2.2.2 Relationen

Wir betrachten den Begriff einer Relation nochmal und unterscheiden zwei Varianten. Zuerst eine Version, bei der es *nur* darauf ankommt, welche Paare in der jeweiligen Beziehung liegen:

Definition 2.34 Eine (*zweistellige*) *Relation* ist eine Menge R von geordneten Paaren. Statt $\langle a, b\rangle \in R$ schreibt man oft $aR\,b$ oder $R(a, b)$. Der *Vor- oder Urbildbereich* (engl. *Domain*) von R ist die Menge

$$dom(R) := \{\, a \mid \exists b\, R(a, b)\,\},$$

der *Nach- oder Bildbereich* (engl. *Range*) von R die Menge

$$ran(R) := \{\, b \mid \exists a\, R(a, b)\,\},$$

und das *Feld* von R ist

$$Feld(R) := dom(R) \cup ran(R).$$

R heißt *funktional*, falls es zu jedem a höchstens ein b mit $R(a, b)$ gibt, d.h. wenn

$$\forall a\, \forall b_1\, \forall b_2\, (R(a, b_1) \wedge R(a, b_2) \rightarrow b_1 = b_2).$$

R heißt *injektiv*, falls keine zwei verschiedenen a_1, a_2 zum gleichen b in der Relation R stehen, d.h. wenn

$$\forall a_1\, \forall a_2\, \forall b\, (R(a_1, b) \wedge R(a_2, b) \rightarrow a_1 = a_2).$$

Sind R und S Relationen, so heißt

$$\breve{R} := \{\, \langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\,\}$$

die *Konverse von R* (auch *Inverse* R^{-1} genannt), und

$$R\,;S := \{\, \langle a, c\rangle \mid \exists b\, (R(a, b) \wedge S(b, c))\,\}$$

das (*relative* oder *Relationen-*) *Produkt* von R und S.

Proposition 2.35 (a) Eine Relation R ist genau dann funktional (bzw. injektiv) wenn $\breve{R}$ injektiv (bzw. funktional) ist.

(b) Sind R und S funktionale (bzw. injektive) Relationen, so ist auch $R\,;S$ eine funktionale (bzw. injektive) Relation.

Beweis:

(a) Das ergibt sich durch Einsetzen der Definitionen, da $R(a, b) \leftrightarrow \breve{R}(b, a)$.

(b) Seien R und S funktional, und seien a, c_1, c_2 Elemente mit $a\,(R\,;S)\,c_1$ und $a\,(R\,;S)\,c_2$. Nach Definition von $(R\,;S)$ gibt es b_1 und b_2 mit $aR\,b_1$, $b_1S\,c_1$ sowie $aR\,b_2$ und $b_2S\,c_2$. Da R funktional ist, ist $b_1 = b_2$, und da S funktional ist, muß dann auch $c_1 = c_2$ sein. Also ist $(R\,;S)$ funktional.

Seien R und S injektiv, und a_1, a_2, c Elemente mit $a_1(R\,;S)\,c$ und $a_2(R\,;S)\,c$. Nach Definition von $(R\,;S)$ gibt es b_1 und b_2 mit $a_1R\,b_1$, $b_1S\,c$, $a_2R\,b_2$ und $b_2S\,c$. Da S injektiv ist, muß $b_1 = b_2$ sein, und da R injektiv ist, muß wegen $b_1 = b_2$ auch $a_1 = a_2$ sein.

Bem.: Die Umkehrung von (b) gilt nicht. □

Proposition 2.36 Für alle zweistelligen Relationen R und S ist (a) $(\breve{R})^{\smile} = R$ und (b) $(R\,;S)^{\smile} = (S^{\smile}; R^{\smile})$.

