2 Mengen, Relationen und Funktionen

Um *über etwas* sprechen zu können, müssen die Grundaussagen in mindestens zwei Teile zerlegbar sein: in Mittel wie Verben, *mit denen* man etwas sagt, und in Mittel wie Namen, *über die* man etwas sagt. In der Logik spricht man von *Prädikaten* und *Objekten.*

Um die Bedeutung der logischen Formeln genauer festlegen zu können, betrachten wir in diesem Kapitel die mathematischen Begriffe, die zur Interpretation von Relationszeichen und Termen nötig sind.

2.1 Mengen

Die einfachsten Aussagen über Objekte sind die, die einem Objekt a eine Eigenschaft E zusprechen. Das sind Aussagen der Form $R(c)$, wobei c ein Name für a und R eine Bezeichnung für E ist.

Die Eigenschaften von Objekten werden mathematisch durch Mengen dargestellt. Was ist eine Menge? Intuitiv meint man, nach G.Cantor, dem Begründer der Mengenlehre:

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Schön, aber welche der folgenden Beispiele sind denn nun Mengen?

Beispiel 2.1 (a) die Schafe einer Schafsherde.

(b) die Nebelschwaden an einem Herbstmorgen.

(c) die Löcher im Schweizer Käse.

(d) die Schönheit der Natur und die Kürze des Lebens.

(e) $\sqrt{3}$, die Engel, der liebe Gott und die größte natürliche Zahl.

Immerhin macht die intuitive Beschreibung klar, daß mit den Objekten nicht nur Gegenstände gemeint sind. Aber was ist ein „bestimmtes Objekt", was ist ein „Objekt unseres Denkens", wer sind „wir", was ist eine „Zusammenfassung" und was ist „ein Ganzes"? In vielen Punkten klarer ist folgende Formulierung:

Cantor (1897), *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*:

> Eine Mannigfaltigkeit (ein Inbegrif, eine Menge) von Elementen, die irgendwelcher Begriffssphäre angehören, nenne ich *wohldefiniert*, wenn auf Grund ihrer Definition und infolge des logischen Prinzips

> vom ausgeschlossenen Dritten es als *intern bestimmt* angesehen werden muß, *sowohl* ob irgendein derselben Begriffssphäre angehöriges Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört oder nicht, *wie auch*, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht.

Die Mengenlehre versucht, eine genauere Definition zu geben, indem sie, einen Bereich von Objekten oder "Urelementen" angenommen, z.B. festlegt:

(a) welche Konstruktionsschritte für Mengen sind möglich?

(b) wie viele Konstruktionsschritte darf man machen?

(c) wann ergeben unterschiedliche Konstruktionen dieselbe Menge?

2.1.1 Bezeichnungsweise von Mengen und Elementen

Ist φ eine Formel und x eine Objektvariable, so bezeichnet

$$\{ x \mid \varphi \}$$

die Zusammenfassung oder *die Gesamtheit der Objekte, auf die φ zutrifft.*[3] (Das muß nicht immer eine Menge sein, ist es aber meistens.)

Für besonders einfache Formeln hat man eine andere Schreibweise: man schreibt

$$\{t_1, \dots, t_n\} \qquad \text{statt} \qquad \{ x \mid x = t_1 \vee \dots \vee x = t_n \}.$$

Hierbei werden wir statt logischer Formeln φ oft auch umgangssprachliche Beschreibungen benutzen und statt prädikatenlogischer Terme t_i allgemein üblichen Bezeichungen für Objekte, wenn es solche gibt.

Beispiel 2.2

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{ x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl} \} \\
\mathbb{N}_{<6} &:= \{ x \mid x = 0 \vee \dots \vee x = 5 \} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
\mathbb{R} &:= \{ x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl} \} \\
\mathbb{R}_{>0} &:= \{ x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl, die größer als 0 ist} \}
\end{aligned}$$

Ist $M = \{ x \mid \varphi \}$ eine Gesamtheit, so heißt jedes der Objekte mit der Eigenschaft φ ein *Element von M*. Man schreibt

$$a \in M \qquad \text{statt} \quad \varphi(a/x) \quad \text{d.h. „}a \text{ hat die Eigenschaft } \varphi\text{“}$$

[3] Hier nimmt man schon an zu verstehen, was es heißt, daß die durch φ ausgedrückte Eigenschaft auf ein Objekt zutrifft. Das soll aber für die Prädikatenlogik mit Hilfe der Mengenlehre später erst definiert werden!

