Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik II

Universität München, CIS, SS 2005

H.Leiß

Abgabetermin: Fr.24.06.2005

Aufgabe 20 *Konstruiere mit den Verfahren aus der Vorlesung für* $\varphi_1 = Q(x, y)$, $\varphi_2 = P(x, y, z)$ *und* $\varphi_3 = R(x, y, z)$ *mit paarweise verschiedenen* x, y, z*:*

(a) die Formel $\varphi(x/z)$ *für* $\varphi(x, z) := (\exists y\varphi_1 \to \exists y(\forall x\varphi_2 \to \forall z\varphi_3))$, *(3 Punkte)*

(b) eine pränexe Normalform φ^{PNF} *für* $\varphi(x, z)$ *aus (a),* *(3 Punkte)*

Aufgabe 21 *Zeige, daß die Aussage*

$$\exists x\forall y\, R(x, y) \to \forall y\exists x\, R(x, y)$$

allgemeingültig ist, aber die umgekehrte Aussage

$$\forall y\exists x\, R(x, y) \to \exists x\forall y\, R(x, y)$$

nicht. (Beispiel $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$ *angeben, wo die Aussage falsch wird.)* *(4 Punkte)*

Aufgabe 22 *Sei* $\varphi = \forall xQ(x) \to \forall x(\exists yR(x, y) \leftrightarrow \forall zP(x, z))$. *Gib zu* φ *äquivalente Formeln* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *in pränexer Form an, deren Quantorenpräfixe die Gestalt*

(a) $\forall\exists\forall\exists\forall$, *(3 Punkte)*

(b) $\exists\forall\forall\exists$, *(3 Punkte)*

(c) $\forall\exists\forall\forall$ *(3 Punkte)*

haben. Begründe die Äquivalenz durch Angabe der benutzten Umformungen aus der Vorlesung (bzw. Lemma 5.6 des Skriptums vom SS 2003).

Hinweis*: Man ersetze zuerst* $\leftrightarrow$ *und beachte Beispiel 5.15 des Skriptums vom SS 2003.*

Aufgabe 23 *(freiwillig) Zeige, daß für jedes* φ *die Formel*

$$\exists x(\varphi \leftrightarrow \forall x\varphi)$$

allgemeingültig ist. *(3 Punkte)*

(Z.B. gilt also für jeden Zeitpunkt, zu dem die Menschheit noch nicht ausgestorben ist: „Es lebt ein Mensch, der genau dann keine Kinder mehr bekommen wird, wenn alle lebenden Menschen keine Kinder mehr bekommen werden“. An jeweils einem einzigen Menschen könnte man also feststellen, ob die Menschheit ausstirbt, nur: an wem?.)