Beweis: Die zweite Behauptung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} c\,(R\,;S)\,a &\iff \exists b\,(R(c,b) \wedge S(b,a)) \\ &\iff \exists b\,(\breve{R}(b,c) \wedge \breve{S}(a,b)) \\ &\iff a\,(\breve{S}\,;\breve{R})\,c. \end{aligned}$$

Die erste Behauptung ist wegen $a\,(\breve{R})^{\smile}\,b \iff b\,\breve{R}\,a \iff aR\,b$ klar. □

Wie man Mengen als (extensionale) Bedeutungen intransitiver Verben (wie *arbeiten*) und absoluter Nomina (wie *Mensch*) betrachten kann, so kann man die zweistelligen Relationen als Bedeutungen transitiver Verben (wie *kennen*) und relativer Nomina (wie *Bruder*) ansehen.

Beispiel 2.37 (a) Ist die zweistellige Relation R die Bedeutung eines transitiven Verbs, so entspricht $\breve{R}$ dem Passiv des Verbs:

$$\begin{aligned} aRb &:\iff a \text{ regiert } b \\ &\iff b \text{ wird von } a \text{ regiert} \\ &\iff b\breve{R}\,a. \end{aligned}$$

Und $R\,;S$ entspricht folgender Relativsatzkonstruktion beim Objekt:

$$\begin{aligned} a(R\,;S)c &:\iff a(\text{kennt ; liebt})\,c \\ &\iff \exists b\ ((a \text{ kennt } b) \wedge (b \text{ liebt } c)) \\ &\iff a \text{ kennt jemanden, der } c \text{ liebt.} \end{aligned}$$

Ist S ein Relationsnomen, so entspricht $R\,;S$ folgender natürlichsprachlichen Ausdrucksweise:

$$\begin{aligned} a(R\,;S)c &:\iff a(\text{kennt ; Bruder})\,c \\ &\iff \exists b\ ((a \text{ kennt } b) \wedge (b \text{ ist Bruder von } c)) \\ &\iff a \text{ kennt einen Bruder von } c. \end{aligned}$$

(b) Eine zweistellige Relation zwischen Zuständen kann man als Bedeutung einer Handlung, als Zustandsveränderung, auffassen. Dann ist $R\,;S$ die Nacheinanderausführung der Handlungen R und S.

Diese Auffassung ist insbesondere bei den Befehlen eines Programms nützlich: die Bedeutung eines Befehls wie $x := y + 1$ ist die durch seine Ausführung bewirkte Veränderung des Speicherzustand. Enthält das Programm nur die Zahlvariablen x und y, so kann unter einem Speicherzustand ein Paar $\langle n, m\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der unter (x, y) gespeicherten Werte verstanden werden. Die Bedeutung von $x := y + 1$ ist dann die Relation

$$(y := x + 1) := \{\, \langle \langle n, m\rangle \,, \langle m + 1, m\rangle \rangle \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Der Hintereinanderausführung der Befehle $x := y + 1$ und $y := x + y$ entspricht dann das Produkt der beiden Relationen, sodaß

$$\begin{aligned}
&\langle n, m\rangle \,((x := y + 1); (y := x + y))\, \langle k, l\rangle \\
&\iff \quad \exists \langle i, j\rangle \,[\langle n, m\rangle \,(x := y + 1)\, \langle i, j\rangle \wedge \langle i, j\rangle \,(y := x + y)\, \langle k, l\rangle] \\
&\iff \quad \exists \langle i, j\rangle \,[\langle i, j\rangle = \langle m + 1, m\rangle \wedge \langle i, j\rangle \,(y := x + y)\, \langle k, l\rangle] \\
&\iff \quad \exists \langle i, j\rangle \,[\langle i, j\rangle = \langle m + 1, m\rangle \wedge \langle k, l\rangle = \langle i, i + j\rangle] \\
&\iff \quad \langle k, l\rangle = \langle m + 1, 2m + 1\rangle \,.
\end{aligned}$$

Auch für natürliche Sprachen kann man als Bedeutung eines Befehls die durch seine (verschiedenen möglichen) Ausführungen bewirkten Situationsveränderungen verstehen. Ist R die Bedeutung von „gehe zum Briefkasten“ und S die von „wirf diesen Brief ein“ so ist $(R\,;S)$ die Bedeutung von *gehe zum Briefkasten und wirf diesen Brief ein!* Dem „und dann“ in Befehlen entspricht also das Produkt ; von Situtationsveränderungen.

