1.2.3 Funktionale Vollständigkeit

In der Boole'schen Algebra $\mathbb{B}$ interpretiert man die Aussagejunktoren $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ als n-stellige „Wahrheitsfunktionen“ $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ für passendes $n = 1, 2$.

Offenbar gibt es aber mehr Funktionen $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ als wir Junktoren erlaubt haben, nämlich 2^{2^n} Stück. Aber wir haben statt $2^{2^2} = 16$ haben wir nur höchstens vier 2-stellige Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ erlaubt. Woher weiß man, daß das ausreicht, daß wir also keine anderen 2-stelligen Junktoren und auch keine n-stelligen Junktoren mit $n > 2$ einführen müssen?

Definition 1.15 Eine Menge J von Junktoren heißt *funktional vollständig*, wenn es für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede n-stellige Funktion $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ eine Formel $\varphi_f(A_1, \ldots, A_n)$ gibt, so daß

(a) $Var(\varphi) \subseteq \{A_1, \ldots, A_n\}$ und φ hat keine Junktoren außer denen von J,

(b) für alle $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{B}$ ist $f(b_1, \ldots, b_n) = [\![\varphi_f]\!]_{[A_1:=b_1,\ldots,A_n:=b_n]}$.

In diesem Fall kann man das Berechnen des Funktionswertes $f(b_1, \ldots, b_n)$ durch das Auswerten der Formel φ_f bei der Belegung $[A_1 := b_1, \ldots, A_n := b_n]$ ersetzen.

Proposition 1.16 Die Menge $J = \{\bot, \neg, \wedge\}$ ist funktional vollständig.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ gegeben. Wir betrachten die Funktionstabelle von f. Darin fassen wir jedes Argumenttupel als eine Belegung g der Variablen $A_1, \ldots, A_n$ auf, sodaß $f(b_1, \ldots, b_n) = f(g(A_1), \ldots, g(A_n))$ für die Belegung $g = [A_1 := b_1, \ldots, A_n := b_n]$:

b_1	$\cdots$	b_n	$f(b_1, \ldots, b_n)$
0	$\cdots$	0	
$g(A_1)$	$\cdots$	$g(A_k)$	$f(g(A_1), \ldots, g(A_n))$
1	$\cdots$	1	
A_1	$\cdots$	A_n	$\varphi_f(A_1, \ldots, A_n)$

Zu jeder Zeile g sei $\varphi_g(A_1, \ldots, A_n) := A'_1 \wedge \cdots \wedge A'_n$ mit

$$A'_i := \begin{cases} A_i, & \text{falls } g(A_i) = 1, \\ \neg A_i, & \text{falls } g(A_i) = 0. \end{cases}$$

Für jede Belegung $h : Var \rightarrow \mathbb{B}$ gilt $[\![\varphi_g]\!]_h = 1$ genau dann, wenn $h(A_1) = g(A_1), \ldots, h(A_n) = g(A_n)$. (Das gilt auch für $n = 0$, wobei $\varphi_g := \neg\bot$.)

Für φ_f nehmen wir die Disjunktion aller Zeilen g mit $f(g(A_1), \ldots, g(A_n)) = 1$:

$$\varphi_f(A_1, \ldots, A_n) := \bigvee \{\, \varphi_g \mid g : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}, f(g(A_1), \ldots, g(A_n)) = 1 \,\}.$$

(Falls es keine solche Zeile gibt, sei $\varphi_f := \bot$.) Offensichtlich gilt die Behauptung (a). Zum Beweis von (b) sei h eine Belegung mit $(b_1, \ldots, b_n) = (h(A_1), \ldots, h(A_n))$.

Nach Wahl von φ_f ist

$$\begin{aligned}
[\![\varphi_f]\!]_h = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt } g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B} \text{ mit} \\
&\qquad\quad f(g(A_1), \ldots, g(A_n)) = 1 \text{ und } [\![\varphi_g]\!]_h = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt } g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B} \text{ mit} \\
&\qquad\quad f(g(A_1), \ldots, g(A_n)) = 1 \text{ und } (g(A_1), \ldots, g(A_n)) = (b_1, \ldots, b_n) \\
&\Longleftrightarrow \quad f(b_1, \ldots, b_n) = 1.
\end{aligned}$$

Da nur die Werte 1 und 0 in Frage kommen, folgt daraus die Behauptung. □

Wir haben also mit $\bot$, $\neg$ und $\wedge$ schon genug Junktoren, um alle Wahrheitsfunktionen auszudrücken. Beispielsweise brauchen wir keinen eigenen Junktor $\vee$ zur Benennung der Funktion $+^{\mathbb{B}}$, sondern könnten statt $(A \vee B)$ die Formel

$$\varphi_+(A, B) := \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

benutzen, oder $(A \to B)$ als Abkürzung für $\neg(A \wedge \neg B)$.