierte Bedeutung:

„Die kleineste Lösung $(P_1\cdots P_n)$ von

$$(P_1\cdots P_n) \;=\; (\lambda\vec{x}_1.\varphi_1(\vec{x},\vec{P}),\ldots,\lambda\vec{x}_n.\varphi_n(\vec{x},\vec{P}))$$

durch partielle Relationen erfüllt φ_0."

$$\begin{array}{rcl} \text{Lügner} & := & P()\ \mathbf{where}\ \{P()\simeq\neg P()\} \\ \text{Barbier} & := & \exists x P(x)\ \mathbf{where} \\ & & \quad \{P(x)\simeq\forall y(R(x,y)\leftrightarrow\neg R(y,y))\} \end{array}$$

Partielle Relationen und Funktionen

Mit $A \rightharpoonup B$ sei die Menge der partiellen Funktionen von A in B gemeint, mit $A \to B$ die totalen.

Eine *partielle Relation* $P \subseteq A^m$ ist eine partielle Funktion $P : A^m \rightharpoonup \mathbf{t}$.

Notation:

$$
\begin{array}{rcl}
\emptyset & := & \text{die leere partielle Funktion} \\
f(\vec{a}) \downarrow & :\Longleftrightarrow & \vec{a} \text{ liegt im Definitionsbereich von } f \\
f(\vec{a}) \simeq b & :\Longleftrightarrow & f(\vec{a}) \downarrow \text{ und } f(\vec{a}) = b \\
f \subseteq g & :\Longleftrightarrow & \mathrm{Graph}(f) \subseteq \mathrm{Graph}(g)
\end{array}
$$

Voraussetzung: Striktheit der Einsetzung:

Falls $f(g(\vec{a}), h(\vec{a})) \downarrow$, so auch $g(\vec{a}) \downarrow$ und $h(\vec{a}) \downarrow$.

Funktionalstrukturen

Typen τ:

$$
\begin{array}{rcll}
\iota & = & \mathbf{t} \mid \mathbf{e} \mid \cdots & \text{Grundtypen} \\
\rho & = & \iota_1 \times \cdots \times \iota_n \rightharpoonup \iota_0 & \text{partielle Funtionen} \\
\sigma & = & \iota \mid \rho & \\
\vec{\sigma} & = & \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n & \text{Punkte} \\
\tau & = & \iota & \\
& \mid & \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \rightharpoonup \iota & \text{partielle Funktionale}
\end{array}
$$

Ein *Universum* ist eine Mengenfamilie

$$\mathcal{U} = \{U_{\mathbf{t}}, U_{\iota_1}, \ldots, U_{\iota_k}\} \quad \text{mit } U_{\mathbf{t}} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}.$$

Eine *Funktionalstruktur*

$$\mathcal{A} = (\mathcal{U}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_n^{\mathcal{A}})$$

der Signatur $\{f_1 : \tau_1, \ldots, f_n : \tau_n\}$ besteht aus

(i) einem Universum $\mathcal{U} = (U_{\mathbf{t}}, U_{\iota_1}, \ldots, U_{\iota_k})$

(ii) und Funktionalen $f_1^{\mathcal{A}} \in U_{\tau_1}, \ldots, f_n^{\mathcal{A}} \in U_{\tau_n}$

wobei die $\mathcal{U}_\tau$ wie folgt definiert werden.

Partielle, monotone Funktionale auf $\mathcal{U}$

Für $\rho = \iota_1 \times \cdots \times \iota_n \rightharpoonup \iota_0$ sei

$$U_\rho := \{f \mid f : U_{\iota_1} \times \cdots \times U_{\iota_n} \rightharpoonup U_{\iota_0}\}$$

die Menge aller entspr. *partiellen Funktionen*.

Für $\tau = \vec{\sigma} \rightharpoonup \iota$ sei

$$U_\tau := \{f \mid f : U_{\vec{\sigma}} \rightharpoonup U_\iota, f \text{ ist monoton}\}$$

die Menge aller entspr. *monotonen* partiellen Funktionale, d.h. der f mit

$$\forall c \in D_\iota \forall \vec{a}, \vec{b} \in D_{\vec{\sigma}}(f(\vec{a}) \simeq c \wedge \vec{a} \leq_{\vec{\sigma}} \vec{b} \Rightarrow f(\vec{b}) \simeq c).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
\vec{a} \leq_{\vec{\sigma}} \vec{b} \quad &:\Longleftrightarrow \quad a_i \leq_{\sigma_i} b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \\
&\qquad\quad \text{und } \vec{a}, \vec{b} : \vec{\sigma} = \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n, \\
a \leq_\iota b \quad &:\Longleftrightarrow \quad a = b, \\
f \leq_\rho g \quad &:\Longleftrightarrow \quad \mathit{Graph}(f) \subseteq \mathit{Graph}(g).
\end{aligned}$$

