1 Aussagenlogik

1.1 Klassische Aussagenlogik

1.1.1 Syntax

Sei $Var = \{ A_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ eine unendliche Menge von „Aussagevariablen".

Definition 1.1 Die Menge der *aussagenlogischen Formeln* ist die kleinste Menge F mit

(a) $\{\top, \bot\} \subseteq F$, d.h. die beiden Aussagekonstanten $\bot$ und $\top$ sind in F,

(b) $Var \subseteq F$, d.h. jede Aussagenvariable ist in F,

(c) F ist abgeschlossen unter $\neg, \wedge, \vee$ und $\to$, d.h. sind φ und ψ in F, so auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$ und $(\varphi \to \psi)$.

Das drückt man auch kurz durch eine „Grammatik"

$$\begin{array}{rcl} \varphi, \psi & := & V \mid \top \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \to \psi) \\ V & := & A \mid V' \end{array}$$

aus; die Variablen A, A', A'', A''' usw. werden lesbarer mit A_0, A_1, A_2, A_3 usw. bezeichnet. Wir benutzen $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ als Abkürzung für $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \psi))$.

1.1.2 Semantik

Definition 1.2 Mit $\mathbb{B} := (\{0,1\}, \min, \max, -, 0, 1)$ ist die Boole'sche Algebra der Wahrheitswerte gemeint (0 für *falsch*, 1 für *wahr*), wobei die Operationen durch

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

x	y	$\min(x,y)$	$\max(x,y)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

(1)

definiert sind.

Oft schreibt man $\mathbb{B} = (\{0,1\}, +^{\mathbb{B}}, \cdot^{\mathbb{B}}, -^{\mathbb{B}}, 0^{\mathbb{B}}, 1^{\mathbb{B}})$, und $\mathcal{B} = (B, +^B, \cdot^B, -^B, 0^B, 1^B)$ für eine beliebige Boole'sche Algebra (vgl. Abschnittt **??**.)

Definition 1.3 Eine *Belegung* der Aussagevariablen in einer Boole'schen Algebra $\mathcal{B}$ ist eine Funktion $g : Var \to B$. Der *Wert* $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}}_g$ der Formel φ in $\mathcal{B}$ *bei der*

Belegung g, kurz $[\![\varphi]\!]_g$, ist induktiv durch

$$
\begin{aligned}
[\![\top]\!]_g &:= 1^B, && (2)\\
[\![\bot]\!]_g &:= 0^B. && (3)\\
[\![A_i]\!]_g &:= g(A_i), && (4)\\
[\![\neg\varphi]\!]_g &:= -^B([\![\varphi]\!]_g), && (5)\\
[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_g &:= [\![\varphi]\!]_g \cdot^B [\![\psi]\!]_g, && (6)\\
[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_g &:= [\![\varphi]\!]_g +^B [\![\psi]\!]_g, && (7)\\
[\![(\varphi \to \psi)]\!]_g &:= -^B([\![\varphi]\!]_g) +^B [\![\psi]\!]_g && (8)
\end{aligned}
$$

definiert. Im Folgenden betrachten wir nur Belegungen $g : Var \to \mathbb{B}$.

Lemma 1.4 (Koinzidenzlemma) Sei $Var(\varphi)$ die Menge der in φ vorkommenden Aussagevariablen. Sind g_1, g_2 zwei Belegungen mit $g_1(A_i) = g_2(A_i)$ für alle $A_i \in Var(\varphi)$, so gilt $[\![\varphi]\!]_{g_1} = [\![\varphi]\!]_{g_2}$, d.h. stimmen die Belegungen auf den Variablen von φ überein, so stimmen auch die Werte von φ unter den Belegungen überein.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau. (Übungsaufgabe) □

Definition 1.5 Eine Formel γ ist *allgemeingültig* oder eine *Tautologie*, wenn sie bei jeder Belegung den Wert 1 hat. Eine Formel γ (oder eine Formelmenge Γ) ist *erfüllbar*, wenn sie (bzw. alle $\gamma \in \Gamma$) bei mindestens einer Belegung den Wert 1 hat. Zwei Formeln φ und ψ sind *äquivalent*, geschrieben: $\varphi \equiv \psi$, wenn ihre Werte bei allen Belegungen übereinstimmen.

