1 Vorbemerkungen

Mathematische Begriffe und Argumentationsweisen sind in vielen Fällen nötig, wo man über abstrakte Objekte sprechen und sich über deren Beziehungen untereinander klar werden will. Dazu führen wir hier informal und vorläufig einige Sprech- und Argumentationsweisen ein, mit denen wir uns später noch genauer befassen werden.

1.1 Objekte und Aussagen

Wir nehmen an, wir haben einen Bereich von *Objekten*, über die wir Aussagen machen wollen. Dazu benutzen wir abkürzende Bezeichnungen:

$\varphi, \psi, \ldots$	für	Aussagen,
$s, t, \ldots$	für	Objekte.

Man stelle sich die Objekte als *Individuen* vor, d.h. als „Unteilbares“[1], „Einzelnes“, „Zählbares“, „klar Abgegrenztes“ (wie körperliche Gegenstände), im Unterschied zu „Teilbarem“, „Vielheiten“, „Nicht Zählbarem“, „Nicht Abgegrenztem“ (wie Herden, Flüssigkeiten, Materien, der Natur).

Oft faßt man mehrere Objekte im Geist zu „Mengen“ zusammen und stellt sich diese als neue Objekten vor, die die ersteren als „Elemente“ enthalten; dann unterscheidet man z.B. zwischen zwei Arten von Objekten und wählt verschiedene Bezeichnungen:

$a, b, \ldots$	für	Urelemente
$x, y, \ldots$	für	Mengen
$s, t, \ldots$	für	Objekte, d.h. Mengen oder Urelemente

Urelemente sind dann die Objekte, die *keine* Mengen sind und daher auch keine Elemente enthalten, z.B. körperliche Gegenstände oder Zahlen.

Bei den *Aussagen* über die Objekte unterscheiden wir einfache oder Grundaussagen von zusammengesetzten Aussagen.

In *Grundaussagen* wird ein Prädikat von einer Reihe von Objekten ausgesagt, was wie folgt abgekürzt wird:

$P(x, \ldots, y)$ für das Prädikat P wird von den Objekten $x, \ldots, y$ ausgesagt.

Welche Bezeichnungen für Prädikate mit welcher Bedeutung man verwendet, wird im Einzelfall angegeben, meist in natürlicher Sprache, etwa:

$P(a)$	für	a ist eine Primzahl
$a < b$	für	a ist kleiner als b

wobei P und $<$ die Prädikate bezeichnen. Wenn man über Urelemente und Mengen spricht, erlaubt man als Grundaussagen mindestens

[1] d.h. etwas, was höchstens in Teile anderer Art teilbar ist

$a = b$	für	a ist dasselbe Urelement wie b
$x = y$	für	x ist dieselbe Menge wie y
$a \in x$	für	das Urelement a ist ein Element der Menge x
$y \in x$	für	die Menge y ist ein Element der Menge x

Hierin sind $=$ und $\in$ die Prädikate und a, b, x, y die *Objekten.* Die Objekte im gegenständlichen Sinn fallen hier also mit den Objekten im sprachlichen Sinn zusammen.[2] Streng genommen sollten wir zwischen *Objektvariablen* x, den Namen für Objekte, und den damit gemeinten Objekten unterscheiden.

Aus den Grundaussagen werden *zusammengesetzte Aussagen* gebildet, und zwar:

$\neg\varphi$:	nicht φ
$\varphi \wedge \psi$:	φ und ψ
$\varphi \vee \psi$:	φ oder ψ
$\varphi \rightarrow \psi$:	wenn φ, so auch ψ
$\varphi \leftrightarrow \psi$:	φ genau dann, wenn ψ
$\forall x\,\varphi$:	für jedes Objekt x gilt φ
$\exists x\,\varphi$:	es gibt (mindestens) ein Objekt x, sodaß φ

Wenn in φ über die Objekte $x, y, \ldots$ gesprochen wird, schreibt man deutlichkeitshalber oft $\varphi(x, y, \ldots)$. Die abgekürzten Aussagen nennen wir *Formeln*; bei größeren Formeln wird die Reihenfolge der Zusammensetzung durch Klammern um die Teile verdeutlicht.

