

Seminar: Relationale Grammatik

- ◆ Boole'sche Algebra
- ◆ Relationenalgebra
- ◆ Peirce'sche Algebra

Boole'sche Algebra

Def: Eine *Boole'sche Algebra* $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ besteht aus einer nicht-leeren Menge A (Vereinigung $+$, Durchschnitt \cdot) mit:

- ♦ $+, \cdot : A \times A \rightarrow A$ sind assoziativ, kommutativ und idempotent, d.h. für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$

$$a+b = b+a$$

$$a+a = a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot a = a$$

Boole'sche Algebra

- ♦ $+$ und \cdot sind distributiv zueinander:

$$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

$$(a \cdot b) + c = (a+c) \cdot (b+c)$$

- ♦ $0, 1$ sind neutrale Elemente für $+$ bzw. \cdot , d.h.

$$a+0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

- ♦ $- : A \rightarrow A$ ist eine Komplementbildung, d.h.

$$a + -a = 1$$

$$a \cdot -a = 0$$

Boole'sche Algebra

Satz

- ♦ Auf jeder B.A. Kann eine partielle Ordnung definiert werden durch: $a \leq b: \Leftrightarrow a + b = b$
- ♦ In jeder *Boole'schen Algebra* gilt für alle $a, b, c \in A$:
 - $a \leq b$ genau dann, wenn $a = a \cdot b$
 - $a \cdot 0 = 0$, also $0 \leq a$
 - $a + 1 = 1$, also $a \leq 1$
 - $-(-a) = a$
 - $-0 = 1$ und $-1 = 0$
 - $-(a + b) = -a \cdot -b$ (de Morgan)
 - $-(a \cdot b) = -a + -b$ (de Morgan)

Boole'sche Algebra

- ◆ Boole'sche Addition

$$A \cup B = \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

- ◆ Boole'sche Multiplikation

$$A \cap B = \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

- ◆ Komplementbildung

$$\neg A = \{x \in M \mid x \notin A\}$$

Boole'sche Algebra

- ◆ Standardbeispiele:

- ◆ Algebra der Wahrheitswerte

$$B = (\{0,1\}, \max, \min, -, 0,1)$$

mit $-1 := 0$ und $-0 := 1$

- ◆ Potenzmengenalgebra einer Menge M

$$2^M := (2^M, \cup, \cap, \emptyset, -, M)$$

mit $-A := M \setminus A := \{m \in M \mid m \notin A\}$

Boole'sche Algebra

- ♦ Anwendung der B.A. in der Computerlinguistik:
- ♦ Operationen $+$, \cdot und $-$ entsprechen "oder", "und" und "nicht"
- ♦ "und" und "oder" können Ausdrücke verschiedener syntaktischer Arten verbinden (Verben, Nomina, Adjektive, Nominalphrasen, Verbalphrasen, ...)
- ♦ Komplementbildung: bei der Bildung von Adjektiven und Nomina als Präfix („unschön“, „Ungerechtigkeit“)

Boole'sche Algebra

- ♦ Bsp: Anwendungen von $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
bzw. $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$:

Leo will ((Nudeln oder Reis) essen)

→ Leo will ((Nudeln essen) oder (Reis essen))

→ (Leo will Nudeln essen) oder (Leo will Reis essen)

Relationenalgebra

- ♦ Operationen auf Relationen

nicht-leere Grundmenge M , $x \in M$ und $y \in M$

$$\langle x, y \rangle \in R \hat{=} xRy$$

Relationenalgebra

- ◆ Def:

Eine *Relationenalgebra* $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1, ;, \smile, I)$

ist eine Boole'sche Algebra $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ mit drei weiteren Operationen $;$, \smile und I , sodaß