Beisp. Das Funktional $\mathit{apply} : (\iota_1 \to \iota_2) \times \iota_1 \rightharpoonup \iota_2$ mit

$$\mathit{apply}(g, a) \simeq g(a).$$

$$\mathcal{A} = (\mathcal{U}_{\mathbf{e}}, \mathcal{U}_{\mathbf{t}}; R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_m^{\mathcal{A}}, 1_A, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists^{\mathcal{A}}, \forall^{\mathcal{A}})$$

mit $\mathcal{U}_{\mathbf{e}} = A$, $\mathcal{U}_{\mathbf{t}} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$,

$$\begin{aligned}
R_i^{\mathcal{A}} &: \quad A^{n_i} \rightarrow \mathbf{t}, \\
1_A(a,b) &= \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{falls } a = b, \\ \mathbf{0}, & \text{sonst.} \end{cases} \\
\neg(b) &= \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{falls } b = \mathbf{1}, \\ \mathbf{1} & \text{falls } b = \mathbf{0}, \end{cases} \\
(P \wedge Q) &\simeq \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{falls } P() \simeq \mathbf{1} \text{ und } Q() \simeq \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & \text{falls } P() \simeq \mathbf{0} \text{ oder } Q() \simeq \mathbf{0} \end{cases} \\
(P \vee Q) &\simeq \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{falls } P() \simeq \mathbf{1} \text{ oder } Q() \simeq \mathbf{1}, \\ \mathbf{0} & \text{falls } P() \simeq \mathbf{0} \text{ und } Q() \simeq \mathbf{0} \end{cases} \\
(P \rightarrow Q) &\simeq \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{falls } P() \simeq \mathbf{0} \text{ oder } Q() \simeq \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & \text{falls } P() \simeq \mathbf{1} \text{ und } Q() \simeq \mathbf{0} \end{cases} \\
\exists^{\mathcal{A}}(P) &\simeq \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{falls } P(a) \simeq \mathbf{1} \text{ für ein } a \in A, \\ \mathbf{0}, & \text{falls } P(a) \simeq \mathbf{0} \text{ für alle } a \in A. \end{cases} \\
\forall^{\mathcal{A}}(P) &\simeq \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{falls } P(a) \simeq \mathbf{1} \text{ für alle } a \in A, \\ \mathbf{0}, & \text{falls } P(a) \simeq \mathbf{0} \text{ für ein } a \in A. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ist $\lambda a \in A.P(a, \vec{b})$ die Funktion $a \mapsto P(a, \vec{b})$, so ist

$$\exists a \in A(P(a, \vec{b}) \simeq c) \iff \exists^{\mathcal{A}}(\lambda a \in A.P(a, \vec{b})) \simeq c.$$

Beachte: $\forall^{\mathcal{A}}(P)$ ist nicht definiert für $P \subset \lambda a.\mathbf{1}$

Denotationelle Semantik von Formeln

Jeder Formel $\varphi(\vec{x}) : \mathbf{t}$ mit $\vec{x} : \vec{\sigma}$ wird

$$den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi) \in U_{\vec{\sigma} \rightharpoonup \mathbf{t}},$$

ein partielles, monotones Funktional, zugeordnet, via:

$$den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, x_i = x_j)(\vec{a}) = 1_{U_\sigma}(a_i, a_j), \text{ falls } x_i, x_j : \sigma$$

$$den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, R(\vec{x}))(\vec{a}) = R^{\mathcal{A}}(\vec{a}),$$

$$\begin{aligned} &den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, (\varphi \vee \psi))(\vec{a}) \\ &\quad \simeq \quad \lambda().den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi)(\vec{a}) \vee \lambda().den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \psi)(\vec{a})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \exists y : \sigma.\varphi)(\vec{a}) \\ &\quad \simeq \quad \exists^{\mathcal{A}}(\lambda b \in U_\sigma.den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, y, \varphi)(\vec{a}, b)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi_0 \textbf{ where } \{P_1(\vec{y}_1) \simeq \varphi_1, \ldots, P_n(\vec{y}_n) \simeq \varphi_n\})(\vec{a}) \\ &\quad \simeq \quad den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \vec{P}, \varphi_0)(\vec{a}, \vec{p}), \end{aligned}$$

wobei zu $\vec{a}$ das Tupel $\vec{p}$ die kleinste Lösung von

$$h_i(\vec{b}) \simeq den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{P}, \varphi_i)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{h}), \quad 1 \leq i \leq n$$

durch partielle monotone Funktionale $\vec{h}$ ist.

Fixpunktsatz: Für partielle monotone Funktionale F_i und Parameter $\vec{a}$ hat jedes Gleichungssystem

$$h_i \simeq F_i(\vec{a}, \vec{h}), \quad 1 \leq i \leq n,$$

eine $\subseteq$-kleinste Lösung durch partielle Funktionen $\vec{h}$.