Spricht man über Mengen und Elemente, so werden weitere Abkürzungen benutzt, z.B.:

Kurzform :	Normale Schreibweise	Bedeutung
$x \notin y$:	$\neg\, x \in y$	x ist kein Element von y
$\forall x \in y\ \varphi$:	$\forall x(x \in y \rightarrow \varphi)$	für jedes Element x von y gilt φ
$\exists x \in y\ \varphi$:	$\exists x(x \in y \wedge \varphi)$	es gibt ein Element x von y, so daß φ

Beispiel 1.1 Steht M für das Prädikat „ist ein Mensch" und L für das Prädikat „ist ein Lebewesen", so steht

$\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$	für	Jeder Mensch ist ein Lebewesen.
$\exists x(L(x) \wedge \neg M(x))$	für	Einige Lebewesen sind keine Menschen.

Wenn man keinen Unterschied zwischen einem Prädikat und seinem Umfang, der Menge der Objekte, auf die es zutrifft, machen will, so steht auch

$\forall x \in M\ x \in L$	für	Jeder Mensch ist ein Lebewesen.
$\exists x \in L\ x \notin M$	für	Einige Lebewesen sind keine Menschen.

Eine genauere Definition der Formeln folgt später. Sie wird insbesondere zwischen Objekten und Prädikaten und den zu ihrer Bezeichnung verwendeten sprachlichen Mitteln wie Namen und Verben unterscheiden.

[2] Das ist aber nicht immer so: dem Objekt „niemand" im sprachlichen Sinn entspricht kein Objekt im gegenständlichen Sinn.

1.2 Annahmen und Begründungen

Wir werden im Folgenden oft gewisse Aussagen als wahr *annehmen* und dann *nachweisen*, d.h. uns dann davon überzeugen, daß auf Grund dieser Annahmen weitere Aussagen wahr sind.

Wie man eine behauptete Aussage φ aus Annahmen Γ nachweisen kann, hängt von der Form der Aussage φ und der Form der Annahmen Γ ab. Vorläufig machen wir das auf folgende Weise:

I. Einerseits können wir die Behauptung φ analysieren. Je nach der Form von φ müssen wir unterschiedlich vorgehen:

   (a) Wir zeigen $\varphi \wedge \psi$, indem wir φ zeigen und ψ zeigen.

   (b) Wir zeigen $\varphi \vee \psi$, indem wir $\neg\varphi$ annehmen und ψ zeigen, oder indem wir $\neg\psi$ annehmen und φ zeigen.

   (c) Wir zeigen $\varphi \rightarrow \psi$, indem wir φ annehmen und ψ zeigen.

   (d) Wir zeigen $\varphi \leftrightarrow \psi$, indem wir $\varphi \rightarrow \psi$ und $\psi \rightarrow \varphi$ zeigen.

   (e) Wir zeigen $\exists x\, \varphi$ (meistens), indem wir ein geeignetes Objekt x angeben und dafür $\varphi(x)$ zeigen.

   (f) Wir zeigen $\forall x\, \varphi$, indem wir für ein beliebiges Objekt x, über das wir keine weiteren Annahmen machen, $\varphi(x)$ zeigen.

   (g) Wir zeigen $\neg\varphi$, indem wir zeigen, daß φ unmöglich ist, d.h. indem wir φ annehmen und einen *Widerspruch*, eine Aussage der Form $\psi \wedge \neg\psi$ zeigen („indirekter Beweis").

   Mit „indem wir ψ zeigen" ist hier gemeint, „indem wir ψ aus den Annahmen Γ zeigen. Mit „indem wir φ annehmen" ist hier gemeint, daß wir die bisherigen Annahmen Γ um φ erweitern. Mit diesen Schritten können wir nur zusammengesetzte Aussagen zeigen.

II. Andererseits können wir die Behauptung φ zeigen, indem wir eine der Annahmen, etwa ψ, verwenden und je nach deren Form vorgehen. (Es ist im allgemeinen nicht offensichtlich, welche der Annahmen man am besten verwenden sollte.)

   Manchmal können wir die Annahme direkt benutzen:

   (a) Um φ aus der Annahme φ zu zeigen, brauchen wir nichts mehr zu tun.

   (b) Um φ aus der Annahme ψ zu zeigen, brauchen wir nichts mehr zu tun, wenn auch $\neg\psi$ unter den Annahmen vorkommt. (Denn der Fall, daß alle Annahmen gelten, kann nicht auftreten.)

   Meistens benutzen wir die Annahme, indem wir sie umformen oder weitere Annahmen (die aber nicht mehr besagen) daraus gewinnen:

(c) Um φ aus der Annahme $\psi_1 \wedge \psi_2$ zu zeigen, genügt es, ψ stattdessen aus den beiden Annahmen ψ_1 und ψ_2 zusammen zu zeigen.

