Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik II

Universität München, CIS, SS 2005

H.Leiß

Abgabetermin: Fr, 6.5.2005

Aufgabe 7 *Zwei Formeln φ und ψ sind* logisch äquivalent *zu einander, wenn sie bei allen Belegungen den gleichen Wahrheitswert haben, wenn also $[\![\varphi]\!]_g = [\![\psi]\!]_g$ für alle $g : Var \to \mathbb{B}$.*

(a) Sei χ eine Formel. Zeige: wenn φ und ψ zu einander logisch äquivalent sind, so sind auch $\chi(A/\varphi)$ und $\chi(A/\psi)$ logisch äquivalent zu einander. *(4 Punkte)*

(b) Zeige: $\models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ gilt genau dann, wenn φ und ψ logisch äquivalent sind. *(2 Punkte)*

Hinweis: Benutze bei (a) eine Induktion über den Aufbau von χ und das Ersetzungslemma der Vorlesung. Benutze bei (b), was wir über $\models (\varphi \to \psi)$ und $\varphi \models \psi$ gezeigt haben.z

Aufgabe 8 *(Funktionale Vollständigkeit) Gib zur Funktion $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$, die durch die Funktionstabelle*

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

festgelegt ist, eine aussagenlogische Formel $\varphi(A, B, C)$ an, so daß ihre Junktoren in $J = \{\bot, \neg, \vee\}$ vorkommen und

$$f(a, b, c) = [\![\varphi]\!]_g$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{B}$ und Belegungen g mit $g(A) = a$, $g(B) = b$ und $g(C) = c$. *(3 Punkte)*

Aufgabe 9 *Zeige, daß die Junktorenmenge $J = \{\leftrightarrow, \neg, \bot\}$ nicht funktional vollständig ist; z.B. ist $\to$ nicht ausdrückbar.* *(5 Punkte)*

Hinweis: Zeige durch Induktion über die mit Junktoren aus J aufgebauten Formeln $\varphi(A, B)$, daß die Anzahl der $g : \{A, B\} \to \mathbb{B}$ mit $[\![\varphi(A, B)]\!]_g = 1$ eine gerade Zahl ist (0,2, oder 4).

Aber die Anzahl der Belegungen $g : \{A, B\} \to \mathbb{B}$ mit $[\![(A \to B)]\!]_g = 1$ ist 3, also ungerade.