Beweise durch Analyse der Behauptung

I. Einerseits können wir die Behauptung φ analysieren. Je nach der Form von φ gehen wir unterschiedlich vor:

(a) Wir zeigen $\varphi \wedge \psi$, indem wir φ zeigen und ψ zeigen.

Behauptung: $\varphi \wedge \psi$:
Beweis: Wir müssen zwei Aussagen zeigen.
Beh.1: φ. Bew.: ...
Beh.2: ψ: Bew.: ... $\square$

(b) Wir zeigen $\varphi \vee \psi$, indem wir $\neg\varphi$ annehmen und ψ zeigen, oder indem wir $\neg\psi$ annehmen und φ zeigen.

Behauptung: $\varphi \vee \psi$:
Beweis:
Fall 1. $\neg\varphi$ gilt. Beh.1: ψ. Bew.: ...
(Fall 2: φ gilt. Dann gilt auch $\varphi \vee \psi$, fertig.) $\square$

(c) Wir zeigen $\varphi \to \psi$, indem wir φ annehmen und ψ zeigen.

Behauptung: $\varphi \to \psi$:
Beweis: Wir können annehmen, daß auch φ gilt.
Beh: ψ. Bew.: ... $\square$

(d) Wir zeigen $\varphi \leftrightarrow \psi$, indem wir $\varphi \to \psi$ und $\psi \to \varphi$ zeigen.

Behauptung: $\varphi \leftrightarrow \psi$:
Beweis: Wir zeigen die beiden Richtungen einzeln.
Beh 1: $\varphi \to \psi$. Bew.: ...
Beh.2: $\psi \to \varphi$. Bew.: ... $\square$

(e) Wir zeigen $\exists x\, \varphi$ (meistens), indem wir ein geeignetes Objekt x angeben und dafür $\varphi(x)$ zeigen.

Behauptung: $\exists x \varphi$.
Beweis: Betrachte das (gut gewählte!) Objekt a.
Wir zeigen, daß a ein Beispiel für x ist.
Beh 1: $\varphi(a)$. Bew.: ... $\square$

(f) Wir zeigen $\forall x\, \varphi$, indem wir für ein beliebiges Objekt x, über das wir keine weiteren Annahmen machen, $\varphi(x)$ zeigen.

Behauptung: $\forall x \varphi$.
Beweis: Sei a ein beliebiges Objekt. Zu zeigen ist
Beh 1: $\varphi(a)$. Bew.: ... $\square$

(g) Wir zeigen $\neg\varphi$, indem wir zeigen, daß φ unmöglich ist, d.h. indem wir φ annehmen und einen *Widerspruch*, eine Aussage der Form $\psi \wedge \neg\psi$ zeigen.

Behauptung: $\neg\varphi$.
Beweis: (indirekt). Angenommen, es gelte φ.
Beh 1: $\psi \wedge \neg\psi$ (für geeignetes ψ!). Bew.: ...
Da $\varphi \wedge \neg\psi$ aber nicht gelten, kann, muß auch die Annahme φ falsch sein. $\square$

Beweise durch Verwenden einer Annahme

II. Es ist im allgemeinen nicht offensichtlich, welche der Annahmen man am besten verwendet; sie sollte etwas mit der Behauptung gemeinsam haben.

Manchmal können wir die Annahme direkt benutzen:

(a) Um φ aus der Annahme φ zu zeigen, brauchen wir nichts mehr zu tun.

Behauptung: φ.
Beweis: Nach den Annahmen gilt φ. □

(b) Um φ aus der Annahme ψ zu zeigen, brauchen wir nichts mehr zu tun, wenn auch $\neg\psi$ unter den Annahmen vorkommt.

Behauptung: φ.
Beweis: Unter den Annahmen befindet sich die Aussage ψ und ihr Gegenteil, $\neg\psi$. Also kann dieser Fall nicht auftreten. □

Meistens wird die Annahme umgeformt oder eine weitere Annahme daraus gewonnen:

(c) Um φ aus der Annahme $\psi_1 \wedge \psi_2$ zu zeigen, genügt es, ψ stattdessen aus den beiden Annahmen ψ_1 und ψ_2 zusammen zu zeigen.

Behauptung: φ.
Beweis: Nach den Annahmen gelten ψ_1 und ψ_2.
Beh.: φ. Bew.: ... $\square$

(d) Um φ aus der Annahme $\psi_1 \vee \psi_2$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme ψ_1 statt $\psi_1 \vee \psi_2$ zu zeigen und φ aus der Annahme φ_2 statt $\psi_1 \vee \psi_2$ zu zeigen.