Beweisidee: Approximiere die Lösung durch

$$\vec{h}_0 := \vec{\emptyset}, \quad \vec{h}_{\alpha+1} := \vec{F}(\vec{h}_\alpha), \quad \vec{h}_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \vec{h}_\alpha.$$

Bedeutung $[\![\varphi]\!]$

Mit dem Denotationsfunktional definiert man die Bedeutung von Formeln durch

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}}[\vec{a}/\vec{x}] \simeq den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi)(\vec{a})$$

und von Aussagen durch

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}} \simeq den^{\mathcal{A}}((), \varphi)().$$

Beispiele zu $[\![\varphi]\!]$

Für die reflexiven Aussagen

$$\begin{aligned} \mathit{Wahrsager} &:= P() \ \mathbf{where}\ \{P() \simeq P()\}, \\ \mathit{Lügner} &:= P() \ \mathbf{where}\ \{P() \simeq \neg P()\}, \end{aligned}$$

existieren $[\![\mathit{Wahrsager}]\!]$ und $[\![\mathit{Lügner}]\!]$ nicht: die kleinste Lösung von $P() \simeq P()$ ist die leere Funktion. Für

$$\begin{aligned} \mathit{Barbier} := \ & \exists x P(x) \ \mathbf{where} \\ & \quad \{P(x) \simeq \forall y (R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y))\} \end{aligned}$$

ist $[\![\mathit{Barbier}]\!] = \mathbf{0}$, denn $\lambda a \in U_{\mathbf{e}}.\mathbf{0}$ ist die kleineste Lösung in P von

$$P(x) \simeq \forall y (R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y)).$$

Beispiel: Vorfahre

Vorfahre: $a \prec b$ stehe für „a ist Kind von b“.

$$\begin{array}{rcl} \varphi & := & P(c) \ \mathbf{where} \\ & & \quad \{P(x) \simeq x \prec d \vee \exists y(x \prec y \wedge P(y))\} \\ \psi & := & Q(d) \ \mathbf{where} \\ & & \quad \{Q(z) \simeq c \prec z \vee \exists y(y \prec z \wedge P(y))\} \end{array}$$

Beide drücken aus: „c ist Nachkomme von d“.

- Falls c ein Nachkomme von d ist: dann gilt $[\![\varphi]\!] \simeq \mathbf{1}$ und $[\![\psi]\!] \simeq \mathbf{1}$.
- Falls c kein Nachkomme von d ist: $[\![\varphi]\!] \simeq \mathbf{0}$ gilt nur, wenn die Länge von Ketten

  $$c \prec c_1 \prec c_2 \prec \ldots \prec c_n$$

  beschränkt ist. Dann wird $P(c_n) \simeq \mathbf{0}$ für maximales n, dann $P(c_{n-1}) \simeq \mathbf{0}$, usw.

  $[\![\psi]\!] \simeq \mathbf{0}$ gilt nur, falls die Länge von Ketten

  $$d_n \prec d_{n-1} \prec \cdots \prec d_1 \prec d$$

  beschränkt ist.

Definierbarkeit der Wahrheit

Eine partielle Relation $R \subseteq A^n$ wird durch eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *schwach repräsentiert*, wenn für alle $\vec{a} \in A^n$:

$$R(\vec{a}) \simeq \mathbf{1} \iff den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi)(\vec{a}) \simeq \mathbf{1}.$$

R wird durch φ *stark repräsentiert* oder *definiert*, wenn für alle $\vec{a} \in A^n$ gilt:

$$R(\vec{a}) \simeq den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi)(\vec{a}).$$

Definierende Formeln $\varphi(\vec{x})$ *totaler* Relationen haben für jede Belegung $\vec{a}$ eine Bedeutung $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}}[\vec{a}/\vec{x}]$.

Theorem Sei $\mathcal{A}$ eine Interpretation mit $|A| = \infty$ und einer erststufig definierbaren injektiven Funktion $\pi : A \times A \to A$. Erweitere die Sprache um einen Namen $\underline{a}$ für jedes $a \in A$ und definiere mit π für jede Formel φ der erweiterten Sprache eine *Gödelnummer* $\ulcorner\varphi\urcorner \in A$. Dann ist das Wahrheitsprädikat,

$$T_{\mathcal{A}}(s) \simeq \begin{cases} [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}}, & \text{falls } s = \ulcorner\varphi\urcorner \text{ für eine Aussage } \varphi, \\ \mathbf{0}, & \text{sonst} \end{cases}$$

ein partielles definierbares Prädikat.

Iteratoren: abstrakte sequentielle Maschinen

Ein *Iterator* $f := (S, T, \delta, \mathit{in}, \mathit{out})$ von A nach B besteht aus

(i) eine Menge $S \neq \emptyset$, den *Zuständen*, mit einer Teilmenge $T \subseteq S$ den *Endzuständen*,

(ii) einer (totalen) Funktion $\delta : S \to S$, der *Übergangsfunktion*, und

(iii) zwei Funktionen $\mathit{in} : A \to S$ und $\mathit{out} : S \to B$, der *Ein-* bzw. *Ausgabefunktion.*

Zu $a \in A$ sein

$$N(a) \simeq \text{das kleinste } n \in \text{ mit } \delta^n(a) \in T,$$

wobei $\delta^0(a) := a$ und $\delta^{n+1}(a) := \delta(\delta^n(a))$ ist.

