## 1.2 Temporale und Modale Aussagenlogik

Die bisher betrachtete Aussagenlogik behandelt nur die „logischen“ Junktoren *nicht, und, oder, wenn – dann*, aus denen man ein paar weitere wie *weder – noch*, *sowohl – als auch* definieren könnte.

Einige andere Junktoren der Umgangssprache kann man nicht durch Wahrheitsfunktionen interpretieren,

Zum Beispiel hat die Bedeutung von *weil* etwas mit der Ursache-Wirkungs-Beziehung der durch die Teilaussagen beschriebenen Ereignisse zu tun, oder die Bedeutung von *obwohl* mit den Erwartungshaltungen bei Sprecher und Hörer einer Äußerung. Es ist bisher nicht möglich, die Kausalität oder die Erwartungshaltungen von Personen so genau zu erfassen, daß man die Funktionsweise dieser Junktoren formal darstellen könnte.

Es gibt aber weitere Junktoren, wo eine formale Beschreibung der Bedeutung möglich ist. Das sind solche, die zeitliche Verhältnisse und Modaleigenschaften betreffen, die durch Temporaladverbien wie *einst, früher, später einmal, solange – bis* oder durch Modalverben wie *können, müssen* ausgedrückt werden.

### 1.2.1 Temporale Aussagenlogik

#### Syntax der temporalen Aussagenlogik

Wir erweitern den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, indem wir (einstellige) temporale Junktoren, die *Temporaloperatoren* $T, F, G, Y, P, H$, zulassen:

**Definition 1.27**

$$
\begin{array}{rcll}
 & & & \text{intendierte Bedeutung} \\
\varphi, \psi & := & A & \\
 & | & \neg\varphi \mid \ldots \mid (\varphi \to \psi) & \text{(wie bisher)} \\
 & | & T\varphi & \textit{morgen wird } \varphi \textit{ der Fall sein} \\
 & | & F\varphi & \varphi \textit{ wird einmal der Fall sein} \\
 & | & G\varphi & \varphi \textit{ wird immer der Fall sein} \\
 & | & Y\varphi & \textit{gestern war } \varphi \textit{ der Fall} \\
 & | & P\varphi & \varphi \textit{ war einmal der Fall} \\
 & | & H\varphi & \varphi \textit{ war immerr der Fall}
\end{array}
$$

Man kann auch zweistellige temporale Junktoren zulassen, insbesondere

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{intendierte Bedeutung:} \\
S(\varphi, \psi) & \textit{seit zuletzt } \varphi \textit{ der Fall war, gilt } \psi \\
U(\varphi, \psi) & \textit{bis } \varphi \textit{ der Fall sein wird, gilt } \psi
\end{array}
$$

Hierbei steht $S$ für *since* (*seit*), $U$ für *until* (*bis*). Auf diese wollen wir aber nicht eingehen.

**Semantik der temporalen Aussagenlogik**

Um die Bedeutung der neuen Formeln zu erklären, muß man zuerst einmal sagen, wie man die Zeit darstellen will. Man geht meistens von einer (diskreten oder dichten) linear geordneten Zeit

$$\mathcal{T} = (\mathbb{Z}, <, +1, -1) \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{T} = (\mathbb{R}, <, +1, -1)$$

aus und wertet Formeln bei Zeit*punkten* aus.[2] Die Bedeutung von Aussagen soll wieder ein Wahrheitswert sein, aber jetzt hängt dieser Wahrheitswert vom Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$ ab. Dazu muß insbesondere der Wahrheitswert von Aussagevariablen von der Zeit abhängen; die Belegung $g$ sollte also einer Aussagevariablen $A$ zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Wahrheitswerte zuordnen können.

Daher ist jetzt eine *Belegung* eine Funktion

$$g : \mathcal{T} \times \mathit{Var} \to \{0, 1\}.$$

**Definition 1.28** Der *Wert* $[\![\varphi]\!]_t^g$ *der Aussage* $\varphi$ *zum Zeitpunkt* $t$ *bei der Belegung* $g$ ist (induktiv über den Formelaufbau) gegeben durch:

$$\begin{array}{rcl}
[\![A]\!]_t^g & := & g(t, A) \\
[\![\neg\varphi]\!]_t^g & := & -[\![\varphi]\!]_t^g \\
 & \vdots & \\
[\![T\varphi]\!]_t^g & := & [\![\varphi]\!]_{t+1}^g \\
[\![F\varphi]\!]_t^g & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists s > t\ [\![\varphi]\!]_s^g = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![G\varphi]\!]_t^g & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } \forall s > t\ [\![\varphi]\!]_s^g = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![Y\varphi]\!]_t^g & := & [\![\varphi]\!]_{t-1}^g \\
[\![P\varphi]\!]_t^g & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists s < t\ [\![\varphi]\!]_s^g = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![H\varphi]\!]_t^g & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } \forall s < t\ [\![\varphi]\!]_s^g = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{array}$$

Wenn man genau sein will, muß auch die Struktur $\mathcal{T}$ noch angegeben werden, durch die man die Zeit modelliert.