Definition 2.38 Seien R eine Relation und A und B Mengen. Das *Bild von A unter R* ist die Menge

$$A : R := \{\, b \mid \exists a \in A\, R(a, b) \,\} \quad (=: R[A]),$$

das *Urbild von B unter R* die Menge

$$R : B := \{\, a \mid \exists b \in B\;\, R(a, b) \,\} \qquad (=: R^{-1}[B]).$$

Beispiel 2.39 Steht $R(a, b)$ für *a ist ein Kind von b*, so ist $R : \{b\}$ die Menge der Kinder von b und $(R\,; R) : \{b\}$ die Menge der Enkelkinder von b. Umgekehrt ist $\{a\} : R$ die Menge der Eltern von a, $\{a\} : (R\,; R)$ die Menge der Großeltern von a.

Man sieht durch Einsetzen der Definitionen, daß sich das Bild (bzw. Urbild) einer Menge unter dem Produkt zweier Relationen wie folgt verhält:

Proposition 2.40 Seien R, S, T Relationen und A, B Mengen. Dann gilt

(a) $R\,;(S\,;T) = (R\,;S)\,;T$,

(b) $A : (R\,;S) = (A : R) : S$,

(c) $(R\,;S) : B = R : (S : B)$.

Nun betrachten wir den zweiten, schon im vorigen Abschnitt unter Definition **??** benutzten Begriff einer Relation. Bei diesem kommt es nicht nur darauf an, welche Paare in der jeweiligen Beziehung stehen, sondern auch auf vorgegebene Obermengen des Vor- und Nachbereichs:

Definition 2.41 Eine (zweistellige) *Relation zwischen den Mengen A und B* ist ein Tripel $\langle A, R, B\rangle$ von Mengen mit $R \subseteq A \times B$.

Man kann jede Relation R im Sinne von Definition 2.34 als die Relation

$$\langle dom(R), R, ran(R)\rangle$$

im Sinne von Definition 2.41 verstehen, aber man kann *dasselbe* R in *verschiedenen* Relationen $\langle A, R, B\rangle \neq \langle A', R, B'\rangle$ im Sinne von Definition 2.41 haben.

Statt „Relation $\langle A, R, B\rangle$“ sagen wir oft ungenauer(!) „Relation $R \subseteq A \times B$“.

Definition 2.42 (a) Die Relation $R \subseteq A \times B$ heißt *total*, wenn es zu jedem $a \in A$ mindestens ein $b \in B$ mit $R(a, b)$ gibt, d.h. wenn

$$\forall a \in A\, \exists b \in B\, R(a, b).$$

(b) Die Relation $R \subseteq A \times B$ heißt *surjektiv*, falls es zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ mit $R(a, b)$ gibt, d.h. falls

$$\forall b \in B\, \exists a \in A\, R(a, b).$$

Beachte, daß jede Menge R von Paaren als Relation $R \subseteq dom(R) \times ran(R)$ total und surjektiv ist.

Proposition 2.43 $R \subseteq A \times B$ ist total genau dann, wenn $\breve{R} \subseteq B \times A$ surjektiv ist.

Beweis: Wir setzen die Definitionen ein und erhalten:

$$\begin{aligned} R \subseteq A \times B \text{ ist total} &\iff \forall a \in A\, \exists b \in B\, R(a, b) \\ &\iff \forall a \in A \exists b \in B\; \breve{R}(b, a) \\ &\iff \breve{R} \subseteq B \times A \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

□