Der Iterator f *berechnet* die partielle Funktion

$$\overline{f} : A \to B, \qquad f(a) \simeq \mathit{out}(\delta^{N(a)}(a)). \tag{21}$$

Bem.: Es wird keine Endlichkeitsforderung gestellt.

Beispiel: endlicher Automat, Turingmaschine usw.

Rekursoren

Ein *Rekursor*

$$\mathbf{f} = [f_0, \ldots, f_n] : D_{i_0} \hookrightarrow D_{i'_0} \tag{22}$$

über $\mathcal{A}$ vom Typ $[\tau_0, \ldots, \tau_n]$ ist ein Tupel von partiellen monotonen Funktionalen $f_i \in D_{\tau_i}$ mit Typen

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \rho_1 \times \ldots \times \rho_n \times \iota_0 \to \iota'_0 \\ \tau_i &= \iota_i \times \rho_1 \times \ldots \times \rho_n \times \iota_0 \to \iota'_i, \end{aligned}$$

wobei $\rho_i = \iota_i \to \iota'_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Der Rekursor (22) *definiert* die partielle Funktion

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{f}} &: D_{\iota_0} \rightharpoonup D_{\iota'_0}, \\ \overline{\mathbf{f}}(b) &\simeq f_0(\overline{p}^b_1, \ldots, \overline{p}^b_n, b), \end{aligned} \tag{23}$$

wobei $(\overline{p}^b_1, \ldots, \overline{p}^b_n) \in D_{\rho_1} \times \cdots \times D_{\rho_n}$ die kleinste Lösung der *simultan rekursiven Definition*

$$\begin{aligned} p_1(x_1) &\simeq f_1(x_1, p_1, \ldots, p_n, b) \\ &\vdots \\ p_n(x_n) &\simeq f_n(x_n, p_1, \ldots, p_n, b), \end{aligned} \tag{24}$$

durch partielle Funktionen p_i passenden Typs ist.

These: Rekusoren modellieren *Algorithmen*

Zwei Rekursoren $[f_0, \ldots, f_n]$ und $[g_0, \ldots, g_m]$ auf $\mathcal{A}$ sind *gleich*, wenn $n = m$ ist und die Gleichungssysteme (24) „durch eine Permutation in einander überführt werden können“ (mit entsprechender Vertauschung von Argumentstellen die f_i, g_j).

Compiler: Rekursoren $\mapsto$ Iteratoren

Algorithmen können durch Iteratoren (ggf.: Maschinen) *ausgeführt* werden; dabei werden die rekursiven Definitionen beseitigt und in den Zuständen die Belegungen von Variablen gespeichert, die nach den Rekursionsaufrufen wieder benötigt werden. (Stapel)

These: Iteratoren modellieren *Implementierungen*

Aber Iteratoren sind kein guter Begriff von Algorithmus, weil die Wahl des Iterators, der die Rekursion simuliert, nicht fest mit dem Algorithmus verbunden ist und Eigenschaften der Simulation die Eigenschaften des Rekursors überlagern.

Intensionale Semantik von Formeln

Jeder Formel $\varphi(\vec{x}) : \mathbf{t}$ mit $\vec{x} : \vec{\sigma}$ wird in der Funktionalstruktur $\mathcal{A}$ ein Rekursor

$$int^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi) : U_{\vec{\sigma}} \hookrightarrow U_{\mathbf{t}}$$

zugeordnet, die *referentielle Intension* von φ in $\mathcal{A}$, die das partielle monotone Funktional

$$den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi) : U_{\vec{\sigma}} \rightharpoonup U_{\mathbf{t}}$$

definiert oder *berechnet*. Dazu werden (vgl. JSL 54, 1989) Reduktionsregeln zur Umwandlung von Ausdrücken angegeben, sodaß

$$\varphi \rightsquigarrow_{\mathcal{A}} \psi \quad \Rightarrow \quad den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi) = den^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \psi),$$

die ausgedrückten Algorithmen unter Reduktionen intuitiv nicht verändert werden, und an *irreduziblen* φ der Rekursor $int^{\mathcal{A}}(\vec{x}, \varphi)$ direkt ablesbar ist.

Jedes φ hat ein irreduzibles φ' mit $\varphi \rightsquigarrow_{\mathcal{A}} \varphi'$, die (bis auf Umbenennung gebundener Variablen eindeutige) *Normalform* $nf(\varphi)$. Mit ihr setzt man

$$\begin{aligned} \{\!|\, \varphi \,|\!\} \quad &:= \quad int^{\mathcal{A}}(\vec{x}, nf(\varphi)) \\ \varphi \sim_{\mathcal{A}} \psi \quad &:\Longleftrightarrow \quad nf(\varphi) = nf(\psi) \end{aligned}$$

(modulo Variablenumbennennung).

