3 Anhang

3.1 Induktion

3.1.1 Induktion auf den natürlichen Zahlen

Um eine Eigenschaft P von *allen* natürlichen Zahlen nachzuweisen, zeigt man:

(a) P trifft auf die kleinste Zahl, 0, zu.

(b) P überträgt sich von einer beliebigen Zahl n auf die nächste, $n+1$.

Da man alle Zahlen von 0 durch mehrfaches Weitergehen zur nächsten Zahl erreichen kann, überträgt sich P von 0 auf *alle* natürlichen Zahlen. Also ist

(c) P trifft auf jeden natürliche Zahl zu.

durch (a) und (b) schon gezeigt. Dieses Argument formuliert man als

Induktionsaxiom für die natürlichen Zahlen: Für jede Eigenschaft P gelte

$$P(0) \wedge \forall n(P(n) \to P(n+1)) \to \forall n\, P(n). \tag{20}$$

Einen *Induktionsbeweis* für die Aussage $\forall n\, P(n)$ führt man daher so:

Induktionsanfang:	Behauptung:	$P(0)$.
	Beweis:	...
Induktionsschritt:	Annahme:	$P(n)$ (für ein beliebiges n)
	Behauptung:	$P(n+1)$
	Beweis:	...

Da man n beliebig gewählt hat, hat man damit insgesamt die Aussage

$$P(0) \wedge \forall n(P(n) \to P(n+1)) \tag{21}$$

gezeigt. Nach dem Induktionsaxiom (20) muß daher auch $\forall n\, P(n)$ gelten.

Beispiel 3.1 Sei $P(n)$ die Aussage $\sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)/2$.

Induktionsanfang: Behauptung: $P(0)$. Beweis: $P(0)$ ist die Aussage $\sum_{i=0}^{0} i = 0(0+1)/2$ und da beide Seiten der Gleichung 0 ergeben, ist sie wahr.

Induktionsschritt: Annahme: $P(n)$, d.h. $\sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)/2$.

Behauptung: $P(n+1)$, d.h. $\sum_{i=0}^{n+1} i = (n+1)((n+1)+1)/2$.

Beweis: (mit einfachen Eigenschaften der Addition und Multiplikation)

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = (\sum_{i=0}^{n} i) + (n+1)$$

$$\begin{aligned}
&= (n(n+1)/2) + (n+1) \quad \text{nach Annahme} \\
&= n(n+1)/2 + 2(n+1)/2 \\
&= (n(n+1) + 2(n+1))/2 \\
&= ((n+2)(n+1))/2 \\
&= ((n+1)(n+2))/2 \\
&= ((n+1)((n+1)+1))/2.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\sum_{i=0}^{n+1} i = (n+1)((n+1)+1)/2$ gilt, das heißt, $P(n+1)$. Nach dem Induktionsaxiom (kurz: „nach Induktion") ist $\forall n\, P(n)$ gezeigt.

Eine andere Formulierung, die manchmal bequemer zu benutzen ist, lautet:

$$P(0) \wedge \forall n((\forall k \leq n\, P(k)) \rightarrow P(n+1)) \rightarrow \forall n\, P(n), \tag{22}$$

oder noch etwas anders:

$$\forall n((\forall k < n\, P(k)) \rightarrow P(n)) \rightarrow \forall n\, P(n). \tag{23}$$

Setzt man in (20) für $P(n)$ die Aussage $\forall k \leq n\, P(k)$ ein, so erhält man

$$\forall k \leq 0\, P(k) \wedge \forall n(\forall k \leq n\, P(k) \rightarrow \forall k \leq (n+1)\, P(k)) \quad \rightarrow \quad \forall n \forall k \leq n\, P(k),$$

und wenn man das ein bißchen vereinfacht, hat man (22). Auch (23) kann man aus (20) bekommen, und umgekehrt.

Beachte, daß daß Induktionsaxiom nur deshalb gilt, weil man alle natürlichen Zahlen aus 0 durch „Weiterzählen" erhält. Erweitert man $\mathbb{N}$ um ein Element ∞ zu $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so gilt für viele Eigenschaften P zwar

$$P(0) \wedge \forall n\, (P(n) \rightarrow P(n+1)),$$

aber trotzdem nicht $\forall n\, P(n)$; z.B. für die Eigenschaft $P(n) :\iff n \neq \infty$.

