4 Beweissysteme

4.1 Gentzen-Kalkül

Beim Begründen oder Beweisen einer Aussage muß man zwischen den angenommenen und den behaupteten Aussagen unterscheiden, denn was Annahmen und was Behauptungen sind, ändert sich im Laufe eines Beweises.

Der Kalkül von G. Gentzen (ca. 1935) operiert mit Listen Γ von Annahmen und Δ von Behauptungen, die den „Zustand“ eines Beweises darstellen.

Definition 4.1 Eine *Sequenz* $\Gamma \rhd \Delta$ besteht aus zwei endlichen, durch das Zeichen $\rhd$ getrennten Listen von Formeln, Γ und Δ. Eine Sequenz $\Gamma \rhd \Delta$ heißt *gültig*, wenn die Formel $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ allgemeingültig ist. (Γ heißt das *Antezedenz* und Δ das *Sukzedenz* der Sequenz.)

Ist Γ leer, so sei $\bigwedge \Gamma := \top$ (denn *alle* alle Aussagen aus Γ sind wahr) und $\bigvee \Gamma := \bot$ (denn es ist falsch, daß *mindestens eine* Aussage aus Γ wahr ist).

Definition 4.2 Der Gentzen-Kalkül hat folgende Axiome

$$\begin{gathered} \Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \rhd \Delta_1, \varphi, \Delta_2 \\ \Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \rhd \Delta \\ \Gamma \rhd \Delta_1, \top, \Delta_2 \end{gathered}$$

und folgende Regeln:

(i) „strukturelle“ Regeln, die dafür sorgen, daß es auf die Anordnung und auf Wiederholungen der Formeln in den Listen nicht ankommt:

$$\frac{\Gamma_1, \varphi_1, \varphi_2, \Gamma_2 \rhd \Delta}{\Gamma_1, \varphi_2, \varphi_1, \Gamma_2 \rhd \Delta}\,(P\ L) \qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta_1, \varphi_1, \varphi_2, \Delta_2}{\Gamma \rhd \Delta_1, \varphi_2, \varphi_1, \Delta_2}\,(P\ R)$$

$$\frac{\Gamma_1, \varphi, \varphi, \Gamma_2 \rhd \Delta}{\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \rhd \Delta}\,(D\ L) \qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta_1, \varphi, \varphi, \Delta_2}{\Gamma \rhd \Delta_1, \varphi, \Delta_2}\,(D\ R)$$

$$\frac{\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \rhd \Delta}{\Gamma_1, \varphi, \varphi, , \Gamma_2 \rhd \Delta}\,(C\ L) \qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta_1, \varphi, \Delta_2}{\Gamma \rhd \Delta_1, \varphi, \varphi, \Delta_2}\,(C\ R)$$

(Die Regelnamen stehen für *P*ermutation, *D*eletion, *C*opy von Formeln *L*inks beziehungsweise *R*echts vom Trennzeichen $\rhd$.)

(ii) „logische“ Regeln, für jeden Junktor:

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \rhd \Delta}{\Gamma_1, \top, \Gamma_2 \rhd \Delta}\,(\top L) \qquad\qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma \rhd \Delta_1, \bot, \Delta_2}\,(\bot R)$$

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \rhd \Delta_1, \alpha, \Delta_2}{\Gamma_1, \neg\alpha, \Gamma_2 \rhd \Delta_1, \Delta_2}\,(\neg L) \qquad\qquad \frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \rhd \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rhd \Delta_1, \neg\alpha, \Delta_2}\,(\neg R)$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \rhd \Delta}{\Gamma_1, (\alpha \wedge \beta), \Gamma_2 \rhd \Delta}\,(\wedge L) \qquad\qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta_1, \alpha, \Delta_2 \qquad \Gamma \rhd \Delta_1, \beta, \Delta_2}{\Gamma \rhd \Delta_1, (\alpha \wedge \beta), \Delta_2}\,(\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \rhd \Delta \qquad \Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \rhd \Delta}{\Gamma_1, (\alpha \vee \beta), \Gamma_2 \rhd \Delta}\,(\vee L) \qquad\qquad \frac{\Gamma \rhd \Delta_1, \alpha, \beta, \Delta_2}{\Gamma \rhd \Delta_1, (\alpha \vee \beta), \Delta_2}\,(\vee R)$$

