2.3 Äquivalenz und Ähnlichkeit

Die *Identitätsrelation auf* M wird mit $I_M := \{\, \langle m, m\rangle \mid m \in M \,\}$ bezeichnet.

Definition 2.44 Sein M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine 2-stellige Relation.

(a) R ist *reflexiv* (oder: *selbstbezüglich*), falls $I_M \subseteq R$, d.h.

$$\forall a \in M \ \langle a, a\rangle \in R.$$

(b) R ist *symmetrisch*, falls $R^{\smile} \subseteq R$, d.h.

$$\forall a, b \in M(\langle b, a\rangle \in R \to \langle a, b\rangle \in R).$$

(c) R ist *transitiv*, falls $R\,; R \subseteq R$, d.h.

$$\forall a, b, c \in M \ (\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in R \to \langle a, c\rangle \in R).$$

Wenn man in natürlichen Sprachen zwischen *transitiven Verben* und *intransitiven Verben* unterscheidet, so meint man lediglich den Unterschied zwischen zwei- und ein*stelligen* Verben, d.h. ob man neben dem Subjekt noch ein Objekt braucht, um daraus einen Satz zu bilden. Die (extensionale) Bedeutung eines transitiven Verbs ist eine Relation, die eines intransitiven Verbs eine Menge – sonst haben „transitive“ Verben mit „transitiven“ Relationen nichts zu tun.

Es gibt aber einen Zusammenhang zwischen reflexiven Relationen und den *reflexiven Verben* einer natürlichen Sprache:

Beispiel 2.45 Betrachten wir die Bedeutung eines transitiven Verbs als eine zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ auf einem Bereich von Individuen, z.B. der Menge M der Menschen, so entspricht dem *reflexiven Gebrauch* des Verbs, wo als syntaktisches Objekt das Reflexivpronomen *sich* benutzt wird, die Relation

$$R \cap I_M = \{\, \langle m, m\rangle \mid m \in M \wedge \langle m, m\rangle \in R \,\} \ \subseteq I_M,$$

also eine *Teil*relation von I_M, der kleinsten reflexiven Relation auf M – wogegen eine reflexive Relation eine *Ober*relation von I_M ist. Die „echt“ *reflexiven Verben*, wie *sich schämen*, die *nur* den reflexiven Gebrauch erlauben, haben als Bedeutung eine Relation $R \subseteq I_M$.

Auf der Menge $M' := \{\, m \in M \mid \langle m, m\rangle \in R \,\}$ der Individuen, auf die der Reflexive Gebrauch des Verbs zutrifft, ist seine Bedeutung tatsächlich eine reflexive Relation, wegen $I_{M'} \subseteq R \cap I_M$.

Analog gibt es einen Zusammenhang zwischen symmetrischen Relationen und symmetrischen Verben. Offensichtlich gilt:

Proposition 2.46 Ist $R \subseteq A \times A$, so ist $R \cap R^{\smile}$ eine symmetrische Relation, der *symmetrische Kern von R*.

Beispiel 2.47 Die *symmetrischen* Verben und Nomen der natürlichen Sprache, z.B. die Verben *verwandt sein mit* und *heiraten* und die Nomen *Geschwister* und *Nachbar*, sind die, deren Bedeutung eine symmetrische Relation ist.

Ist V ein transitives Verb, etwa *lieben*, und $R = \{\, \langle a, b\rangle \mid a \textit{ liebt } b \,\} \subseteq M \times M$ seine Bedeutung auf dem Bereich M aller Personen. Dann entspricht dem daraus abgeleiteten Verb *einander lieben* der symmetrische Kern von R:

$$R \cap R^{\smile} = \{\, \langle a, b\rangle \mid a \textit{ und } b \textit{ lieben einander} \,\}.$$

Ebenso entspricht der aus der unsymmetrischen Relation

$$R = \{\, \langle a, b\rangle \mid a \textit{ ist Bruder von } b \,\}$$

(worin b auch eine Frau sein kann) gebildeten Relation *Brüder von einander* der symmetrische Kern von R:

$$\begin{aligned} R \cap R^{\smile} &= \{\, \langle a, b\rangle \mid (a \textit{ ist Bruder von } b) \wedge (b \textit{ ist Bruder von } a) \,\} \\ &= \{\, \langle a, b\rangle \mid a \textit{ und } b \textit{ sind Brüder von einander} \,\}. \end{aligned}$$

Durch das Reziprokpronomen *einander* drückt die Sprache also den Übergang von einer (irreflexiven) zweistelligen Relation zu ihrem symmetrischen Kern aus.

