1.1.4 Endlichkeitssatz

Die logische Folgerung $\models$ ist eine Beziehung zwischen Aussagemengen T und Aussagen φ. Aber hängt es bei unendlichem T tatsächlich von *allen* Aussagen aus T ab, ob φ aus T folgt? Wir wollen zeigen, daß das nicht der Fall ist.

Satz 1.17 (Endlichkeitssatz für die Folgerung) Eine Aussage φ folgt aus T genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge $E \subseteq T$ gibt, aus der φ folgt.

Beispiel 1.18 Sei $T := \{ (A_{n+1} \to A_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$. Die Aussage $(A_8 \to A_4)$ folgt aus T, aber auch schon aus $\{(A_8 \to A_7), \ldots, (A_5 \to A_4)\} \subset T$.

Da $T \models \varphi$ bzw. $E \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $T \cup \{\neg\varphi\}$ bzw. $E \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist, kann man den Satz auch so formulieren:

Satz 1.19 (Endlichkeitssatz für die (Un)erfüllbarkeit) Eine Aussagenmenge ist unerfüllbar, wenn sie eine endliche Teilmenge hat, die unerfüllbar ist.

Beweis: Wir beweisen dazu die Äquivalenz der negierten Aussagen:

> Eine Menge T von aussagenlogischen Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn alle endlichen Teilmengen $E \subseteq T$ erfüllbar sind.

$\Rightarrow$: Ist g eine Belegung, die T erfüllt, so erfüllt sie auch alle endlichen Teilmengen von T.

$\Leftarrow$: Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Aufzählung aller Aussagevariablen und

$$T_n := \{ \varphi \in T \mid Var(\varphi) \subseteq \{A_1, \ldots, A_n\} \}.$$

Es gibt nur 2^n viele Belegungen der $A_1, \ldots, A_n$, also nur 2^{2^n} viele Wahrheitstafeln

$$\begin{array}{c|cl} A_1 \ldots A_n & \varphi & \\ \hline g_1 & v_1 & \in \{0,1\} \\ \vdots & \vdots & \\ g_{2^n} & v_{2^n} & \in \{0,1\} \end{array}$$

und daher höchstens $k \leq 2^{2^n}$ nicht-äquivalente Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in T_n$, obwohl es natürlich unendlich viele verschiedene Formeln in T_n geben kann. Daher ist *jedes* $\varphi \in T_n$ zu einer Formel aus $E_n := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \subset T_n$ logisch äquivalent. Jede Belegung, die E_n erfüllt, erfüllt daher auch T_n. Nach Voraussetzung gibt es für jedes n eine Belegung h_n, die E_n und daher $T_n \supset T_{n-1} \supset T_0$ erfüllt.

Wir definieren eine Belegung g, die T erfüllt. Angenommen, die Werte $g(A_k)$ sind für $1 \leq k < j$ schon definiert; das ist für $j = 1$ der Fall. Dann setzen wir

$$g(A_j) \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls es unendlich viele } i \in \mathbb{N} \text{ mit } h_i(A_j) = 1 \text{ und} \\ & h_i(A_1) = g(A_1), \ldots, h_i(A_{j-1}) = g(A_{j-1}) \text{ gibt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beh.: Die Belegung g erfüllt T.

Bew.: Sei $\varphi \in T$, etwa $\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_m) \in T_m$. Da h_n die Menge $T_n \supset T_{n-1} \supset \ldots \supset T_0$ erfüllt, erfüllt jedes h_n mit $n \geq m$ die Formel φ. Es genügt also zu zeigen, daß es wenigstens ein $n \geq m$ gibt mit

$$g(A_1) = h_n(A_1), \ldots, g(A_m) = h_n(A_m); \tag{9}$$

dann erfüllt auch g die Formel φ. Zum Beweis von (9) zeigen wir, daß es zu $1 \leq k \leq m$ ein m_k gibt mit

$$\text{für unendlich viele } i \geq m_k \text{ ist } h_i(A_1) = g(A_1), \ldots, h_i(A_k) = g(A_k). \tag{10}$$

$k = 1$: Ist $g(A_1) = 0$, so gibt es nur endlich viele i mit $h_i(A_1) = 1$. Also ist für hinreichend großes m_1 und alle $i \geq m_1$ auch $h_i(A_1) = 0 = g(A_1)$. Ist $g(A_1) = 1$, so gibt es unendlich viele i mit $h_i(A_1) = 1 = g(A_1)$, und $i \geq m_1 := 0$.

$k+1$: Angenommen, (10) gilt für irgend ein $k < m$ und ein m_k. Ist $g(A_{k+1}) = 0$, so gibt es nur endlich viele i mit $h_i(A_{k+1}) = 1$ und $h_i(A_1) = g(A_1), \ldots, h_i(A_k) = g(A_k)$. Also ist für hinreichend großes m_{k+1} und alle $i \geq m_{k+1}$:

$$\text{wenn } h_i(A_1) = g(A_1), \ldots, h_i(A_k) = g(A_k), \text{ so } h_i(A_{k+1}) = 0 = g(A_{k+1}).$$

Nach der Induktionsannahme erfüllen unendlich viele $i \geq m_k$ die Bedingung hierin, also auch $h_i(A_1) = g(A_1), \ldots, h_i(A_{k+1}) = g(A_{k+1})$.

Ist $g(A_{k+1}) = 1$, so gibt es unendlich viele i mit $h_i(A_1) = g(A_1), \ldots, h_i(A_k) = g(A_k)$ und $h_i(A_{k+1}) = 1 = g(A_{k+1})$, und die Behauptung gilt mit $m_{k+1} = 0$.

Damit ist (10) auch für $k = m$ gezeigt, woraus (9) folgt. □

Bemerkung 1.20 Man stellt sich eine Belegung $g : \mathit{Var} \to \mathbb{B}$ oft als unendliche 0-1-Folge $g(A_1)g(A_2)g(A_3)\cdots$ vor. Die Menge aller solcher Folgen kann man dann als unendlichen binär verzweigenden Baum darstellen: jeder Knoten im Baum entspricht einer endlichen 0-1-Folge w, und $w0$ dem linken, $w1$ dem rechten Nachfolgerknoten. Wir haben einen unendlichen Pfad g in diesem Baum „konstruiert“, dessen endliche Anfangsstücke Knoten entsprechen, die Anfangsstücke von unendlich vielen h_i sind. (Die Konstruktion ist als „Lemma von König“ bekannt.)

Der Endlichkeitssatz für die Folgerung ist eine Voraussetzung dafür, daß man Aussagen, die aus T folgen, auch aus T *beweisen* kann. Denn ein Beweis von φ aus den Annahmen T ist –wie immer man das auch präzisiert– endlich und kann daher nur endlich viele Aussagen aus T benutzen.