Statt $[\![\varphi]\!]_t^g = 1$ schreibt man dann auch $(\mathcal{T}, g, t) \models \varphi$. In den Fällen, wo $\mathcal{T}$ und $g$ aus dem Kontext bekannt sind, schreibt man auch kurz $t \models \varphi$.

**Definition 1.29** Eine Formel $\varphi$ ist *allgemeingültig* (bezüglich der Zeitstruktur $\mathcal{T}$), wenn $[\![\varphi]\!]_t^g = 1$ ist für alle Belegungen $g : \mathcal{T} \times \mathit{Var} \to \{0, 1\}$ und alle Zeitpunkte $t \in \mathcal{T}$.

[2] Für andere Temporaloperatoren ist es besser, die Formeln bei Zeit*intervallen* auszuwerten, z.B: für "*$\varphi$ während $\psi$*", "*oft in dieser Woche $\varphi$*".

**Beispiel 1.30** (Zenons Paradox) Wir betrachten den Wettlauf von Achilles mit einer Schildkröte. Wir betrachten die Aussage

$A :=$ Achilles hat bisher die Schildkröte nicht eingeholt.

Der Wettlauf beginnt zum Zeitpunkt $t_0$, und die Schildkröte soll einen Vorsprung haben. Zenon behauptet, daß der gute Läufer Achilles die Schildkröte niemals einholen kann.

Zenon argumentiert wie folgt: Angenommen, wir haben schon eine Folge $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ gefunden, so daß $[\![A]\!]^g_{t_i} = 1$ für alle $i \leq n$ gilt; für $n = 0$, den Beginn des Wettlaufs, ist das wegen des Vorsprungs erfüllt. Dann sei $t_{n+1} > t_n$ der Zeitpunkt, zu dem Achilles die Stelle erreicht, wo die Schildkröte zum Zeitpunkt $t_n$ war. Da auch die Schildkröte sich fortbewegt, ist sie zum Zeitpunkt $t_n$ nicht mehr an dieser Stelle; daher hat Achilles sie auch zur Zeit $t_{n+1}$ noch nicht eingeholt, d.h. es gilt auch $[\![A]\!]^g_{t_{n+1}} = 1$. Es gibt also eine *unendliche* Folge

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$$

von Zeitpunkten, wo Achilles die Schildkröte noch nicht eingeholt hat. Also holt er sie nie ein. Das widerspricht aller Erfahrung!

Wo ist der Fehlschluß? Im letzten Schritt wird aus der Tatsache, daß $A$ *unendlich oft* (und wegen dem „bisher“ in $A$ auch *unendlich lange*!) in der Zukunft gilt, geschlossen, daß $A$ *immer* in der Zukunft gilt.

Das Argument ist korrekt, wenn man die Zeit durch $\mathcal{T} = (\mathbb{Z}, <)$ interpretiert, aber falsch, wenn man sie durch $\mathcal{T} = (\mathbb{R}, <)$ interpretiert. Dann kann z.B. $0 \leq t_n < 1$ mit $t_{n+1} = t_n + |1 - t_n|/2$ sein, und trotz $[\![A]\!]^g_t = 1$ für $0 \leq t < 1$ kann $[\![A]\!]^g_1 = 0$ sein.

**Beispiel 1.31** Schon Aristoteles beschäftigte sich mit der temporalen und modalen Aussagenlogik und untersuchte z.B., welche der folgenden Aussagen gelten:

$$\begin{array}{ll} (T\varphi \vee T\neg\varphi), & (T\varphi \wedge T\neg\varphi) \\ (F\varphi \vee F\neg\varphi), & (F\varphi \wedge F\neg\varphi) \\ (G\varphi \vee G\neg\varphi), & (G\varphi \wedge G\neg\varphi) \end{array}$$

Den Nutzen der Temporaloperatoren sieht man z.B., wenn man Aussagen mit Zeitmarkierung und Negation formalisieren will, etwa:

*Er wird nicht zu kommen versprechen.*
*Sie hatte nicht laut zu singen versprochen.*

### 1.2.2 Modale Aussagenlogik

#### Syntax der modalen Aussagenlogik

Wir erweitern den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, indem wir (einstellige) modale Junktoren, die *Modaloperatoren* $\Box, \Diamond$ zulassen:

