Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik II

Universität München, CIS, SS 2007

H.Leiß

Abgabetermin: Do, 26.4.2007

Aufgabe 1 *Wir hatten Zenons Argument dafür, daß der Läufer Achilles die Schildkröte nicht einholen könne, in der Umgangssprache mit Hilfe der Aussage*

$$\varphi := \textit{Achilles hat die Schildkröte bisher noch nicht eingeholt.} \tag{1}$$

formuliert. Zenon zeigt:

$$\begin{aligned}&\textit{Wenn } \varphi \textit{ zum Zeitpunkt } t \textit{ wahr ist,}\\ &\qquad \textit{so gibt es einen Zeitpunkt } s > t, \textit{ zu dem } \varphi \textit{ auch noch wahr ist.}\end{aligned} \tag{2}$$

(s ist der Zeitpunkt, wo Achilles an der Stelle ankommt, wo die Schildkröte zum Zeitpunkt t war.) Daraus schließt er unter der Annahme, daß φ zum Anfangszeitpunkt t des Wettlaufs gilt, daß Achilles die Schildkröte nie einholen wird, d.h.

$$\textit{Wenn } \varphi \textit{ zur Zeit } t \textit{ wahr ist, so ist } \varphi \textit{ für alle Zeitpunkte } s > t \textit{ wahr.} \tag{3}$$

Sei $\mathcal{T} = (T, +1, -1, <)$ eine Zeitstruktur, z.B. die diskrete Zeit $\mathcal{T} = (\mathbb{Z}, +1, -1, <)$ oder die kontinuierliche Zeit $\mathcal{T} = (\mathbb{R}, +1, -1, <)$. Sei $g : Var \times T \to \mathbb{B}$ eine Belegung und A eine Aussagenvariable, so daß für alle $t \in T$:

$$[\![A]\!]^g_t = 1 \iff \textit{Achilles holt die Schildkröte gerade jetzt (d.h. zur Zeit } t\textit{) ein.} \tag{4}$$

(a) Drücke φ durch eine temporallogische Formel $\psi_1(A)$ aus! D.h. für $\psi_1(A)$ und g soll gelten:

$$[\![\psi_1(A)]\!]^g_t = 1 \iff \varphi \textit{ ist zur Zeit } t \textit{ wahr.} \tag{5}$$

(b) Gib eine temporallogische Formel $\psi_2(A)$ an, die die Bedingung (2) ausdrückt, d.h.

$$[\![\psi_2]\!]^g_t = 1 \iff \textit{die Bedingung (2) ist wahr (zur Zeit } t\textit{)} \tag{6}$$

(c) Drücke die Bedingung (3) durch eine Formel $\psi_3(A)$ und dann den Schluß von Zenon durch eine temporallogische wenn-dann-Formel ψ (mit A) aus.

(d) Zeige, daß diese Formel ψ bei g in der diskreten Zeit wahr ist, aber in der kontinuierlichen Zeit nicht. (Für den zweiten Teil wähle g so, daß φ für alle s mit $t \leq s < t + 10$ wahr, aber für alle $s \geq t + 10$ falsch ist.)

Für (a), (b), (c) jeweils 2 Punkte, für (d) 4 Punkte.

Aufgabe 2 *Welche der folgenden Formeln ist bei der Interpretation in der Zeitstruktur*

$$\mathcal{T} = (\mathbb{Z}, <, +1, -1)$$

(der ganzen Zahlen in der Anordnung $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$*) allgemeingültig, erfüllbar, oder unerfüllbar?*

(a) $(TA \vee T\neg A)$, $(FA \vee F\neg A)$, $(GA \vee G\neg A)$, $(FA \wedge F\neg A)$*?*

(b) $(T\neg A \leftrightarrow \neg TA)$, $(F\neg A \leftrightarrow \neg FA)$, $(GA \wedge GB) \rightarrow G(A \wedge B)$ *?*

Gib möglichst eine Begründung an. *(6 Punkte)*