Beispiele

a) atomare Aussagen $R(a,b)$: die Normalform besagt, daß die Argumente simultan auszuwerten sind und dann das Prädikat aufzurufen ist:

$$\begin{aligned} &R(a,b) \rightsquigarrow_{\mathcal{A}} \\ &\qquad R(p_1(),p_2()) \ \mathbf{where}\ \{p_1() \simeq a, p_2() \simeq b\} \end{aligned}$$

Man erhält: $\{\!|\, R(a,b)\,|\!\} = [f_0, f_1, f_2]$ mit

$$\begin{aligned} f_0(p_1,p_2) &\simeq R(p_1(),p_2()), \\ f_1(p_1,p_2) &\simeq a, \\ f_2(p_1,p_2) &\simeq b. \end{aligned}$$

b) Die Aussagen

$$\begin{aligned} \mathit{L\ddot{u}gner} &:= P()\ \mathbf{where}\ \{P() \simeq \neg P()\} \\ \mathit{Wahrsager} &:= P()\ \mathbf{where}\ \{P() \simeq P()\} \end{aligned}$$

sind schon in Normalform, und man erhält

$$\begin{aligned} \{\!|\, \mathit{L\ddot{u}gner} \,|\!\} &= [f_0, f_1] \\ \{\!|\, \mathit{Wahrsager} \,|\!\} &= [f_0, f_0] \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} f_0(P) &\simeq P(), \\ f_1(P) &\simeq \neg P(). \end{aligned}$$

Beispiel $\{\!|\, \boldsymbol{Barbier} |\!\}$

$$
\begin{aligned}
Barbier &:= \exists x P(x)\ \textbf{where} \\
&\qquad \{P(x) \simeq \forall y(R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y))\} \\
\leadsto_{\mathcal{A}}\ & \exists^{\mathcal{A}}(P_0)\ \textbf{where} \\
& \{P_0(x) \simeq P(x)\ \textbf{where} \\
& \qquad\qquad \{P(x) \simeq \forall y(R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y))\}\} \\
\leadsto_{\mathcal{A}}\ & \exists^{\mathcal{A}}(P_0)\ \textbf{where} \\
& \{P_0(x) \simeq P(x),\ P(x) \simeq \forall y(R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y))\} \\
\leadsto_{\mathcal{A}}\ & \exists^{\mathcal{A}}(P_0)\ \textbf{where} \\
& \{P_0(x) \simeq P(x),\ P(x) \simeq \forall^{\mathcal{A}}(\lambda(y)\, P_1(x,y)), \\
& \ P_1(x,y) \simeq (R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y))\} \\
\leadsto_{\mathcal{A}}\ & \exists^{\mathcal{A}}(P_0)\ \textbf{where} \\
& \{P_0(x) \simeq P(x),\ P(x) \simeq \forall^{\mathcal{A}}(\lambda(y) P_1(x,y)), \\
& \ P_1(x,y) \simeq (\lambda() P_2(x,y) \leftrightarrow \lambda() \neg P_3(y,y)), \\
& \ P_2(x,y) \simeq R(x,y),\ P_3(x,y) \simeq \neg R(y,y)\} \\
\Rightarrow\ \ & \{\!|\, Barbier |\!\} = [f_0, f, f_1, f_2, f_3]
\end{aligned}
$$

Aus der Def. der Gleichheit von Rekursoren folgt z.B.

- $(\varphi \vee \psi) \sim_{\mathcal{A}} (\psi \vee \varphi)$ und $(\varphi \wedge \psi) \sim_{\mathcal{A}} (\psi \wedge \varphi)$,
- Ist $Q^{\mathcal{A}} = (R^{\mathcal{A}})^{\breve{}}$, so ist $Q(b,a) \sim_{\mathcal{A}} R(a,b)$.

Entscheidbarkeit der intensionalen Gleichheit $\sim_{\mathcal{A}}$

Eine *Rekursorstruktur* $\mathcal{A} = (\mathcal{U}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ der Signatur $\{f_1 : \tau_1, \ldots, f_n : \tau_n\}$ besteht aus einem Universum $\mathcal{U}$ und Rekursoren $\mathbf{f}_i$, die Funktionale $\overline{\mathbf{f}}_i \in \mathcal{U}_{\tau_i}$ definieren.

Jede Funktionalstruktur ist eine Rekursorstruktur, bei der f_i durch den Rekursor $[f_i^{\mathcal{A}}]$ definiert wird.

Theorem (Y. Moschovakis, 1990)
Für jede Rekursorstruktur $\mathcal{A}$ der endlichen Signatur $\{f_1 : \tau_1, \ldots, f_n : \tau_n\}$ ist die Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ der Gleichheit von Intensionen entscheidbar.

D.h. die Relation

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}}(k,l) \quad :\Longleftrightarrow \quad & \text{es gibt Formeln oder Terme } \alpha, \beta \text{ mit} \\ & k = \ulcorner\alpha\urcorner,\ l = \ulcorner\beta\urcorner, \text{ und } \alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta \end{aligned}$$

ist eine rekursive Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Korollar Falls $\mathcal{A}$ eine erststufig definierbare Paarkodierung hat, ist $S_{\mathcal{A}}$ elementar, d.h. durch eine erststufige Formel definierbar.