Behauptung: φ.
Beweis: Nach den Annahmen gilt $\psi_1 \vee \psi_2$.
Fall 1: Angenommen, es gilt ψ_1. Beh.: φ. Bew.: ...
Fall 2: Angenommen, es gilt ψ_2. Beh.: φ. Bew.: ... $\square$

(e) Um φ aus der Annahme $\exists x\, \psi$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\psi(x)$, für ein noch nicht benutztes Objekt x, statt $\exists x\, \psi$ zu zeigen.

Behauptung: φ.
Beweis: Nach den Annahmen gilt $\exists x\, \psi$. Wir nehmen an, a sei ein (unbekanntes) Objekt, für das $\psi(a)$ gilt.
Beh.: φ. Bew.: ... $\square$

(f) Um φ aus der Annahme $\forall x\, \psi$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\psi(y) \wedge \forall x\, \psi$, für ein (evtl. schon benutztes) Objekt y, statt $\forall x\, \psi$, zu zeigen.

Behauptung: φ.
Beweis: Nach den Annahmen gilt $\forall x\, \psi$. Daher gilt insbesondere $\psi(a)$, für das (bekannte) Objekt a.
Beh.: φ. Bew.: ... $\square$

(g) Um φ aus der Annahme $\psi_1 \to \psi_2$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\neg\psi_1$ statt $\psi_1 \to \psi_2$ zu zeigen und φ aus der Annahme ψ_2 statt $\psi_1 \to \psi_2$ zu zeigen.

Behauptung: φ.
Beweis: Nach den Annahmen gilt $\psi_1 \to \psi_2$.
Fall 1: Angenommen, $\neg\psi_1$. Beh.: φ. Bew.:...
Fall 2: Sonst ist nach der Annahme ψ_2.
Beh.: φ. Bew: ... $\square$

(h) Um φ aus der Annahme $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu zeigen, genügt es, φ aus der Annahme $\psi_1 \wedge \psi_2$ statt $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu zeigen und φ aus der Annahme $\neg\psi_2 \wedge \neg\psi_2$ statt $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ zu zeigen.

Behauptung: φ.
Beweis: Nach den Annahmen gilt $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$.
Fall 1: Angenommen, ψ_1 und ψ_2.
Beh.: φ. Bew.:...
Fall 2: Angenommen, $\neg\psi_1$ und $\neg\psi_2$.
Beh.: φ. Bew: ... $\square$

(i) Um φ aus der Annahme $\neg\psi$ zu zeigen, genügt es, umgekehrt ψ aus der Annahme $\neg\varphi$ zu zeigen.

Behauptung: φ.
Beweis: (indirekt) Wir nehmen $\neg\varphi$ an und zeigen ψ, was der Annahme $\neg\psi$ widerspricht.
Ann.: $\neg\varphi$. Beh.: ψ. Bew.: ... $\square$

Verwendung von Abkürzungen

III. Abkürzungen dürfen durch ihren definierenden Ausdruck ersetzt werden.

   (a) Um eine Behauptung φ zu zeigen, in der eine Abkürzung verwendet wird, genügt es, statt φ die Behauptung φ' zu zeigen, in der statt der Abkürzung deren Definition eingesetzt ist.

   (b) Um die Behauptung φ aus einer Annahme ψ zu zeigen, in der eine Abkürzung verwendet wird, genügt es, φ aus der Annahme ψ' statt ψ zu zeigen, in der statt der Abkürzung ihre Definition eingesetzt ist.

Wir können auch einfach zusätzlich annehmen:

$$\forall x \ldots \forall z(\text{Abk}(x, \ldots, z) \leftrightarrow \text{Def}(x, \ldots, z))$$

$$z.B. \quad \forall x \forall z(x \subseteq z \leftrightarrow \forall y(y \in x \to y \in z))$$

Verwendung von Annahmen über =

IV. Wenn das Grundprädikat = verwendet wird, brauchen wir auch dafür spezielle Regeln.

   (a) Um $\varphi(b)$ aus der Annahme $a = b$ zu zeigen, genügt es, $\varphi(a)$ aus der Annahme $a = b$ zu zeigen.

   (b) Um φ zu zeigen, dürfen wir zusätzlich folgende Annahmen machen:

$$\forall x(x = x),$$
$$\forall x \forall y(x = y \to y = x),$$
$$\forall x \forall y \forall z((x = y \land y = z) \to x = z)$$