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \rhd \alpha, \Delta \qquad \Gamma_1, \beta, \Gamma_2 \rhd \Delta}{\Gamma_1, (\alpha \to \beta), \Gamma_2 \rhd \Delta}\,(\to L) \qquad\qquad \frac{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \rhd \Delta_1, \beta, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rhd \Delta_1, (\alpha \to \beta), \Delta_2}\,(\to R)$$

$$\frac{\Gamma_1, \alpha, \beta, \Gamma_2 \rhd \Delta \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \rhd \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma_1, (\alpha \leftrightarrow \beta), \Gamma_2 \rhd \Delta}\,(\leftrightarrow L) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \rhd \Delta_1, \beta, \Delta_2 \quad \Gamma, \beta \rhd \Delta_1, \alpha, \Delta_2}{\Gamma \rhd \Delta_1, (\alpha \leftrightarrow \beta), \Delta_2}\,(\leftrightarrow R)$$

Beachte, daß in jeder Obersequenz einer Regel ein Junktor oder eine Aussagenkonstante weniger vorkommt als in der Untersequenz.

Definition 4.3 Ein *Beweis* der Sequenz $\Gamma \rhd \Delta$ im Kalkül G ist ein endlicher Baum, dessen Knoten so mit Sequenzen beschriftet sind, daß gilt:

(a) an der Wurzel steht $\Gamma \rhd \Delta$,

(b) jede Sequenz an einem Blatt des Baums ist ein Axiom, und

(c) jede Sequenz an einem inneren Knoten ist die Untersequenz einer Regel, und deren Obersequenzen stehen an den direkten Nachfolgerknoten.

Einen Beweis für $\Gamma \rhd \Delta$ konstruiert man von der Wurzel aus. Hat man schon eine Sequenz an einem Knoten, so wählt man in ihr eine Formel aus und wendet die auf ihren Hauptjunktor passende Regel „von unten nach oben“ an: falls die Formel im Antezedenz lag, die entsprechende Linksregel, sonst die Rechtsregel.

Beispiel 4.4

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A, B, B, C \rhd}{(A \wedge B), B, C \rhd}\,(\wedge L)}{B, C \rhd \neg(A \wedge B)}\,(\neg R) \qquad \cfrac{\cfrac{\vdots}{C \rhd C, \neg(A \wedge B)}\,(\neg R)}{\neg C, C \rhd \neg(A \wedge B)}\,(\neg L)}{(B \vee \neg C), C \rhd \neg(A \wedge B)}\,(\vee L) \qquad \cfrac{\cfrac{A, B, C \rhd A}{(A \wedge B), C \rhd A}\,(\wedge L)}{C \rhd A, \neg(A \wedge B)}\,(\neg R)}{(A \to (B \vee \neg C)), C \rhd \neg(A \wedge B)}\,(\to L)$$

Da am linken Blatt kein Axiom vorliegt, man aber auch keine Regel mehr anwenden kann, kann dieser Baum nicht zu einem Beweis der Sequenz an der Wurzel fortgesetzt werden!

Satz 4.5 Der Kalkül ist *korrekt* und *vollständig*: jede beweisbare Sequenz ist gültig, und jede gültige Sequenz ist beweisbar.

Beweis: (Skizze) Man überlegt sich zuerst:

(a) Jedes Axiom ist eine gültige Sequenz.

(b) Die Untersequenz einer Regel ist genau dann gültig, wenn die Obersequenz(en) gültig sind.

Daraus folgen die Behauptungen: 1. Der Kalkül korrekt: gibt es einen Beweis für $\Gamma \triangleright \Delta$, so sind alle Sequenzen an den Knoten des Beweisbaumes gültig, also auch die Sequenz an der Wurzel.

2. Der Kalkül ist vollständig: Sei $\Gamma \triangleright \Delta$ eine gültige Sequenz. Konstruiere einen Baum, an dessen Wurzel $\Gamma \triangleright \Delta$ steht. Solange noch ein Junktor in der Sequenz an einem Blatt k des Baums vorkommt, ist die Sequenz die Unterseqenz einer „logischen“ Regel. Erweitere den Baum um einen (bzw. zwei) Nachfolgerknoten von k, und schreibe die Obersequenz(en) daran. Entsprechend behandelt man $\top$ im Antezedenz und $\bot$ im Sukzedenz der Seqenz an einem Knoten. Da in jedem Schritt die Obersequenz(en) weniger Junktoren oder Aussagekonstanten enthalten als die Untersequenz, gelangt man schließlich zu Knoten, deren Sequenzen keine Junktoren und die Konstante $\top$ höchstens im Sukzedenz, die Konstante $\bot$ höchstens im Antezedenz enthalten. Nach der Voraussetzung über $\Gamma \triangleright \Delta$ und der Beobachtung (b) sind diese Sequenzen gültig, enthalten aber keine Junktoren; deshalb sind es Axiome. Daher ist der Baum ein Beweisbaum für $\Gamma \triangleright \Delta$. $\square$