Relationenalgebra

- ♦ für alle $r, s, t \in R$ gelten:

$$r;(s;t) = (r;s);t$$

$$r;I = I;r$$

$$r^{\smile} = r$$

$$(r+s);t = (r;t) + (s;t)$$

$$(r+s)^{\smile} = r^{\smile} + s^{\smile}$$

$$(r;s)^{\smile} = s^{\smile}; r^{\smile}$$

$$r^{\smile}; -(r;s) \leq -s, \text{ wobei } r \leq s : \Leftrightarrow r+s = s$$

Relationenalgebra

- ♦ r heißt *reflexiv*, falls $I \leq r$
- ♦ r heißt *transitiv*, falls $r;r \leq r$
- ♦ r heißt *symmetrisch*, falls $r^\vee \leq r$

Eine Relation r ist eine (*totale*) Äquivalenz, falls r (reflexiv,) transitiv und symmetrisch ist

Relationenalgebra

Satz

- ♦ In jeder Relationenalgebra gilt für jedes r, s, t, u :

$$0^\smile = 0, 1^\smile = 1 \text{ und } I^\smile = I$$

$$r \leq s \text{ gdw. } r^\smile \leq s^\smile$$

$$(r \cdot s)^\smile = r^\smile \cdot s^\smile \text{ und } (-r)^\smile = -(r^\smile)$$

$$r;0 = 0 = 0;r \text{ und } 1;1 = 1$$

$$r;(s+t) = (r;s) + (r;t)$$

wenn $r \leq s$ so ist $t;r \leq t;s$ und $r;t \leq s;t$

$$(r;s) \cdot t = 0 \text{ gdw. } (r^\smile;t) \cdot s = 0 \text{ gdw. } (t;s^\smile) \cdot r = 0$$

$$(r;s) \cdot (t;u) \leq r;((r^\smile;t) \cdot (s;u^\smile));u$$

wenn $s;1 = s$, dann ist $r \cdot s = (s \cdot I);r$

Relationenalgebra

- ♦ Vereinigung

$$R \cup S = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ oder } \langle x, y \rangle \in S \}$$

- ♦ Durchschnitt

$$R \cap S = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \text{ und } \langle x, y \rangle \in S \}$$

- ♦ Komplement

$$\neg R = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \notin R \}$$

Relationenalgebra

- ◆ Inverse

$$R^\vee = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \}$$

- ◆ Identität

$$I = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in M \}$$

- ◆ relatives Produkt

$$R;S = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z \in M \langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S \}$$

Relationenalgebra

- ♦ relatives Produkt ist assoziativ:

$$(R;S);T = R;(S;T)$$

- ♦ Inversenbildung ist involutorisch:

$$(R^\smile)^\smile = R$$

- ♦ Inverse antidistributiv bezügl. r. P.

$$(R;S)^\smile = S^\smile;R^\smile$$

- ♦ Identitätsrelation ist ein Einselement:

$$R;I = R$$

Relationenalgebra

- ◆ Relatives Produkt und Inverse sind distributiv bezüglich der Boole'schen Addition:

$$R;(S \cup T) = (R;S) \cup (R;T)$$

$$(R \cup S)^\smile = R^\smile \cup S^\smile$$

$$R^\smile; -(R;S) \subseteq -S$$

Relationenalgebra

- ◆ Anwendung in der Computerlinguistik:
- ◆ Passivbildung von transitiven Verben durch Inversenbildung
- ◆ Bildung zusammengesetzter Relationsnomen

Relationenalgebra

- ◆ Bsp: Passivbildung

wenn $L = \text{lobt}$, dann $L^\smile = \text{wird gelobt}$

$$x \text{ lobt } y = xLy$$

$$y \text{ wird gelobt von } x = yL^\smile x$$

Boole'sche Moduln

- ♦ Ein *Boole'scher Modul* $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mathcal{R} :)$ besteht aus
 - einer Boole'schen Algebra $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$
 - einer Relationenalgebra $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1, ;, \cup, I)$
 - einer Abbildung „:“ von $\mathcal{R} \times \mathcal{B}$ nach \mathcal{B}