Also steht $n \in \mathbb{N}$ für „n ist eine natürliche Zahl“. Was das letztere genau bedeutet, ist mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ nur angedeutet; beachte, daß in

$$\{\, x \mid x = 0 \lor x = 1 \lor \ldots \}$$

keine wirkliche Formel wie in $\{\, x \mid \varphi \,\}$ benutzt wird, da man unendlich viele Disjunktionsglieder braucht.

2.1.2 Gleichheit von Mengen

Die Sprechweise „a hat die Eigenschaft φ“ ist eine Kurzform für „a hat die durch φ ausgedrückte Eigenschaft“. Eine Formel φ *ist* nämlich keine Eigenschaft, sondern *drückt eine Eigenschaften (nur) aus*. Das führt zu zwei Problemen:

(a) Bei der Bildung einer Gesamtheit soll das Ergebnis nur von der ausgedrückten Eigenschaft, nicht von der ausdrückenden Formel abhängen.

(b) Bei der Bildung einer Gesamtheit soll das Ergebnis nicht davon abhängen, was die Eigenschaft *ist*, sondern nur davon, welche Objekte die Eigenschaft *haben*.

Beispiel 2.3 (a) Die durch φ ausgedrückte Eigenschaft wird auch durch die andere Formel $(\varphi \lor \varphi)$ ausgedrückt; wir erwarten also, daß $\{\, x \mid \varphi \,\} = \{\, x \mid (\varphi \lor \varphi) \,\}$.

(b) Die Eigenschaft, ein gleich*seitiges* Dreieck zu sein, ist verschieden von der Eigenschaft, ein gleich*winkliges* Dreieck zu sein. Aber jedes Dreieck, das eine der Eigenschaften hat, hat auch die andere. Also erwarten wir

$$\{\, x \mid x \text{ ist gleichseitiges Dreieck} \,\} = \{\, x \mid x \text{ ist gleichwinkliges Dreieck} \,\}.$$

Statt der Eigenschaften oder Begriffe genügt bei der Bildung einer Gesamtheit $\{\, x \mid \varphi \,\}$ aus einer Formel φ der *Umfang* (die *Extension*) des Begriffs.

Definition 2.4 (Extensionalitätsaxiom) Zwei Gesamtheiten M, N, insbesondere zwei Mengen, sind *gleich*, wenn sie dieselben Objekte als Elemente haben:[4]

$$M = N \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall x(x \in M \leftrightarrow x \in N).$$

Eine Menge ist normalerweise durch eine Beschreibung gegeben: eine Formel φ, eine Variable x und ggf. eine Interpretation der sonstigen Variablen von φ. In

$$M := \{\, x \mid x \in \mathbb{N} \land x > y \,\}, \qquad \text{wobei } y = \sqrt{2}$$

[4] Wir benutzen hier rechts eine *Formel*, um in der mathematischen Umgangssprache die dadurch ausgedrückte Bedingung *auszusagen*, und nicht –wie üblich– als Benennung eines syntaktischen Objekts.(Man kann $M = N$ auch als *Abkürzung* für die Formel $\forall x(x \in M \leftrightarrow x \in N)$ verstehen, so daß $\in$ das einzige Relationszeichen in der Mengenlehre ist.)

nennt man φ eine *definierende Formel* für M mit dem *Parameter* $y = \sqrt{2}$.

Das Extensionalitätsaxiom liefert eine Methode, die Gleichheit zweier Mengen mit Hilfe der gegebenen definierenden Formeln zu zeigen:

> Um zu zeigen, daß $\{\, x \mid \varphi \,\} = \{\, x \mid \psi \,\}$, muß man $\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)$ zeigen. Das geht in zwei Teilen:
>
> (a) Man nimmt an, x erfülle φ und zeigt, daß x auch ψ erfüllt.
>
> (b) Man nimmt an, x erfülle ψ und zeigt, daß x auch φ erfüllt.

Aufgabe 2.1 Zeige mit den Definitionen, daß $\{0, 1\} = \{1, 0\}$.

Allgemein sagt man, $\{\, x \mid \varphi \,\}$ entstehe aus φ *durch Abstraktion bezüglich* x.

Definition 2.5 Eine Menge N ist *eine Teilmenge von* M, wenn jedes Element von N ein Element von M ist:

$$M \subseteq N :\iff \forall x(x \in M \to x \in N).$$

Nach den Definitionen ist klar:

$$M = N \iff (M \subseteq N \wedge N \subseteq M).$$

Beispiel 2.6 $\{0, 2, 1\} \subseteq \{0, 1, 2, 4\}$, und $\emptyset \subseteq M \subseteq M \subseteq V$ für jede Menge M.