Satz 1.6 Es gibt ein Verfahren, mit dem man für jede Formel φ feststellen kann, ob φ allgemeingültig ist.

Beweis: Man stellt fest, welche Aussagenvariablen in φ vorkommen; dies seien etwa $A_1, \ldots, A_n$. Nach dem Koinzidenzlemma hat φ unter allen Belegungen, die auf $A_1, \ldots, A_n$ übereinstimmen, denselben Wert. Daher genügt es, die Tabelle

A_1	$\cdots$	A_{n-1}	A_n	φ
0	$\cdots$	0	0	$f_\varphi(0, \ldots, 0)$
0	$\cdots$	0	1	$f_\varphi(0, \ldots, 1)$
	$\vdots$			$\vdots$
1	$\cdots$	1	1	$f_\varphi(1, \ldots, 1)$

aufzustellen, wobei $f_\varphi(b_1, \ldots, b_n) := [\![\varphi]\!]g$ für die Belegungen g mit $g(A_1) = b_1, \ldots, g(A_n) = b_n$. Falls in der rechten Spalte stets der Wert 1 auftritt, ist φ allgemeingültig, sonst nicht. □

Für große Formeln ist das Verfahren zu aufwendig: die Tabelle hat 2^n Zeilen. Es sind aber keine Verfahren bekannt, die für beliebige Formeln mit weniger Aufwand die Antwort liefern.

Den Wert $[\![\varphi]\!]_g^{\mathbb{B}}$ einer Formel φ unter der Belegung g berechnet man praktischerweise so, daß man die Formel als Baum darstellt, dann die mit A_i beschrifteten Blätter mit dem Wert $g(A_i)$ markiert, und anschließend die inneren Knoten k des Baums mit dem Wert markiert, der sich aus dem Wert der direkten Teilbäume durch Anwenden der Wahrheitsfunktion $-^{\mathbb{B}}, +^{\mathbb{B}}, \cdot^{\mathbb{B}}$ ergibt, der dem Junktor $\neg, \wedge, \vee$ am Knoten k entspricht.

Um die obige Tabelle aufzustellen, schreibt man praktischerweise die Werte der Teilformeln in einer Spalte unter den Hauptjunktor der Teilformel.

Definition 1.7 Sei $\varphi(X/\delta)$ die Formel, die aus φ entsteht, wenn man jedes Vorkommen der Aussagenvariable X durch die Formel δ ersetzt.

Lemma 1.8 (Ersetzungslemma) Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln und $g : Var \to \mathcal{B}$ eine Belegung. Für $A \in Var$ und $b \in B$ sei $g[A := b]$ die Belegung, die sich von g nur bei A unterscheidet, wo sie den Wert b liefert:

$$g[A := b](A_i) := \begin{cases} b, & \text{falls } A_i \equiv A, \\ g(A_i), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$[\![\varphi(A/\psi)]\!]_g = [\![\varphi]\!]_{g[A:=[\![\psi]\!]_g]},$$

d.h. ob man in φ die Variable A durch ψ ersetzt und mit g auswertet, oder ob man φ mit der Belegung $g[A := [\![\psi]\!]_g]$ auswertet, liefert dasselbe.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau von φ. (Übung!) □

Korollar 1.9 Wenn $[\![\psi_1]\!]_g = [\![\psi_2]\!]_g$ ist, so ist $[\![\varphi(A/\psi_1)]\!]_g = [\![\varphi(A/\psi_2)]\!]_g$.

Definition 1.10 Sei T eine Menge von Formeln. Eine Belegung g *erfüllt* T, wenn $[\![\gamma]\!]_g = 1$ für jedes $\gamma \in T$. Die Formel φ *folgt aus* T, geschrieben $T \models \varphi$, wenn jede Belegung, die T erfüllt, auch φ erfüllt.