Boole'sche Moduln

für alle $a, b \in B$ und $r, s \in R$ gilt:

$$r:(a+b) = r:a + r:b$$

$$r:(s:a) = (r:s):a$$

$$(r+s):a = r:a + s:a$$

$$1:a = a$$

$$0:a = 0$$

$$r^\vee: -(r:a) \leq a$$

Peirce'sche Algebra

Def: eine *Peirce'sche Algebra* über der Menge V

$$\mathcal{P}(V) = (\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$$

ist ein Boole'scher Modul $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :)$ über V und

$A^c = A \times V$ für jedes $A \subseteq V$
die *Rechtszylindrifizierung* von A

für alle $a \in B$ und $r \in R$ gilt:

$$a^c : 1 = a$$

$$(r : 1)^c = r ; 1$$

Peirce'sche Algebra

Beweis

- ♦ Die Rechtszylindrifizierung erfüllt die Axiome einer Peirce'schen Algebra:

$$A^C : 1 = (A \times V) : V = A$$

$$\begin{aligned}(R : 1)^C &= (R : V)^C \\ &= (R : V) \times V \\ &= \{a \in V \mid \exists b \in V R(a,b)\} \times V \\ &= R ; (V \times V) \\ &= R ; 1\end{aligned}$$

Peirce'sche Algebra

- ◆ Peirce'sche Multiplikation

$$R;S = \{ \langle x,y \rangle \mid \text{es gibt ein } z, \text{ so dass } xRz \text{ und } zSy \}$$

- ◆ Konversion

$$R^\smile = \{ \langle y,x \rangle \mid xRy \}$$

Peirce'sche Algebra

- ◆ Peirce'sche Addition

$$R^+S = -(-R; -S)$$

- ◆ progressive Involution

$$R^S = -(-R; S)$$

- ◆ regressive Involution

$${}^R S = -(R; -S)$$

Peirce'sche Algebra

- ♦ Vorbereich

$$\text{dom}R = \{x \in M \mid \text{es gibt ein } y, \text{ so dass } xRy\}$$

- ♦ Nachbereich

$$\text{ran}R = \text{dom}R^\smile = \{y \in M \mid \exists x, \text{ so dass } xRy\}$$

- ♦ Feld $\mathcal{F}(R)$

$$\mathcal{F}(R) = \text{dom}R \cup \text{ran}R$$

Peirce'sche Algebra

- ◆ Operationen auf Mengen und Relationen
- ◆ Vorbeschränkung

$$R \upharpoonright A = R \cap (A \times M)$$

- ◆ Nachbeschränkung

$$R \upharpoonright A = R \cap (M \times A)$$

Peirce'sche Algebra

- ◆ Bild einer Menge A unter einer Relation R

$$R''A = \{y \in M \mid \exists x, x \in A \text{ und } xRy\}$$

- ◆ Gegenbild der Menge A unter R

$$R:A = \{x \in M \mid \exists y, y \in A \text{ und } xRy\}$$

Peirce'sche Algebra

Anwendung auf transitive Verben o. Relationsnomen

- ♦ TV_1 = hassen
- ♦ TV_2 = lieben
- ♦ RN_1 = Liebhaber
- ♦ RN_2 = Verehrer

Peirce'sche Multiplikation

$$R;S = \{ \langle x,y \rangle \mid \text{es gibt ein } z, \text{ so dass } xRz \text{ und } zSy \}$$

Peirce'sche Algebra

$x(TV_1;RN_1)y$: x TV_1 t jemanden, der RN_1 von y ist
 \Rightarrow *x hasst jemanden, der Liebhaber von y ist*

$x(TV_1;TV_2)y$: x TV_1 t jemanden, der y TV_2 t
 \Rightarrow *x hasst jemanden, der y liebt*

$x(TV_1;TV_2^{\check{)}}y$: x TV_1 t jemanden, den y TV_2 t
 \Rightarrow *x hasst jemanden, den y liebt*