Man schreibt $M \neq N$ bzw. $M \not\subseteq N$ für die Negation von $M = N$ bzw. $M \subseteq N$.

Eine Menge M ist eine *echte* Teilmenge von N, in Zeichen: $M \subset N$, wenn $M \subseteq N$ und $M \neq N$ ist.

2.1.3 Konstruktionsmöglichkeiten von Mengen

Die wichtigsten Konstruktionsmöglichkeiten von Mengen sind folgende. Wir geben eine umgangssprachliche Beschreibung der Axiome, wobei für Mengen ausnahmsweise Kleinbuchstaben verwendet werden, um zu betonen, daß Mengen die Objekte sind, über die man in den Axiomen spricht. (Objekte werden normalerweise mit Kleinbuchstaben bezeichnet und Mengen mit Großbuchstaben.)

Definition 2.7 (Aussonderungsaxiom) Ist x eine Menge, φ eine Formel und z eine Variable, so bildet die Gesamtheit $\{\, z \mid z \in x \wedge \varphi \,\}$ all der Elemente von x, auf die φ zutrifft, eine Menge.

Beispiel 2.8 Aus $\mathbb{N}$ erhalten wir durch Aussonderung die Menge der geraden natürlichen Zahlen:

$$\{\, x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ ist durch 2 teilbar} \,\}.$$

Statt $\{\, z \mid z \in x \wedge \varphi \,\}$ schreibt man oft $\{\, z \in x \mid \varphi \,\}$.

Da Mengen auch zu den "Objekten unseres Denkens" gehören, sollen auch sie als Elemente von Mengen auftreten können, wie in $\{\{0\}, \{0,1\}, \{1,2\}\}$.

Definition 2.9 (Vereinigungsaxiom) Ist x eine Menge, so bildet die Gesamtheit der Objekte, die Elemente von Elementen von x sind, also

$$\bigcup x := \{\, z \mid \exists v(v \in x \wedge z \in v) \,\},$$

eine Menge, die *Vereinigung* aller Elemente von x. Ist hierbei $x = \{v_1, v_2\}$ eine Menge mit nur zwei Elementen, v_1 und v_2, so schreibt man

$$v_1 \cup v_2 \qquad \text{statt} \qquad \bigcup\{v_1, v_2\} \ \text{ oder } \ \bigcup x.$$

Für die Vereinigungsmenge einer endlichen Menge gilt:

$$\bigcup\{v_1, \ldots, v_n\} = \{\, z \mid z \in v_1 \vee \ldots \vee z \in v_n \,\},$$

denn die Formeln $\varphi(z) := \exists v(v \in \{v_1, \ldots, v_n\} \wedge z \in v)$ und $\psi(z) := (z \in v_1 \vee \ldots \vee z \in v_n)$ sind äquivalent, sodaß nach dem Extensionalitätsaxiom die Gesamtheiten $\{\, z \mid \varphi \,\}$ und $\{\, z \mid \psi \,\}$ gleich sind.

Daraus folgt z.B. $v_1 \cup v_2 = v_2 \cup v_1$ und $(v_1 \cup v_2) \cup v_3 = v_1 \cup (v_2 \cup v_3)$, weshalb man die Klammern im letzten Fall auch weglassen kann.

Beispiel 2.10

$$\begin{aligned} \bigcup\{\{0\}, \{0,1\}\} &= \{0,1\} = \{0\} \cup \{0,1\} \\ \bigcup\{\{0\}, \{0,1\}, \{1,2\}\} &= \{0,1,2\} = \{0\} \cup \{0,1\} \cup \{1,2\} \end{aligned}$$

Beachte, daß man die Vereinigungsmenge $v_1 \cup v_2$ nicht durch Aussonderung aus einer Menge gewonnen haben.

Definition 2.11 Ist x eine Menge, so heißt die Gesamtheit der Objekte, die in jedem Element von x enthalten sind, also

$$\bigcap x := \{\, z \mid \forall v(v \in x \to z \in v) \,\},$$

der *Durchschnitt* aller Elemente von x. Ist $x = \{v_1, v_2\}$ so schreibt man

$$v_2 \cap v_2 \qquad \text{statt} \qquad \bigcap x \quad \text{oder} \quad \bigcap\{v_1, v_2\}.$$

Für endliche Mengen gilt entsprechend zur Vereinigung:

$$\bigcap\{v_1, \ldots, v_n\} = \{\, z \mid z \in v_1 \wedge \ldots \wedge z \in v_n \,\}.$$

Es gilt wie erwartet auch $v_1 \cap v_2 = v_2 \cap v_1$ und $(v_1 \cap v_2) \cap v_3 = v_1 \cap (v_2 \cap v_3)$.

