Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik II

Universität München, CIS, SS 2007

H.Leiß

Abgabetermin: Di, 19.6.2007

Aufgabe 14 Sei $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}}, \ldots, f^{\mathcal{M}}, \ldots, c^{\mathcal{M}}, \ldots)$ eine Struktur und $g : Var \to M$ eine Belegung der Variablen durch Elemente von M. Beweise durch Induktion über den Termaufbau:

> Ist t ein Term, in dem höchstens die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen, so hängt der Wert $[\![t]\!]_g^{\mathcal{M}}$ nicht davon ab, wie g auf Variablen $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ definiert ist.

Für den Fall, daß t gar keine Variablen enthält, hängt daher $[\![t]\!]_g^{\mathcal{M}}$ gar nicht von g ab, sodaß man einfacher $[\![t]\!]^{\mathcal{M}}$ schreiben kann. (3 Punkte)

Hinweis: Zu zeigen ist, daß t bei jeder Belegung $h : Var \to M$ mit $h(x_1) = g(x_1), \ldots, h(x_n) = g(x_n)$ denselben Wert hat wie bei g, also $[\![t]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![t]\!]_h^{\mathcal{M}}$.

Aufgabe 15 Verwende die Prädikatszeichen P, G, I, Z im Sinne von

$$\begin{array}{lcl} P(x) & := & x \text{ ist ein Punkt} \\ G(x) & := & x \text{ ist eine Gerade} \\ I(x,y) & := & x \text{ liegt auf } y \\ Z(x,y,z) & := & y \text{ liegt zwischen } x \text{ und } z \\ x \neq y & := & \neg(x \doteq y) \end{array}$$

Drücke damit im Folgenden auch Formulierungen wie „eine Gerade trifft einen Punkt“, „eine Gerade geht durch einen Punkt“ oder „Punkte liegen in gerader Linie“ aus. Ein „Punkt der Strecke xy“ ist ein Punkt zwischen x und y. (In (a) soll $\wedge$ und $\vee$ stärker binden als $\to$.)

(a) Übersetze die folgenden Axiome (der ebenen Geometrie nach D. Hilbert) in (gleichbedeutende, aber syntaktisch „natürlicher“ aufgebaute) Sätze der Umgangssprache:

   (i) $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \to \exists u (G(u) \wedge I(x,u) \wedge I(y,u)))$ (2 Punkte)

   (ii) $\forall u (G(u) \to \exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge I(x,u) \wedge I(y,u)))$ (2 Punkte)

   (iii) $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \to \forall u \forall v (G(u) \wedge G(v) \to (I(x,u) \wedge I(y,u) \wedge I(x,v) \wedge I(y,v) \to x \doteq y \vee u \doteq v)))$ (2 Punkte)

(b) Übersetze die folgenden Anordnungsaxiome in Formeln der Prädikatenlogik (so, daß die Aussagen intuitiv wahr sind: wie muß man „je drei“ und „zwischen“ verstehen, damit (iii) wahr ist – dürfen dabei Punkte gleich sein?)

(i) Wenn x, y, z Punkte auf einer Geraden sind und y zwischen x und z liegt, so liegt y auch zwischen z und x. (2 Punkte)

(ii) Zu je zwei Punkten x und z einer Geraden gibt es wenigstens einen Punkt y, der zwischen x und z liegt, und wenigstens einen Punkt w, so daß z zwischen x und w liegt. (3 Punkte)

(iii) Unter je drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden anderen liegt. (3 Punkte)

(iv) Angenommen, x, y, z seinen drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und u eine Gerade, die keinen der Punkte x, y, z trifft. Wenn dann die Gerade u durch einen Punkt der Strecke xy geht, so geht sie auch entweder durch einen Punkt der Strecke yz oder der Strecke xz. (5 Punkte)

Aufgabe 16 Gib (kleine endliche) Strukturen $\mathcal{M} = (M, P^{\mathcal{M}}, \ldots)$ und $\mathcal{N} = (N, P^{\mathcal{N}}, \ldots)$ sowie zwei Formeln $\varphi(x), \psi(x)$ an, so daß die Aussgabe

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$$

in $\mathcal{M}$ wahr ist, aber in $\mathcal{N}$ nicht. (4 Punkte)