Lemma 2.48 Sei $\mathcal{R} \subseteq 2^{A \times A}$ eine Menge von Relationen.

(a) Wenn jedes $R \in \mathcal{R}$ reflexiv ist, so ist auch $\bigcap \mathcal{R}$ reflexiv.

(b) Wenn jedes $R \in \mathcal{R}$ symmetrisch ist, so ist auch $\bigcap \mathcal{R}$ symmetrisch.

(c) Wenn jedes $R \in \mathcal{R}$ transitiv ist, so ist auch $\bigcap \mathcal{R}$ transitiv.

Beweis: Für alle $a, b \in A$ ist

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle \in \bigcap \mathcal{R} &\iff \langle a, b\rangle \in \{\, x \mid \forall R \in \mathcal{R}\ x \in R \,\} \\ &\iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle a, b\rangle \in R. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

(a) Für jedes $a \in A$ ist

$$\langle a, a\rangle \in \bigcap \mathcal{R} \iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle a, a\rangle \in R.$$

(b) Für jedes $\langle a,b\rangle \in A \times A$ ist

$$\begin{aligned}
\langle a,b\rangle \in (\bigcap \mathcal{R})^{-1} &\iff \langle b,a\rangle \in (\bigcap \mathcal{R}) \\
&\iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle b,a\rangle \in R \\
&\iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle b,a\rangle \in R^{-1} \\
&\iff \forall R \in \mathcal{R}\ \langle a,b\rangle \in R \\
&\iff \langle a,b\rangle \in \bigcap \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

(c) Für alle $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in A \times A$ ist

$$\begin{aligned}
\langle a,b\rangle \in \bigcap \mathcal{R} \wedge \langle b,c\rangle \in \bigcap \mathcal{R} &\iff \forall R \in \mathcal{R}\langle a,b\rangle \in R\ \wedge\ \forall R' \in \mathcal{R}\langle b,c\rangle \in R' \\
&\implies \forall R \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in R) \\
&\implies \forall R \in \mathcal{R}\ \langle a,c\rangle \in R \\
&\iff \langle a,c\rangle \in \bigcap \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

□

Ähnlichkeit und Überdeckungen

Man nennt zwei Objekte a und b *einander ähnlich*, wenn sie bestimmte Eigenschaften gemeinsam haben. Manchmal gibt man folgende Definition:

Definition 2.49 Eine Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine *Ähnlichkeitsrelation* auf M, wenn R reflexiv und symmetrisch ist.

Beispiel 2.50 Sei $\mathcal{P} \subseteq 2^M$ eine Menge von Eigenschaften auf M. Die durch

$$R(a,b) :\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (P(a) \wedge P(b))$$

definierte Relation ist symmetrisch; wenn jedes Element von M mindestens eine der Eigenschaften aus $\mathcal{P}$ hat, so ist R auch reflexiv, also eine Ähnlichkeit.

Aus Lemma 2.48 folgt:

Korollar 2.51 Ist $\mathcal{R} \subseteq 2^{M\times M}$ eine Menge von Ähnlichkeitsrelationen auf M, so ist auch $\bigcap \mathcal{R}$ eine Ähnlichkeitsrelation auf M.

Definition 2.52 Eine *Überdeckung* der Menge M ist eine Menge $\mathcal{P} \subseteq 2^M$ von nicht-leeren Teilmengen von M mit $M = \bigcup \mathcal{P}$, d.h.

(a) jedes $P \in \mathcal{P}$ enthält ein $m \in M$,

(b) jedes $m \in M$ liegt in einem $P \in \mathcal{P}$.

Lemma 2.53 (a) Ist $\mathcal{P}$ eine Überdeckung von M, so ist die durch

$$a \sim_{\mathcal{P}} b :\iff \exists P \in \mathcal{P}\,(a \in P \wedge b \in P)$$

definierte Relation eine Ähnlichkeitsrelation auf M.