Bemerkung 2.12 Wir brauchen kein neues Axiom, um sicherzustellen, daß der Durchschnitt $\bigcap x$ aller Elemente einer Menge x eine Menge ist: wegen

$$\bigcap x = \{ \, z \mid z \in \bigcup x \;\wedge\; \forall v(v \in x \to z \in v) \, \}$$

erhält man den Durchschnitt durch Aussonderung aus der Menge $\bigcup x$.

Lemma 2.13 Sind x und y Mengen, so auch die *Differenz* von x und y,

$$x \setminus y \quad := \quad \{ \, z \mid z \in x \wedge z \notin y \, \},$$

(auch $x - y$ geschrieben) und die *symmetrische Differenz* von x und y,

$$x \bowtie y \quad := \quad (x \setminus y) \cup (y \setminus x).$$

Dies sind Mengen, denn $x \setminus y$ erhält man durch Aussonderung aus der Menge x, und $x \bowtie y$ durch Vereinigung der beiden Mengen $x \setminus y$ und $y \setminus x$.

Definition 2.14 (Paarmengenaxiom) Ist x eine Menge und y eine Mengen, so ist auch die Gesamtheit

$$\{x, y\} \quad := \quad \{ \, z \mid z = x \vee z = y \, \}$$

eine Menge. Man nennt $\{x, y\}$ das *ungeordnete Paar* aus x und y.

Es genügt eigentlich, zu je zwei Mengen x und y die Existenz einer Menge u zu fordern, die mindestens x und y als Elemente hat. Denn mit u ist das ungeordnete Paar

$$\{x, y\} = \{ \, z \mid z \in u \wedge (z = x \vee z = y) \, \}$$

nach dem Aussonderungsaxiom eine Menge.

Sind x und y dieselbe Menge, so heißt $\{x, y\} = \{x\} = \{y\}$ die *Einermenge* $\{x\}$.

Definition 2.15 (Potenzmengenaxiom) Die Gesamtheit aller Teilmengen einer Menge x, also

$$P(x) := \{ \, z \mid z \subseteq x \, \}, \quad \text{oder} \quad 2^x := \{ \, z \mid z \subseteq x \, \},$$

bildet eine Menge. Hierbei ist $z \subseteq x$ die Formel $\forall v(v \in z \to v \in x)$.

Intuitiv besagt das Axiom, daß eine Menge „nicht zu viele" Teilmengen hat: die Gesamtheit ihrer Teilmengen ist keine *Unmenge*, sondern „bloß" eine Menge.

Beispiel 2.16 Ist $x = \{0, 1, 2\}$ so ist

$$2^x = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Die Menge x hat 3 Elemente, ihre Potenzmenge 2^x hat $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ Elemente.

Wir werden später noch sehen, was eine Zuordung oder eine *Funktion* ist. Mit einer Funktion f ordnet man jedem Element z einer Menge ein Objekt $f(z)$ zu. Durch Ersetzen von Elementen erhält man aus einer Menge wieder eine Menge:

Definition 2.17 (Ersetzungsaxiom) Ist f eine Funktion und x eine Menge, so ist die Gesamtheit

$$f[x] := \{ f(z) \mid z \in x \}, \qquad \text{(auch: } f``x \text{ geschrieben)}$$

das sogenannte *das Bild der Menge x unter der Funktion f*, eine Menge.

Beispiel 2.18 (a) Sei $f(n) := \sqrt{n}$ die Quatratwurzel der natürlichen Zahl n, eine reelle Zahl, die im allgemeinen nicht zu $\mathbb{N}$ gehört. Dann ist

$$f[\mathbb{N}] = \{ \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

eine *Menge* von rellen Zahlen, also $f[\mathbb{N}] \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Sei W die Gesamtheit der Wortformen einer Sprache und $f(w)$ die Stammform der Vollform $w \in W$. Falls W eine Menge ist, so ist nach dem Ersetzungsaxiom auch $f[W]$, die Gesamtheit der Stammformen, eine Menge.