**Definition 1.32**

| | | | intendierte Bedeutung |
|---|---|---|---|
| $\varphi, \psi$ | $:=$ | $A$ | |
| | $\mid$ | $\neg\varphi \mid \ldots \mid (\varphi \to \psi)$ | (wie bisher) |
| | $\mid$ | $\Diamond\varphi$ | *es ist möglich, daß* $\varphi$ |
| | $\mid$ | $\Box\varphi$ | *es ist notwendig, daß* $\varphi$ |

In der Umgangssprache werden die Modalitäten auch durch Modaladverbien wie *notwendigerweise* $\varphi$ oder *möglicherweise* $\varphi$ ausgedrückt, oder durch die Verwendung von Modalverben wie *müssen* oder *können*:

> *Muß der Rechner immer abstürzen, wenn ich arbeiten will?*
> *Wenn mein Rechner abgestürzt ist, kann ich nicht arbeiten.*

Es gibt in der Umgangssprache weitere Modaloperatoren, die wir hier nicht betrachten, z.B.

*Es ist wahrscheinlich, daß* $\varphi$.

#### Semantik der modalen Aussagenlogik

Die Semantik der Modaloperatoren ist erst durch Saul Kripke um 1960 formal geklärt worden, obwohl sich schon Aristoteles (340 v.Chr.) damit beschäftigt hat.

Intuitiv bedeutet *möglicherweise* $\varphi$, daß es „die (logische) Möglichkeit" gibt, daß $\varphi$ gilt, d.h. daß es logisch nicht ausgeschlossen ist, daß $\varphi$ gilt. Eine Interpretation wäre also:

$$\Diamond\varphi :\Longleftrightarrow \varphi \textit{ ist erfüllbar},$$

und entsprechend

$$\Box\varphi :\Longleftrightarrow \varphi \textit{ ist allgemeingültig}$$

für die (logische) Notwendigkeit: $\varphi$ ist logisch notwendig, wenn $\varphi$ *unter allen logisch möglichen Umständen* wahr ist.

Nun kann es ja sein, daß eine Aussage $\varphi$ unter *gewissen* Umständen möglich und unter *anderen* Umständen *un*möglich ist. Die Bedeutung von *möglich* und *notwendig* ist daher, so Kripke, *relativ* zu den Umständen.

Um festzulegen, was unter gewissen Umständen (logisch) möglich ist, ordnet man diesen Umständen $r$ daher eine Menge von alternativen Umständen zu, die von $r$ aus „erreichbaren" Umstände:

**Definition 1.33** Ein *Rahmen* $\mathcal{R} = (R, \prec)$ besteht aus einer Menge $R$ von „Umständen“ (oder *möglichen Welten*) und einer zweistelligen *Erreichbarkeits*-Relation $\prec \subseteq R \times R$.

Eine *Belegung* über $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung $g : R \times Var \to \{0, 1\}$. Der *Wert* $[\![\varphi]\!]^g_r$ *von* $\varphi$ *unter den Umständen* $r \in R$ ist defininiert durch:

$$
\begin{array}{rcl}
[\![A]\!]^g_r & := & g(r, A) \\
[\![\neg\varphi]\!]^g_r & := & -[\![\varphi]\!]^g_r \\
 & \vdots & \\
[\![\Diamond\varphi]\!]^g_r & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \text{ für mindestens ein } s \in R \text{ mit } r \prec s, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
[\![\Box\varphi]\!]^g_r & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \text{ für alle } s \in R \text{ mit } r \prec s, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{array}
$$

Eine Formel $\varphi$ der modalen Aussagenlogik ist *gültig* (über $\mathcal{R}$), wenn $[\![\varphi]\!]^g_r = 1$ ist für jede Belegung $g$ über $\mathcal{R}$ und jedes $r \in R$.

Ob eine Aussage wie „Was notwendig ist, ist auch möglich“, d.h.

$$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$$

gültig ist, hängt von $\mathcal{R}$ ab.

**Bemerkung 1.34** In der Aussagenlogik werden die „(logischen) Umstände“ durch Belegungen $r : Var \to \{0, 1\}$ dargestellt – was nicht durch die Wahrheitswerte der Aussagenvariablen bestimmt ist, ist logisch irrelevant. Man kann dann für $R$ eine Menge von Belegungen im früheren Sinne nehmen und für die in der Definition benutzten $g$ einfach $g(r, A) := r(A)$ benutzen.

Wie bei den Temporaloperatoren haben auch die Modaloperatoren den Vorteil, daß ihr *Wirkungsbereich* eindeutig bestimmt ist: sie beziehen sich auf ihre unmittelbare Teilformel. Zum Vergleich betrachte man die umgangssprachlichen Formulierungen:

(a) Es ist möglich, daß ich diese Frage nicht beantworten kann.

(b) Es ist nicht möglich, daß ich diese Frage beantworten kann.

(c) Ich kann diese Frage möglicherweise nicht beantworten.

(d) Ich kann diese Frage unmöglich beantworten.