Indirekte Rede

Frege hatte für Aussagen wie „t glaubt, daß ψ", kurz $G(t,\varphi)$, angenommen:

$$[\![G(t,\psi)]\!] = F_G([\![t]\!], \{\!|\, \psi \,|\!\})$$

Mit einer Gödelisierung können wir immerhin indirekt Aussagen über Aussagen in der formaliserten Sprache ausdrücken, etwa

$$G(t, \ulcorner\psi\urcorner).$$

Daß Glaubensprädikate nicht über Sätze, sondern deren Sinn sprechen, kann man zumindest durch eine Invarianzforderung ausdrücken:

$$G(t,\ulcorner\psi\urcorner) \land S_{\mathcal{A}}(\ulcorner\psi\urcorner,\ulcorner\vartheta\urcorner) \to G(t,\ulcorner\vartheta\urcorner)$$

Nach dem Korrolar ist das eine erststufige Formel, wenn $\mathcal{A}$ eine erststufige Paarkodierung hat.

Bem. Es gilt nur eine eingschränkte Form eines Substitutionslemmas, (JSL 54, Thm. 2E.2)

$$s(x) \sim t(x), u \sim v \Rightarrow s[u/x] \sim t[v/x]$$

bei der die $\sim$ auf Kontexte relativiert werden muß.

Beweis der Entscheidbarkeit

OBdA ist $\mathcal{A} = (\mathcal{U}, f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, \ldots)$ eine Funktionalstruktur (sonst wird es expandiert) und die Formeln

$$\begin{array}{rcl} \varphi & \equiv & \varphi_0 \ \mathbf{where}\{p_1(x_1) \simeq \varphi_1, \ldots, p_n(x_n) \simeq \varphi_m\} \\ \psi & \equiv & \psi_0 \ \mathbf{where}\{q_1(x'_1) \simeq \psi_1, \ldots, q_m(x'_m) \simeq \psi_m\} \end{array}$$

sind in Normalform, mit $m = n$. Definieren sie dieselben Rekursoren?

Man muß alle Vertauschungen von Gleichungen (und Argumenten) probieren und feststellen, ob dieselben partiellen Funktionen definiert werden.

Dazu muß man entscheiden, ob eine gegebene Identität der folgenden Form in $\mathcal{A}$ gilt:

$$f(z_1, \ldots, z_m) \simeq g(z_{m+1}, \ldots, z_l), \tag{25}$$

$$f(z_1, \ldots, z_m) \simeq p(w_1, \ldots, w_k), \tag{26}$$

$$q(w_1, \ldots, w_m) \simeq p(w_{m+1}, \ldots, w_l) \tag{27}$$

wobei

- f, g sind unter den $f_i^{\mathcal{A}}$, $\mathbf{1}, \mathbf{0}$, oder *if-then-else*,
- jedes z_i ist ein *direkter* Ausdruck, d.h. eine Variable $x : \iota$ oder ein $p(\vec{x} : \vec{\iota})$ oder $\lambda \vec{s}.p(\vec{x} : \vec{\iota})$,
- jedes w_j ist eine Variable $w : \iota$ oder ein $r(\vec{x} : \vec{\iota})$.

Fall 1: jedes $\mathcal{U}_\iota$ von $\mathcal{A}$ ist unendlich

Lemma 1 In $\mathcal{A}$ ist eine Identität der Form

$$p(\vec{w}) \simeq q(\vec{w}') \tag{27}$$

nur dann gültig, wenn $p(\vec{w}) \equiv q(\vec{w}')$.

Beweis: wenn $w_i \not\equiv w'_i$ oder $p \not\equiv q$ ist, kann man die Variablen w_i, w'_i bzw. die von $r(\vec{x} : \vec{\iota}), r'(\vec{x}' : \vec{\iota}')$ oder die p, q bzw. r, r' unterschiedlich belegen.

Lemma 2 Man kann $\mathcal{A}$ um endlich viele Funktionale

$$ev^k(p, x_1, \ldots, x_k) \simeq p(x_1, \ldots, x_k)$$

expandieren, so daß jede gültige Identität der Form

$$f(z_1, \ldots, z_m) \simeq p(w_1, \ldots, w_k) \tag{26}$$

effektiv äquivalent ist zu einer Identität der Form

$$f(z_1, \ldots, z_m) \simeq g(z_{m+1}, \ldots, z_l). \tag{25}$$

Beweis von Lemma 2: (Skizze)

Sei $f(z_1,\ldots,z_m) \simeq p(w_1,\ldots,w_k)$ eine gültige Identität der Form (26), und darin ein $w_i \equiv r(\vec{x})$.

Man zeigt: (*) Es gibt ein $1 \leq j \leq m$, so daß

(i) $z_j \equiv w_i$, oder

(ii) $z_j \equiv \lambda(s_1,\ldots,s_{l(j)})r(\vec{y})$ und $w_i \equiv r[\vec{v}/\vec{s}]$ für *plazierte* Variable $\vec{v}$ von $f(\vec{z}) \simeq p(\vec{w})$.

