Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik II

Universität München, CIS, SS 2007

H.Leiß

Abgabetermin: Di, 8.5.2007

Aufgabe 3 *(Induktion über die natürlichen Zahlen) Zeige durch Induktion über m die Behauptung $\forall m \in \mathbb{N}\ P(m)$, wobei*

$$P(m) \quad := \quad \text{Zu jeder Menge } M \text{ mit genau } m \text{ Elementen gibt es genau } 2^m \text{ totale Funktionen } f : M \to \{0,1\}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4 *Zeige durch Induktion über den Aufbau der aussagenlogischen Formeln φ:*

Sind $f, g : Var \to \{0,1\}$ zwei Belegungen mit $f(A) = g(A)$ für alle in φ vorkommenden Variablen A, so ist $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_g$.

(4 Punkte)

Aufgabe 5 *Wo genau(!) liegt der Fehler in folgendem Induktionsbeweis:*

Behauptung: Je $n \geq 1$ Geraden in der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind parallel.

Beweis durch Induktion über n:

Induktionsanfang ($n = 1$): Sei g eine Gerade. Dann ist $g \parallel g$, d.h. g ist zu sich selbst parallel. Da g beliebig gewählt war, gilt die Behauptung für $n = 1$.

Induktionsschritt ($n = m + 1$): Seien $g_1, \dots, g_m, g_{m+1}$ beliebige Geraden. Nach der Induktionsannahme gilt für die m Geraden $g_1, \dots, g_m$, daß sie zu einander parallel sind. Ebenso gilt nach der Induktionsannahme, daß die m Geraden $g_2, \dots, g_m, g_{m+1}$ zu einander parallel sind.

Seien g_i, g_j aus $g_1, \dots, g_{m+1}$. Falls beide in $\{g_1, \dots, g_m\}$ oder in $\{g_2, \dots, g_{m+1}\}$ liegen, sind sie nach der Induktionsannahme parallel zu einander. Im anderen Fall ist $g_i = g_1$ und $g_j = g_{m+1}$ oder umgekehrt. Nach der Induktionsannahme ist einerseits $g_1 \parallel g_m$ und andererseits $g_m \parallel g_{m+1}$. Da die Parallellität eine transitive Beziehung ist, folgt $g_1 \parallel g_{m+1}$, also $g_i \parallel g_j$. Da die Geraden beliebig gewählt waren, gilt die Behauptung für $m + 1$.

Nach dem Induktionsaxiom gilt also die Behauptung. *(3 Punkte)*