Das Induktionsaxiom drückt also aus, daß man jede natürliche Zahle aus 0 durch mehrfaches Erhöhen um 1 erhält. Daher liegt es nahe, Induktion auch in anderen Objektbereichen zu verwenden, die ähnlich wie die natürlichen Zahlen aufgebaut sind.

3.1.2 Induktion auf einer Peano-Algebra

Sei A eine Menge und $F \subseteq \{\, f : A^n \rightarrow A \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ eine Menge von Funktionen $f^{(n)} : A^n \rightarrow A$ möglicherweise verschiedener Stelligkeiten $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$f(a_1, \ldots, a_n) \neq g(b_1, \ldots, b_m)$$
$$\text{für alle } n, m \in \mathbb{N}, f^{(n)}, g^{(m)} \in F \text{ und } (a_1, \ldots, a_n) \neq (b_1, \ldots, b_m).$$

Dann kann man sich die $f \in F$ als *Konstruktionsweisen* vorstellen, die aus einem Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ das Element $f(a_1, \ldots, a_n) \in A$ in eindeutiger Weise

„konstruieren“: es kann auf keine andere Weise, d.h. durch kein $g(b_1, \ldots, b_m)$ mit $g \in F$ und $(b_1, \ldots, b_m) \neq (a_1, \ldots, a_n)$, erhalten werden.

Ist $B \subseteq A$ und $\overline{B}^F$ der Abschluß von B unter den Funktionen aus F,

$$\overline{B}^F := \bigcap \{ X \subseteq A \mid B \subseteq X, \forall f^{(n)} \in F\ \forall b_1, \ldots, b_n \in X\ f(b_1, \ldots, b_n) \in X \}$$

so ist jedes Element von $\overline{B}^F$ in endliche vielen Schritten aus Elementen von B mit den Funktionen aus F konstruiert, in drei Schritten z.B.

$$f(b_1, g(b_1, \ldots, b_m), b_3, \ldots, b_{n-1}, g(b_m, \ldots, b_1)).$$

Das *Induktionsaxiom* für eine Eigenschaft $P \subseteq A$ besagt:

> Wenn
>
> (a) [Induktionsanfang] $P(b)$ gilt für jedes $b \in B$, und
>
> (b) [Induktionsschritt] für jedes $f^{(n)} \in F$ und alle $b_1, \ldots, b_n \in A$:
>
> $$\text{wenn } P(b_1), \ldots, P(b_n) \text{ gelten, so gilt } P(f(b_1, \ldots, b_n)),$$
>
> so gilt $P(b)$ für alle Elemente von $\overline{B}^F$.

Intuitiv besagt es:

> Wenn P für die Elemente aus B gilt und bei jeder Konstruktion $f \in F$ von den Argumenten auf den Funktionswert übertragen wird, so gilt P für *alle* aus B mit den $f \in F$ konstruierbaren Elemente.

Beispiel 3.2 (Induktion über den Aufbau der Formeln). Durch

$$\varphi, \psi := \bot \mid A \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \tag{24}$$

soll die Menge der aus den Aussagevariablen A und $\bot$ mit $\neg$ und $\wedge$ aufgebauten Formeln definiert werden. Um zu zeigen, daß eine Eigenschaft P für alle diese Formeln gilt, zeigt man:

(a) [Induktionsanfang] $P(\bot)$ und alle $P(A_i)$, $i \in \mathbb{N}$, gelten.

(b) [Induktionsschritt] Wenn $P(\varphi)$ gilt, so gilt auch $P(\neg\varphi)$.

(c) [Induktionsschritt] Wenn $P(\varphi)$ und $P(\psi)$ gelten, so gilt auch $P(\varphi \wedge \psi)$.

Nach dem Induktionsaxiom gilt dann $P(\varphi)$ für jede der wie in (24) aufgebauten Formeln φ.