Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

Universität München, CIS, WS 2004/05

Abgabetermin: Do, 23.12.04

Aufgabe 17 *Eine Relation* $R \subseteq A \times A$ *heißt* irreflexiv, *wenn* $\forall a \in A\ \langle a, a\rangle \notin R$, *und* antisymmetrisch, *wenn* $\forall a, b \in A(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, a\rangle \in R \rightarrow a = b)$.

Sei $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ *das lateinische Alphabet und* Σ^+ *die Menge aller (nicht leeren) „Wörter" über* Σ, *d.h. aller*

$$\Sigma^+ = \{\, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid n \in I\!N \wedge n > 0\,\}.$$

Anstatt durch $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$[1] *gibt man das Wort durch die Hintereinanderschreibung seiner Buchstaben an, also wie üblich durch* $a_1 a_2 \cdots a_n$.

Betrachte die folgenden zweistelligen Relationen $R_i \subseteq \Sigma^+ \times \Sigma^+$ *zwischen nichtleeren Wörtern:*

(a) $R_1(v, w) :\Longleftrightarrow$ *v ist ein Präfix (Anfangsstück) von w,*

(b) $R_2(v, w) :\Longleftrightarrow$ *v und w haben denselben Anfangsbuchstaben,*

(c) $R_3(v, w) :\Longleftrightarrow$ *v und w haben einen Buchstaben gemeinsam (evtl. an verschiedenen Stellen),*

(d) $R_4(v, w) :\Longleftrightarrow$ *v und w haben alle Buchstaben gemeinsam (haben dieselbe Buchstabenmenge),*

(e) $R_5(v, w) :\Longleftrightarrow$ *v und w haben nicht alle Buchstaben gemeinsam,*

(f) $R_6(v, w) :\Longleftrightarrow$ *v ist ein Infix (Mittelstück, Teilwort) von w.*

Welche dieser Relationen ist (i) reflexiv, (ii) irreflexiv, (iii) symmetrisch, (iv) antisymmetrisch, (v) transitiv ? Geben Sie jeweils für die Eigenschaften (i)-(v), die für R_i nicht *vorliegen, ein Gegenbeispiel an.* *(8 Punkte)*

Aufgabe 18 *Sei* $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B = \mathbb{N}$ *und* $h : A \rightarrow B$ *die durch*

$$h(x) := \begin{cases} 0, & \textit{falls } x = a \vee x = c, \\ 1, & \textit{falls } x = b, \\ 2, & \textit{falls } x = d \vee x = e, \\ 3, & \textit{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion. Sei $\equiv_h$ *die Äquivalenzrelation auf A, die durch „bei Anwendung von h denselben Funktionswert haben" definiert wird, und* $[x] := \{\, y \in A \mid x \equiv_h y\,\}$ *die Äquivalenzklasse von* $x \in A$. *Geben sie die Menge der Äquivalenzklassen von* $\equiv_h$, *also* $\{\,[x] \mid x \in A\,\}$, *konkret an.* *(3 Punkte)*

[1]Erinnerung: wir hatten geordnete Paare $\langle a, b\rangle$ definiert und daraus die n-Tupel durch

$$\langle a\rangle := a, \qquad \langle a_1, \ldots, a_{n+1}\rangle := \langle a_1, \langle a_2, \ldots, a_{n+1}\rangle\rangle\,.$$

Es genügt zu wissen, daß $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle \iff n = m \wedge a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n$ ist.

Aufgabe 19 *Sei Σ^+ wie in Aufgabe 17 die Menge aller nicht-leeren Wörter über dem Alphabet Σ. Sei $\mathcal{E} = \{A, B, C, D\}$ die Menge der folgenden Eigenschaften (bzw. deren Extensionen, d.h. der Mengen von Wörtern, die diese Eigenschaften haben):*

(a) $A(w) :\iff$ *w beginnt mit dem Buchstaben a,*

(b) $B(w) :\iff$ *w endet mit dem Buchstaben a,*

(c) $C(w) :\iff$ *die Länge von w ist > 10,*

(d) $D(w) :\iff$ *die Länge von w ist ≤ 8.*

$\mathcal{E}$ bildet eine Überdeckung von Σ^+ durch nicht-leere Teilmengen, aber manche von diesen haben gemeinsame Elemente. Konstruieren Sie aus $\mathcal{E}$ durch Kombinationen der Eigenschaften A, B, C, D eine Zerlegung von Σ^+ in paarweise disjunkte Teilmengen von Σ^+. *(6 Punkte)*

Bei Unklarheiten zur Aufgabenstellung fragen Sie bitte im nächsten Vorlesungstermin oder in meiner Sprechstunde (Di 10-11, Raum B 107, Oe67). H.Leiß