Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

Universität München, CIS, WS 2004/05

Abgabetermin: Do, 16.12.04

Aufgabe 15 *Seien $R, S \subseteq A \times B$ zweistellige Relationen und $Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$ Mengen. Wir haben für die Operation : des Urbildnehmens, $R : Y := \{ a \mid \exists b \in Y\ a\,R\,b \}$, und die Vereinigung von Mengen bzw. Relationen folgende Distributivgesetze gezeigt:*

(a) $R : (Y_1 \cup Y_2) = (R : Y_1) \cup (R : Y_2)$

(b) $(R \cup S) : Y = (R : Y) \cup (S : Y)$

Wendet man dies auf die konversen Relationen $r^{\smile}, S^{\smile}$ und Mengen $X, X_1 X_2 \subseteq A$ an, so erhält man für das Bildnehmen entsprechend

$$(X_1 \cup X_2) : R = (X_1 : R) \cup (X_2 : R) \quad \textit{und} \quad X : (R \cup S) = (X : R) \cup (X : S).$$

Zeige allgemeiner: Sei $\mathcal{R}$ eine Menge von Relationen und $\mathcal{Y}$ eine Menge von Mengen. Dann gilt:

(a) $R : \bigcup \mathcal{Y} = \bigcup \{ R : Y \mid Y \in \mathcal{Y} \}$ *(3 Punkte)*

(b) $(\bigcup \mathcal{R}) : Y = \bigcup \{ R : Y \mid R \in \mathcal{R} \}$ *(3 Punkte)*

Zeige die folgenden Beziehungen und zeige durch Beispiele, daß man nicht immer = statt $\subseteq$ hat:

(a) $R : (Y_1 \cap Y_2) \subseteq (R : Y_1) \cap (R : Y_2)$ *(3 Punkte)*

(b) $(R \cap S) : Y \subseteq (R : Y) \cap (S : Y)$ *(3 Punkte)*

Durch Anwenden auf die konverse Relation bekommt man für das Bild von Relationen analog:

$$(X_1 \cap X_2) : R \subseteq (X_1 : R) \cap (X_2 : R) \quad \textit{und} \quad X : (R \cap S) \subseteq (X : R) \cap (X : S).$$

Aufgabe 16 *Zeige für jede zweistellige Relation R und alle a, b, c:* *(4 Punkte)*

$$(\exists b (a\,R\,b \wedge b\,R\,c) \to a\,R\,c) \leftrightarrow \forall b ((a\,R\,b \wedge b\,R\,c) \to a\,R\,c).$$

Sie können auch gleich für beliebige Aussagen $\varphi(a, b, c)$ und $\psi(a, c)$ zeigen:

$$(\exists b\, \varphi(a, b, c) \to \psi(a, c)) \leftrightarrow \forall b (\varphi(a, b, c) \to \psi(a, c))$$

(Die Tippfehler sind beseitigt.)

Bei Unklarheiten zur Aufgabenstellung fragen Sie bitte im nächsten Vorlesungstermin oder in meiner Sprechstunde (Di 10-11, Raum B 107, Oe67). H.Leiß