Eine Menge x heißt *leer*, wenn sie keine Elemente hat, wenn also $\exists y(y \in x)$ falsch ist. Man benutzt oft die Abkürzungen

$$\exists y \in x\ \varphi :\leftrightarrow\ \exists y(y \in x \wedge \varphi) \qquad \text{und} \qquad \forall y \in x\ \psi :\leftrightarrow\ \forall y(y \in x \to \psi).$$

Definition 2.19 (Fundierungsaxiom) Jede nicht leere Menge x enthält ein Element y, dessen Elemente z keine Elemente von x sind:

$$\forall x(\exists y(y \in x)\ \to\ \exists y \in x\ \forall z \in y\ z \notin x).$$

Dieses Axiom braucht man, um sicherzustellen, daß es keine unendliche Kette

$$\ldots, \quad x_{n+1} \in x_n, \quad x_n \in x_{n-1}, \quad \ldots, \quad x_1 \in x_0$$

gibt: das Entnehmen von Elementen von Elementen von ... soll nach endlich vielen Schritten nicht mehr möglich sein.

Beispiel 2.20 Sei $x = \{a, b, \{a, \{a, b\}, \{a\}\}, \{a\}, \{a, b\}\}$. Man sieht, daß alle Elemente des dritten, vierten und des fünften Elements von x auch Elemente von x sind. Nach dem Fundierungsaxiom muß a oder b leer sein oder ein Element y haben, das verschieden ist von $a, b, \{a\}, \{a, b\}$ und $\{a, \{a, b\}, \{a\}\}$. Es kann z.B. nicht der Fall sein, daß $a = \{a\}$ ist, oder daß $a = \{b\}$ und $b = \{a\}$ ist. Dann hätte man

$$\ldots, \quad a \in a, \quad a \in a, \quad \ldots, \quad a \in a$$

beziehungsweise

$$\ldots, \quad b \in a, \quad a \in b, \quad \ldots, \quad b \in a.$$

Die bisherigen Axiome waren Aussagen der Form: „*Wenn* dieses eine Menge ist, *dann* ist auch jenes eine Menge“. Sie sind wahr, wenn es gar keine Mengen gibt! Man fordert, daß es mindestens eine Menge ganz ohne Elemente und eine Menge mit unendlich vielen Elementen „gibt“:

Definition 2.21 (Unendlichkeitsaxiom) Es gibt eine Menge x, die eine leere Menge enthält und mit jedem Element y auch die Menge $y \cup \{y\}$:

$$\exists x(\ \exists y \in x\ \forall z\ (z \notin y) \wedge\ \forall y \in x\ \exists z \in x\ \forall v(v \in z \leftrightarrow (v \in y \vee v = y))).$$

Das wäre die genaue Formulierung. Wir können es lesbarer durch

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

ausdrücken, wobei man aber beachten muß: (i) $\emptyset$ ist eine Bezeichnung für *das einzige* y mit $\forall z\,(z \notin y)$: nach dem Extensionalitätsaxiom sind alle solchen leeren Mengen gleich. (ii) Mit $y \in x$ ist auch $\{y\}$ eine Menge, die wir aus x durch Aussonderung erhalten: $\{y\} = \{\, v \mid v \in x \wedge v = y \,\}$. Mit y und $\{y\}$ ist auch $\{y, \{y\}\}$ eine Menge: mit $\{y\}$ ist auch die Potenzmenge hiervon eine Menge, also $2^{\{y\}} = \{\emptyset, \{y\}\}$, und wenn wir das Element $\emptyset$ durch y ersetzen, erhalten wir nach dem Ersetzungsaxiom eine Menge, eben $\{y, \{y\}\}$. Das Vereinigungsaxiom sagt dann, daß auch $y \cup \{y\} := \bigcup\{y, \{y\}\}$ eine Menge ist. (Man sieht, daß es sehr mühsam wäre, wenn man von jeder Menge, die man braucht, zeigen wollte, wie sie nach den Axiomen konstruiert werden kann!)

Beispiel 2.22 Mit dem Unendlichkeitsaxiom kann man sich „die“ natürlichen Zahlen konstruieren, indem man sie als bestimmte Mengen auffaßt:

$$0 := \emptyset, \quad n + 1 := n \cup \{n\}.$$

Damit wird $n + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Man muß natürlich dann noch überlegen, wie man die übliche Addition, Multiplikation usw. erklären kann. Das überlassen wir den Mengentheoretikern.

Wir verstehen die Zahlen lieber als *Urelemente*, d.h. Objekte, die keine Mengen sind, aber bei der Mengenbildung als Parameter in den definierenden Formeln benutzt werden dürfen. (Für Urelemente a, b muß die Bedeutung von $a = b$ vorher festgelegt sein, und in den Formeln muß man sagen, ob man mit einer Variablen über auch über Urelement oder nur über Mengen spricht.)