(d) Um φ aus der Annahme $\psi_1 \vee \psi_2$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme ψ_1 statt $\psi_1 \vee \psi_2$ zu zeigen und φ aus der Annahme φ_2 statt $\psi_1 \vee \psi_2$ zu zeigen. (Fallunterscheidung: einer der Fälle, ψ_1 oder ψ_2, muß ja eintreten.)

(e) Um φ aus der Annahme $\exists x\, \psi$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\psi(x)$, für ein noch nicht benutztes Objekt x, statt $\exists x\, \psi$ zu zeigen.

(f) Um φ aus der Annahme $\forall x\, \psi$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\psi(y) \wedge \forall x\, \psi$, für ein (evtl. schon benutztes) Objekt y, statt $\forall x\, \psi$, zu zeigen.

(g) Um φ aus der Annahme $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\neg\psi_1$ statt $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ zu zeigen und φ aus der Annahme ψ_2 statt $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ zu zeigen.

(h) Um φ aus der Annahme $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\psi_1 \wedge \psi_2$ statt $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu zeigen und φ aus der Annahme $\neg\psi_2 \wedge \neg\psi_2$ statt $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu zeigen.

(i) Um φ aus der Annahme $\neg\psi$ zu zeigen, genügt es, umgekehrt ψ aus der Annahme $\neg\varphi$ zu zeigen.

Hier und im Folgenden ist mit „aus der Annahme ψ" stets gemeint: „aus der Annahme ψ und den sonstigen Annahmen aus Γ".

III. Oft werden Abkürzungen verwendet. Dann wird statt mit dem definierten Ausdruck mit seiner Definition gearbeitet:

(a) Um eine Behauptung φ zu zeigen, in der ein Abkürzung verwendet wird, genügt es, statt φ die Behauptung φ' zu zeigen, in der statt der Abkürzung deren Definition eingesetzt ist.

(b) Um die Behauptung φ aus einer Annahme ψ zu zeigen, in der eine Abkürzung verwendet wird, genügt es, φ aus der Annahme ψ' statt ψ zu zeigen, in der statt der Abkürzung ihre Definition eingesetzt ist.

IV. Wenn das Grundprädikat $=$ verwendet wird, brauchen wir auch dafür spezielle Regeln.

(a) Um $\varphi(b)$ aus der Annahme $a = b$ zu zeigen, genügt es, $\varphi(a)$ aus der Annahme $a = b$ zu zeigen.

(b) Um φ zu zeigen, dürfen wir zusätzlich folgende Annahmen machen: $\forall x(x = x), \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x), \forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$.

Ob diese Vorgehensweise korrekt ist und ob wir damit alles, was wahr ist, zeigen können, ist natürlich nicht gesagt. Aber zumindest sollte es plausibel scheinen, daß durch diese Schritte keine falschen Aussagen gezeigt werden können. Das soll aber später genauer betrachtet werden.

Wir können damit zwei ganz grundlegende Eigenschaften zeigen: Einmal, daß für jede Aussage φ sie selbst, also φ, oder ihr „Gegenteil“, $\neg\varphi$, wahr ist („tertium non datur“). Zum anderen, daß nicht sowohl die Aussage φ als auch ihr Gegenteil, $\neg\varphi$, wahr sind („ausgeschlossener Widerspruch“):

Beispiel 1.2 Für jede Aussage φ können wir $\varphi \vee \neg\varphi$ ohne Annahmen zeigen.

Beweis: Denn um $\varphi \vee \neg\varphi$ zu zeigen, brauchen wir nach I. b) nur den zweiten Teil, $\neg\varphi$, unter der Annahme, der erste Teil sei falsch, also unter der Annahme $\neg\varphi$, zu zeigen. Nach II. a) ist dazu aber nichts mehr zu zeigen, da die neue Behauptung $\neg\varphi$ unter den neuen Annahmen schon vorkommt. $\square$

Beispiel 1.3 Für jede Aussage φ können wir $\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$ ohne Annahmen zeigen.

Beweis: Um $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ zu zeigen, ist nach I. g) zu zeigen, daß $(\varphi \wedge \neg\varphi)$ unmöglich ist, d.h. daß wir aus der Annahme von $(\varphi \wedge \neg\varphi)$ einen Widerspruch, eine Aussage der Form $\psi\wedge\neg\psi$, zeigen können. Wir wählen natürlich $\psi := \varphi$ und müssen dann die Behauptung $\varphi \wedge \neg\varphi$ aus der Annahme $\varphi \wedge \neg\varphi$ zeigen. Dafür wiederum brauchen wir nach II. a) gar nichts mehr zu tun. $\square$