Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik II

Universität München, CIS, SS 2007

H.Leiß

Abgabetermin: Do, 31.5.2007

Aufgabe 10 *Seien M und N nichtleere Mengen mit $N \subset M$, und $\mathcal{M} = (\mathcal{P}(M), \cup, \cap, ^-, \emptyset, M)$ und $\mathcal{N} = (\mathcal{P}(N), \cup, \cap, ^-, \emptyset, N)$ die jeweiligen Potenzmengenalgebren.*

Definiere die Abbildungen

(a) $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ *durch* $f(A) := A \cap N$, *für jedes* $A \in \mathcal{P}(M)$,

(b) $g : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M)$ *durch* $g(B) := (M \setminus N) \cup B$, *für jedes* $B \in \mathcal{P}(N)$,

(c) $h : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ *durch* $f(A) := \begin{cases} A & \text{falls } m \in A, \\ \emptyset\ , & \text{sonst} \end{cases}$

Welche der Abbildungen ist ein Homomorphismus zwischen Boole'schen Algebren? Überprüfe die Assoziativität, Kommutativität und Idempotenz einer der Operationen $+$ und $\cdot$, ein Distributivgesetz, und die Eigenschaften zu 0 und 1. *(6 Punkte)*

Aufgabe 11 *Sei M eine unendliche Menge und $N \subseteq M$, $m \in M$. Welche der folgenden Teilmengen von 2^M ist ein Ideal der Boole'schen Algebra 2^M?* *(6 Punkte)*

(a) $L(N) := \{ A \subseteq M \mid A \cap N = \emptyset \}$.

(b) $O(N) := \{ A \subseteq M \mid N \subseteq A \}$.

(c) $T(N) := \{ A \subseteq M \mid A \subseteq N \}$.

(d) $T_m(N) := \{ A \subseteq M \mid m \notin A \}$

(e) $E(N) := \{ A \subseteq M \mid N \cap A \text{ ist endlich} \}$.

(f) $U(N) := \{ A \subseteq M \mid N \cap A \text{ ist unendlich} \}$.

Welche der obigen Mengen ist (für welche N) ein Primideal? *(3 Punkte)*

Bem. Da wir im Kurs noch nicht bis zu Primidealen gekommen sind, braucht man für die letzte Frage die Definition aus dem Skriptum. Daher ist der Teil optional.