Bemerkung 2.23 Die Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel hat noch ein weiteres Axiom, das „Auswahlaxiom“, auf das wir nicht eingehen wollen.

Was haben wir gegenüber der intuitiven Definition von Cantor gewonnen? Die Mengenlehre sagt genauer, welche Gesamtheiten $\{\, x \mid \varphi \,\}$ „ein Ganzes“, eben eine Menge, bilden. Die intuitive Vorstellung, man könne beliebige Objekte mit einer beliebigen Eigenschaft zu einem Ganzen zusammenfassen, ist nämlich *in sich widersprüchlich*:

Lemma 2.24 (B.Russell) Die Gesamtheit $V := \{ x \mid x = x \}$ aller Mengen ist *keine* Menge.

Beweis: Angenommen, V sei eine Menge. Durch Aussonderung aus V erhalten wir die Menge

$$R := \{ x \mid x \in V \wedge x \notin x \}.$$

Wegen $R = R$ ist $R \in V$. Wir überlegen nun, ob $R \in R$ oder ob $R \notin R$ ist.

Wäre $R \in R$, so wäre nach der Definition von R auch $R \notin R$. Wäre $R \notin R$, so wäre ebenfalls nach der Definition von R (und wegen $R \in V$) auch $R \in R$. In beiden Fällen müßte $R \in R \wedge R \notin R$ sein, ein Widerspruch. Da einer der Fälle aber eintreten muß, kann unsere Annahme, V sei eine Menge, nicht stimmen. □

Man kann das Lemma auch so verstehen: Der Begriff "Alles", die durch $\varphi(x) := x = x$ ausgedrückte Eigenschaft, ist für sich alleine genommen sinnlos. Erst wenn man ihn wie im Aussonderungsaxiom *relativiert*, hat er einen Umfang:

$$\text{„alles aus der Menge } y\text{“} = \{ x \mid x \in y \wedge x = x \} = y.$$

Abschließend zeigen wir, wie man beim (ausführlichen) Beweisen mit Definitionen umgeht. Manche „offensichtliche“ Aussagen der Mengenlehre ergeben sich (ohne die Axiome über Mengen) schon aus den Definitionen:

Beispiel 2.25 Für Mengen a und b gilt

$$\{a\} \subseteq \{b, a\}, \tag{1}$$

wenn folgende Schreibweisen als Abkürzungen eingeführt sind:

$$\begin{aligned} x \subseteq y \quad &:\leftrightarrow \quad \forall z(z \in x \to z \in y) && (2)\\ \{t_1, \dots, t_n\} \quad &:= \quad \{ z \mid z = t_1 \vee \dots \vee z = t_n \} && (3)\\ v \in \{ z \mid \varphi(z) \} \quad &:\leftrightarrow \quad \varphi(v) && (4) \end{aligned}$$

Beweis: Setzen wir die Definition (2) ein, so lautet die Behauptung

$$\forall z(z \in \{a\} \to z \in \{b, a\}). \tag{5}$$

Um das zu zeigen, nehmen wir nach I. f) an, z sei eine beliebige Menge (andere Objekte gibt es in der Mengenlehre ohne Urelemente nicht); dafür müssen wir noch zeigen, daß

$$z \in \{a\} \to z \in \{b, a\}. \tag{6}$$

Nach I. c) nehmen wir $z \in \{a\}$ an und müssen noch zeigen:

$$z \in \{b, a\}, \tag{7}$$

oder, wenn wir hierin Definition (3) einsetzen (mit x statt z),

$$z \in \{\, x \mid x = b \vee x = a \,\}, \tag{8}$$

und wenn wir darin auch noch Definition (4) einsetzen,

$$z = b \vee z = a. \tag{9}$$

Um das zu zeigen, nehmen wir nach I. b) $z \neq b$ an und zeigen

$$z = a. \tag{10}$$

Als Annahmen haben wir (neben den Axiomen der Mengenlehre) jetzt

$$z \in \{a\} \text{ und } z \neq b.$$

Die ersten Annahme $z \in \{a\}$ wird mit Definition (3) zu

$$z \in \{\, y \mid y = a \,\}$$

und mit der Definition (4) weiter zu $z = a$. Da nun die Behauptung (10) unter den Annahmen

$$z = a,\ z \neq b$$

vorkommt, sind wir nach II. a) fertig. □