Beispiel 1.11 Sei $T := \{ A_i \to A_{i+1} \mid i \in \mathbb{N} \}$ und $\varphi := A_4$. Folgt φ aus T? Um das festzustellen, brauchen wir einen Überblick über alle Belegungen, die T erfüllen.[1] Nun erfüllt g die Formel $A_i \to A_{i+1}$ in zwei Fällen: wenn $g(A_i) = 0$ ist, und wenn $g(A_{i+1}) = 1$ ist. Im zweiten Fall erfüllt g die „nächste" Formel $A_{i+1} \to A_{i+2}$ nur, wenn auch $g(A_{i+2}) = 1$ ist. Daher sehen wir: eine Belegung

[1] Da in T unendlich viele Variablen vorkommen, können wir keine endliche Tabelle aller Belegungen aufstellen.

$g : Var \to \mathbb{B}$ erfüllt T genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gibt mit $g = g_k$, wobei

$$g_k(A_i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i < k \text{ ist,} \\ 1, & \text{falls } i \geq k \text{ ist.} \end{cases}$$

Jede Belegung g_k mit $4 < k$ erfüllt also T und liefert $[\![A_4]\!]_{g_k} = g_k(A_4) = 0$. Also folgt φ nicht aus T. (Aber z.B. $A_4 \to A_6$ folgt aus T.)

Proposition 1.12 Seien S und T Formelmengen und ψ eine Formel. Wenn $S \models \psi$ und $S \subseteq T$ gilt, so gilt auch $T \models \psi$.

Das ist klar, da jede Belgegung, die T erfüllt, auch S erfüllt, und daher auch ψ. Formeln, die aus der leeren Menge $\emptyset$ folgen, sind bei jeder Belegung wahr, also „von selbst“ wahr (oder: Tautologien):

Definition 1.13 Eine Formel φ heißt *allgemeingültig* (oder *logisch wahr*), wenn sie bei jeder Belegung g wahr ist, d.h. den Wert $[\![\varphi]\!]_g = 1$ hat.

Statt $\emptyset \models \psi$ schreibt man kurz $\models \psi$, und statt $\{\varphi\} \models \psi$ schreibt man $\varphi \models \psi$.

Proposition 1.14 Für alle Formeln φ und ψ gilt

$$\varphi \models \psi \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \models (\varphi \to \psi),$$

d.h. aus φ folgt ψ genau dann, wenn die Formel $(\varphi \to \psi)$ allgemeingültig ist.

Beweis: $\Rightarrow$: Angenommen, $\varphi \models \psi$. Wir müssen zeigen, daß $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_g = 1$ für jede Belegung $g : Var \to \mathbb{B}$. Sei g eine Belegung. Falls $[\![\varphi]\!]_g = 1$ ist, so ist wegen $\varphi \models \psi$ auch $[\![\psi]\!]_g = 1$ und daher

$$[\![\varphi \to \psi]\!]_g = \overline{[\![\varphi]\!]_g}^{\mathbb{B}} +^{\mathbb{B}} [\![\psi]\!]_g = 0 +^{\mathbb{B}} 1 = 1.$$

Falls $[\![\varphi]\!]_g \neq 1$ ist, so ist $[\![\varphi]\!]_g = 0$, also

$$[\![\varphi \to \psi]\!]_g = \overline{[\![\varphi]\!]_g}^{\mathbb{B}} +^{\mathbb{B}} [\![\psi]\!]_g = 1 +^{\mathbb{B}} [\![\psi]\!]_g = 1.$$

Also ist in jedem Fall $[\![\varphi \to \psi]\!]_g = 1$.

$\Leftarrow$: Angenommen, $\models (\varphi \to \psi)$. Wir müssen zeigen, daß jede Belegung $g : Var \to \mathbb{B}$, die φ erfüllt, auch ψ erfüllt. Sei also $[\![\varphi]\!]_g = 1$. Aus der Annahme folgt $[\![\varphi \to \psi]\!]_g = 1$, und daher

$$1 = [\![\varphi \to \psi]\!]_g = \overline{[\![\varphi]\!]_g}^{\mathbb{B}} +^{\mathbb{B}} [\![\psi]\!]_g = \overline{1}^{\mathbb{B}} +^{\mathbb{B}} [\![\psi]\!]_g = 0 +^{\mathbb{B}} [\![\psi]\!]_g = [\![\psi]\!]_g.$$

Also ist $[\![\psi]\!]_g = 1$, was zu zeigen war. □