Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik II

Universität München, CIS, SS 2007

H.Leiß

Abgabetermin: Di, 5.6.2007

Aufgabe 12 Sei $(A, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ eine Boole'sche Algebra, und $\emptyset \neq B \subseteq A$. Zeige, daß

$$I(B) := \{\, a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \exists b_1, \dots, b_n \in B\ (a \leq b_1 + \dots + b_n)\,\}$$

ein Ideal ist. (4 Punkte)

Aufgabe 13 (Boole'sche Algebra und Gegenteil $\neq$ Negation)

Adjektive A in natürlichen Sprachen drücken Eigenschaften von Objekten aus. Man kann sie grob durch Funktionen $A : I \to \mathbb{B}$ interpretieren, die den Individuen $i \in I$ den Wahrheitswert 1 zuordnen, wenn sie die Eigenschaft haben, sonst den Wert 0.

Da man Adjektive auch komparieren und damit Vergleiche formulieren kann, ist es besser, wenn man sie durch eine Meßfunktion $A : I \to S$ interpretiert, wobei $(S, \leq^S)$ eine *kontinuierliche Skala* ist, in der zwischen zwei Werten stets noch weitere liegen, z.B.

$$S := \{\, r \mid r \in \mathbb{R},\ 0 \leq r \leq 1\,\}, \qquad \leq^S := \{\, (r, s) \in S \times S \mid r \leq s\,\}.$$

(Mit $\leq$ ist die Ordnung der reellen Zahlen gemeint). Dann kann man aus *dem Maß* $A(i) \in S$, *zu dem die Eigenschaft* A *auf* i *zutrifft*, z.B. $Größe(i)$ für $A = groß$, auf folgende Weise eine Bewertung von Vergleichsaussagen mit Wahrheitswerten aus $\mathbb{B}$ bekommen:

$$[\![i \textit{ ist größer als } j]\!] = \begin{cases} 1, & \text{falls } \textit{Größe}(i) > \textit{Größe}(j), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechend bekommt man Wahrheitswerte für den nicht-vergleichenden Gebrauch:

$$[\![i \textit{ ist groß}]\!] := \begin{cases} 1, & \text{falls } \textit{Größe}(i) > 2/3, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad [\![i \textit{ ist klein}]\!] := \begin{cases} 1, & \text{falls } \textit{Größe}(i) < 1/3, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

So erhält man z.B., daß „*i ist nicht groß*“ etwas anderes bedeutet als „*i ist klein*“. Man kann „*i ist extrem groß*“ durch $Größe(i) = 1$ interpretieren, und entsprechend „*i ist extrem klein*“ durch $Größe(i) = 0$.

(a) Wie kann man S zu einem *Boole'schen Verband* $\mathbb{S} = (S, +^S, \cdot^S, {}^{-S}, 0^S, 1^S)$ machen, d.h. einer Struktur, die alle Axiome einer Boole'schen Algebra erfüllt außer $a + \bar{a} = 1$ und $a \cdot \bar{a} = 0$, so daß die durch $+$ definierte Ordnung $\leq$ mit der oben angegebenen Ordnung $\leq^S$ übereinstimmt und „das Gegenteil $\bar{r}^S$" den komplementären Wert $1 - r$ meint, z.B. $\overline{2/3} = 1/3$?

(b) Da S ein Boole'scher Verband ist, kann man auch anderen atomaren Aussagen (die mit Verben statt Adjektiven gebildet sind), einen Wert in S statt in $\mathbb{B}$ geben. Interpretieren wir die Junktoren „und", „oder", „nicht" durch $\cdot^{\mathbb{S}}, +^{\mathbb{S}}, {}^{-\mathbb{S}}$ usw. so erhält jede (quantorenfreie) Aussage einen „genauen" Wert $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{S}}$. Wir können die Skalenwerte $s \in S$ mit

$$h(s) := \begin{cases} 1, & 1/2 < s, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu Wahrheitswerten $h(s) \in \mathbb{B}$ „vergröbern" und dann $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{B}} = h([\![\varphi]\!]^{\mathbb{S}}) \in \mathbb{B}$ definieren.

(i) Warum ist $h : S \to \mathbb{B}$ kein Homomorphismus zwischen $\mathbb{S}$ und $\mathbb{B}$? (Hinweis: beachte den Wert 1/2) (1 Punkt)

Darum ist das oben angegebene $[\![\cdot]\!]^{\mathbb{B}}$ keine gute Auswertungsfunktion für Formeln: gib eine Belegung $g : \mathit{Var} \to S$ an, sodaß $h([\![(A_i \vee \neg A_i)]\!]^{\mathbb{S}}_g) = 0^{\mathbb{B}}$ wird. (1 Punkt)

(ii) Sei $S' := S - \{1/2\}$ und $\mathbb{S}'$ die aus $\mathbb{S}$ entstehende Algebra, wenn man die Operationen auf den Teilbereich S' einschränkt. Ist $h : S' \to \mathbb{B}$ ein Homomorphismus zwischen $\mathbb{S}'$ und $\mathbb{B}$? (1 Punkt)

(c) Mit S wird auch die Menge $I \to S$ der Funktionen von I nach S eine Boole'sche Algebra, wie Aufgabe 7 zeigte. In ihr hat jedes Adjektiv $A : I \to S$ ein „konträres" Gegenstück $\bar{A}$. Zeige, daß „klein" das konträre Gegenstück zu „groß" ist. (1 Punkt)

Damit können wir für Prädikativsätze zwei Arten von *Gegensätzen*, oder zwei Lesarten von „nicht" in *x ist nicht A*, unterscheiden: (a) die zu (x *ist* A) *kontradiktorische* Aussage, $\neg(x$ *ist* $A)$, und (b) die zu (x *ist* A) *konträre* Aussage, (x *ist* $\bar{A}$).

(d) Mache einen Vorschlag, wie man die obige Definition von $[\![i \textit{ ist größer als } j]\!]$ modifizieren könnte, um auch die Graduierung von Adjektiven zu interpretieren: (2 Punkte)

$$[\![i \textit{ ist viel größer als } j]\!] :=$$

$$[\![i \textit{ ist sehr groß }]\!] :=$$

Bem. Da man durch *nicht viel*, *nicht sehr* (= *nur ein wenig*) die Graduierung abstreiten kann, sind auch Aussagen wie *i ist nicht viel größer als j* zweideutig, je nachdem, ob die Grad- oder die Prädikatsnegation gemeint ist.