Eine Variable v in $f(\vec{z}) \simeq p(\vec{w})$ ist *plaziert*, falls $v \equiv z_j$ für ein $1 \leq j \leq m$. Sei $q \leq m$ die Anzahl der plazierten Variablen. Es können höchstens

$$d := \sum_{j=1}^{m} q^{l(j)}$$

verschiedene Terme w_i gemäß (ii) entstehen, etwa $w_1,\ldots,w_d$. Man kann also von diesen mehrfach vorkommenden Termen abstrahieren und

$$p(w_1,\ldots,w_k)$$

in $f(\vec{z}) \simeq p(\vec{w})$ (mit d unabhängig von k!) durch

$$g(\vec{z}\,') :\equiv ev^d(\lambda(v_1,\ldots,v_d)p(\vec{u},\vec{v}), w_1,\ldots,w_d)$$

ersetzen; die $\vec{u}$ sind w_i nach (i).

Man kann $l(j)$ aus (ii), also d, am Typ von f ablesen.

Folgerung Eine Identität der Form

$$f(z_1, \ldots, z_m) \simeq p(w_1, \ldots, w_k) \tag{26}$$

ist nicht gültig in $\mathcal{A}$, wenn die Zahl der verschiedenen (nicht-variablen) Terme w_i in $p(\vec{w})$ größer als d ist.

Ist diese Zahl $\leq d$, so kann man $p(w_1, \ldots, w_k)$ durch Abstraktion der darin mehrfach vorkommenden Terme äquivalent durch ein

$$g(\vec{z}\,') :\equiv ev^d(\lambda(v_1, \ldots, v_d)p(\vec{u}, \vec{v}), w_1, \ldots, w_d)$$

ersetzen, worin d nur vom Typ von f abhängt.

Folgerung Es genügt, die Gültigkeit in $\mathcal{A}$ von Identitäten der From

$$f(\vec{z}) \simeq g(\vec{z}\,') \tag{25}$$

zu entscheiden, wobei f eines der $f_i^{\mathcal{A}}$ und g eines dieser $f_i^{\mathcal{A}}$ oder eines der ev^k mit $k \leq d$ ist.

Gültigkeit strikter Identitäten

Beachte, daß in den Identitäten $f(\vec{z}) \simeq g(\vec{z}\,')$ die z_i die Form $x : \iota$, $p(\vec{x} : \vec{\iota})$, $\lambda\vec{s}.p(\vec{x} : \vec{\iota})$ haben.

Aber: aus der Gültigkeit von $f(x, y) \simeq g(x)$ folgt *nicht* die Gültigkeit von $f(x, p(x)) \simeq g(x)$:

Damit $[\![t]\!]^{\mathcal{A}}$ strikt ist, muß $f(a, p(a))$ undefiniert sein, wenn $p(a)$ undefiniert ist; aber g kann total sein.

Umweg: erweitere Grundmengen B zu $B^{\perp} := B \dot{\cup} \{\perp\}$ und betrachte partielle $f : A \rightharpoonup B$ als totale Funktionen $f^{\perp} : A \to B^{\perp}$:

$$f^{\perp}(a) := \begin{cases} f(a), & \text{falls } a \in dom(f), \\ \perp, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Einer Variablen $x : \iota$ wird durch eine *strikte Belegung* über $\mathcal{A}$ ein Element aus $\mathcal{U}_{\iota}$ und durch eine *erweiterte Belegung* ein Element aus $\mathcal{U}_{\iota}^{\perp}$ zugeordnet.

Eine Formel ist *strikt* (bzw. *erweitert*) gültig in $\mathcal{A}$, falls sie für jede strikte (bzw. erweiterte) Belegung über $\mathcal{A}$ wahr ist.

Notation: $t{\downarrow}$ steht für $t \neq \perp$.

Bedeutungswörterbücher

Ein *Wörterbucheintrag für* (f, g) ist eine Formel

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_m) \simeq g(x_{m+1}, \ldots, x_l),$$

wobei die $x_1, \ldots, x_l$ feste *Spezialvariablen* von passendem Typ sind und für die φ_j gilt:

(i) für jede Spezialvariable x kommt höchstens eine Gleichung der Form $x = u$ unter $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ vor,

(ii) für jedes Paar x, x' von Spezialvariablen kommt höchstens eine Gleichung $\lambda(\vec{s})x(\vec{u}) = \lambda(\vec{s})x'(\vec{v})$ oder $x(\vec{u}) = x'(\vec{v})$ unter $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ vor,

(iii) φ_j ist $u \neq \perp$ oder $u \neq v$ für Variablen $u, v : \iota$, die frei in den Formeln aus (i),(ii) vorkommen.

