Lösungen zu Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Universität München, CIS, SS 2007
H. Leiß, M. Nikolova

25. Mai 2007

Lösung zu Aufgabe 6 Die Behauptung ist:

Jede aussagenlogische Formel φ hat eine gerade Anzahl von Klammern.

Beweis: durch Induktion über den Formelaufbau. Für eine Formel φ sei $k(\varphi)$ die Anzahl der Klammern in φ. Die Behauptung ist also:

Für jede aussagenlogische Formel φ ist $k(\varphi)$ eine gerade Zahl.

Induktionsanfang: Für jede atomare Formel φ ist die Anzahl $k(\varphi)$ gerade.

Bew.: Sei φ eine atomare aussagenlogische Formel, also eine Aussagenvariable A oder die Aussagenkonstante $\perp$. Dann ist $k(\varphi) = 0$, also ist $k(\varphi)$ gerade.

Induktionsschritt: Wenn φ eine zusammengesetzte Formel ist, für deren echte Teilformeln ψ die Zahl $k(\psi)$ gerade ist, dann ist auch $k(\varphi)$ gerade.

Bew.: Sei φ eine zusammengesetzte Formel, und ψ_1 oder ψ_1 und ψ_2 ihre direkte(n) Teilformel(n). Nach der (Induktions-) Annahme sind die Anzahlen $k(\varphi_1)$ und $k(\varphi_2)$ von Klammern in ψ_1 und ψ_2 gerade. Zu zeigen ist, daß auch $k(\varphi)$ gerade ist. Beweis:

Fall 1: Sei $\varphi := \neg\psi_1$. Dann ist $k(\varphi) = k(\psi_1) + 0$, also eine gerade Zahl.

Fall 2: Sei $\varphi := (\psi_1 \wedge \psi_2)$. Dann ist $k(\varphi) = k(\psi_1) + k(\psi_2) + 2$, also eine gerade Zahl.

Fall 3: Sei $\varphi := (\psi_1 \vee \psi_2)$. Dann ist $k(\varphi) = k(\psi_1) + k(\psi_2) + 2$, also eine gerade Zahl.

Fall 4: Sei $\varphi := (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$. Dann ist $k(\varphi) = k(\psi_1) + k(\psi_2) + 2$, also eine gerade Zahl.

Fall 5: Sei $\varphi := (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$. Dann ist $k(\varphi) = k(\psi_1) + k(\psi_2) + 2$, also eine gerade Zahl.

Es folgt also mit dem Induktionsaxiom, dass jede aussagenlogische Formel φ eine gerade Anzahl von Klammern hat.

Das Induktionsaxiom besagt in diesem Fall: Wenn eine Eigenschaft auf alle atomaren Formeln zutrifft und sich beim Aufbauen zusammengesetzter Formeln von den Teilformeln auf die Zusammensetzung überträgt, so trifft die Eigenschaft auf alle Formeln zu.