$x(RN_2;RN_1)y$: x ist RN_2 von jemandem, der RN_1 von y ist
 \Rightarrow *x ist ein Verehrer von jemandem, der ein Liebhaber von y ist*

Peirce'sche Algebra

- ◆ Konversion

$$R^{\check{}} = \{ \langle y, x \rangle \mid xRy \}$$

$$xTV_1^{\check{}}y : yTV_1x$$

\Rightarrow *y hasst x (x wird von y gehasst)*

$$xTV_2^{\check{}}y : yTV_2x$$

\Rightarrow *y liebt x*

$$xRN_1^{\check{}}y : y \text{ ist } RN_1 \text{ von } x$$

\Rightarrow *y ist ein Liebhaber von x*

$$xRN_2^{\check{}}y : y \text{ ist } RN_2 \text{ von } x$$

\Rightarrow *y ist ein Verehrer von x*

Peirce'sche Algebra

- ♦ progressive Involution

$$R^S = -(-R;S) \quad \Leftrightarrow \quad \forall z (xRz \wedge z\bar{S}y)$$

$xTV_1^{RN_1}y$: x TV_1 t jeden RN_1 von y
 \Rightarrow *x hasst jeden Liebhaber von y*

$xTV_1^{TV_2}y$: x TV_1 t jeden, der y TV_2 t
 \Rightarrow *x hasst jeden, der y liebt*

$xRN_2^{TV_1}y$: x ist RN_2 von jedem, der y TV_1 t
 \Rightarrow *x ist ein Verehrer von jedem, der y hasst*

Peirce'sche Algebra

- ◆ regressive Involution

$${}^R S = -(R; -S) \quad \Leftrightarrow \quad \forall z (x\bar{R}z \wedge zSy)$$

${}^{TV_1} RN_1 y$: x $TV_1 t$ nur $RN_1 s$ von y

\Rightarrow *x hasst nur jeden Liebhaber von y*

${}^{RN_2} TV_2 y$: x ist RN_2 nur von jedem, der y $TV_2 t$

\Rightarrow *x ist ein Verehrer nur von jedem, der y liebt*

${}^{TV_1} TV_2 y$: x $TV_1 t$ nur jeden, der y $TV_2 t$

\Rightarrow *x hasst nur jeden, der y liebt*

Peirce'sche Algebra

Weitere Beispiele:

- ◆ Relative Implikation

$$R \vec{\rightarrow} S \Leftrightarrow (-R \dagger S) \Leftrightarrow \forall z(xRz \rightarrow zSy)$$

$x(TV_1 \vec{\rightarrow} TV_2)y$: wenn x TV_1 t z , dann TV_2 t z y

\Rightarrow *wen x hasst, der liebt y*

$x(TV_1 \vec{\rightarrow} RN_1)y$: wenn x TV_1 t , der ist ein RN_1 von y

\Rightarrow *wen x hasst, der ist ein Liebhaber von y*

Peirce'sche Algebra

- ◆ Relative Implikation

$$R \leftarrow S \Leftrightarrow (R \vdash -S) \Leftrightarrow \forall z(xRz \leftarrow zSy)$$

$x(TV_1 \leftarrow, TV_2)y$: wenn $z TV_2 t y$, dann $TV_1 t x z$

\Rightarrow *wer y liebt, den hasst x*

$x(TV_1 \leftarrow, RN_1)y$: wenn z ein RN_1 von y ist, dann $TV_1 t x z$

\Rightarrow *wer ein Liebhaber von y ist, den hasst x*

Relationale Sprachen

- ◆ Montaguegrammatik: Einteilung der Inhaltswörter in Kategorien
- ◆ Relationale Sprachen: Alle Bedeutungen liegen auf selber Stufe: sind entweder Mengen oder Relationen über einem zugrundegelegten Individuenbereich.
 - ◆ Zusammensetzung von Bedeutung durch Operationen