Bis auf die Wahl der Variablen gibt es zu jedem (f, g) nur endlich viele in $\mathcal{A}$ (erweitert) gültige Einträge. Relativ zu einer hinreichend großen Liste von Variablen setze:

Das *Wörterbuch für* (f, g) ist die Menge aller in $\mathcal{A}$ gültigen Einträge für (f, g). Das *Wörterbuch für* $\mathcal{A}$ ist die Vereinigung der Wörterbücher aller Paare (f, g).

Ziel: Jedem $f(\vec{z}) \simeq g(\vec{z}\,')$ werden bedingte Gleichungen $\varphi \to E$ zugeordnet, so daß äquivalent sind:

(i) $f(\vec{z}) \simeq g(\vec{z}\,')$ ist strikt gültig in $\mathcal{A}$

(ii) alle $\varphi \to E$ sind erweitert gültig in $\mathcal{A}$.

Methode: Die Spezialvariable $x_1, \ldots, x_m$ kommen nicht in $f(\vec{z}) \simeq g(\vec{z}\,')$ vor.

(i) Für jede Grundvariable z_i von $\vec{z}, \vec{z}\,'$ ergänze φ um $x_i = z_i \wedge x_i\!\downarrow$,

(ii) Für z_i, z_j mit $i \neq j$ aus $\vec{z}, \vec{z}\,'$ die keine Grundvariable sind: falls

$$z_i \equiv \lambda(\vec{u})r(x_1, \ldots, x_k), \;\; z_j \equiv \lambda(\vec{v})r(y_1, \ldots, y_k)$$

mit bv-Unifikator $(T, S, \vec{s})$ ist, ergänze φ um

$$\lambda(\vec{s})x_i(T\vec{u}) \simeq \lambda(\vec{s})x_j(S\vec{v}).$$

(iii) Nach (i) und (ii) ergänze φ um $u\!\downarrow$ für jede Variable $u : \iota$ von $f(\vec{z}) \simeq g(\vec{z}\,')$, die keine Spezialvariablen sind, und um $u \neq v$ für verschiedene solcher Variablen $u, v : \iota$.

Analog: Einträge für identifizierte $u, v : \iota$ aus $\vec{z}, \vec{z}\,'$.

Beispiel: $f(x,y) \simeq g(x)$ werden folgende bedingte Gleichungen zugeordnet:

$$\begin{aligned}
&x_1 = x \wedge x_2 = y \wedge x_3 = x \wedge x \neq y \wedge (x_1, x_2, x_3, x, y)\downarrow \\
&\quad \rightarrow f(x_1, x_2) = g(x_3) \\
&x_1 = x \wedge x_2 = x \wedge x_3 = x \wedge (x_1, x_2, x_3, x)\downarrow \\
&\quad \rightarrow f(x_1, x_2) = g(x_3)
\end{aligned}$$

Beispiel: Der Gleichung $f(x, p(x)) \simeq g(x)$ wird nur

$$x_1 = x \wedge x_3 = x \wedge (x_1, x_3)\downarrow \ \ \rightarrow \ \ f(x_1, x_2) = g(x_3)$$

zugeordnet.

Lemma Eine strikte Identität $f(\vec{z}) \simeq g(\vec{z}\,')$ ist äquivalent zur Konjunktion aller dafür erzeugten bedingten Gleichungen

$\Leftarrow$: Die Konjunktion der bedingten Gleichungen sei erweitert gültig, und h sei eine strikte Belegung der Variablen der Identität. Man kann h so auf die Spezialvariablen fortsetzen, daß je nachdem, welche Variablen h gleich belegt, die entsprechende Bedingung einer bedingten Gleichung wahr wird.

$\Rightarrow$

Fall 2: es gibt ein endliches $\mathcal{U}_\iota$

Triviale Methode:

Die Gültigkeit von Identitäten in $\mathcal{A}$ wird auf die Gültigkeit von Identitäten in einem $\mathcal{A}'$ mit unendlichen $\mathcal{U}'_j$ reduziert, indem man endliche $\mathcal{U}_i$ eliminiert:

Ein $f : \{a_1, \ldots, a_n\} \times B \rightharpoonup C$ wird durch n Funktionen

$$f_i : B \rightharpoonup C, \qquad f_i(b) \simeq f(a_i, b)$$

ersetzt. (Komplizierter für Funktionale.) Jede Gleichung über $\mathcal{A}$ kann auf naheliegende Weise in äquivalente Gleichungen über $\mathcal{A}'$ übersetzt werden.

Bessere Methode: (Wie viele Elemente brauchte man?)

Korollar Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{U}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_n^{\mathcal{A}})$ eine Rekursorstruktur, d wie oben aus den Typen der f_i bestimmt, und jedes $\mathcal{U}_\iota$ habe $\geq d$ Elemente. Für jede Identität E mit m (freien und gebundenen) Variablen $x : \iota$ und $2m + 4 \leq d$ wird die Gültigkeit in $\mathcal{A}$ durch das Entscheidungsverfahren korrekt bestimmt.

Man muß also nur die *sehr kleinen* $\mathcal{U}_\iota$ eliminieren, um die Gültigkeit von Gleichungen mit nicht zu vielen Variablen entscheiden zu können.