(b) Ist $\sim$ eine Ähnlichkeitsrelation auf M, so ist

$$\mathcal{P}_{\sim} := \{\, [a]_{\sim} \mid a \in M \,\}, \quad \text{mit } [a]_{\sim} := \{\, b \mid a \sim b \,\},$$

eine Überdeckung von M.

Beweis:

(a) $\sim_{\mathcal{P}}$ ist symmetrisch: die Bedingung für $a \sim_{\mathcal{P}} b$ hängt nicht von der Reihenfolge von a und b ab.

$\sim_{\mathcal{P}}$ ist reflexiv: da jedes $a \in M$ in einem $P \in \mathcal{P}$ liegt, gilt $a \sim_{\mathcal{P}} a$.

(b) Da $\sim$ reflexiv ist, gilt für jedes $a \in M$: $a \sim a$, also $a \in [a]_{\sim}$. Damit erfüllt $\mathcal{P}_{\sim} = \{\, [a]_{\sim} \mid a \in M \,\}$ die Eigenschaften einer Überdeckung.

□

Beachte, daß für jede Ähnlichkeitsrelation $\sim$ auf A gilt:

$$a \sim b \Rightarrow \{a, b\} \subseteq [a]_{\sim} \Rightarrow a \sim_{(\mathcal{P}_{\sim})} b.$$

Also ist $[a]_{\sim} \subseteq [a]_{\sim_{(\mathcal{P}_{\sim})}}$.

Beachte, daß Ähnlichkeit im intuitiven Sinn nicht transitiv ist: wenn a und b gemeinsame Eigenschaften haben, und b und c ebenfalls, so brauchen a und c keine gemeinsamen Eigenschaften zu haben.

Äquivalenz und Zerlegungen

Definition 2.54 R ist eine *partielle Äquivalenzrelation*, falls R transitiv und symmetrisch ist, und eine *Äquivalenzrelation*, falls R auch reflexiv ist.

Beispiel 2.55 Sei $E \subseteq M$ eine Eigenschaft und $\mathcal{E} \subseteq 2^M$ eine Menge von Eigenschaften.

(a) Die durch

$$R(a, b) :\iff E(a) \wedge E(b)$$

definierte Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine partielle Äquivalenzrelation. Sie ist nur dann eine Äquivalenzrelation, wenn $E = M$ ist.

(b) Die durch
$$R(a,b) :\iff E(a) \leftrightarrow E(b)$$
definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

(c) Die durch
$$R(a,b) :\iff \forall P \in \mathcal{E}(P(a) \leftrightarrow P(b))$$
definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 2.56 Sei $f : A \hookrightarrow B$ eine partielle Funktion. Dann ist

$$a_1 \simeq_f a_2 :\iff \exists b \in B(\langle a_1, b\rangle \in f \wedge \langle a_2, b\rangle \in f)$$

eine partielle Äquivalenzrelation auf A.

Die Relation $\simeq_f$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn f eine totale Funktion ist. Daher kommt auch der Name: a und b sind *äquivalent*, d.h. *gleichwertig*, wenn ihre *Werte* $f(a)$ und $f(b)$ gleich sind, d.h. wenn $f(a) = f(b)$.

Aus Lemma 2.48 folgt:

Korollar 2.57 Ist $\mathcal{R} \subseteq 2^{A\times A}$ eine Menge von Äquivalenzrelationen auf A, so ist auch $\bigcap \mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation.

Definition 2.58 Eine *Zerlegung* (auch: *Klasseneinteilung, Partition*) der Menge M ist eine Menge $\mathcal{P} \subseteq 2^M$ von Teilmengen von M mit

(a) jedes $P \in \mathcal{P}$ enthält ein $m \in M$,

(b) jedes $m \in M$ liegt in einem $P \in \mathcal{P}$,

(c) je zwei verschiedene $P, P' \in \mathcal{P}$ sind disjunkt.

Definition 2.59 Sei R eine Äquivalenzrelation auf M. Zu jedem $a \in M$ sei

$$[a]_R := \{\, b \in M \mid \langle a, b\rangle \in R \,\}$$

die *Äquivalenzklasse von* a und

$$M/R := \{\, [a]_R \mid a \in M \,\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen.

Lemma 2.60 Sei A eine Menge.

(a) Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation, so ist A/R eine Zerlegung von A.

(b) Ist $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von A, so ist die durch

$$a \simeq_{\mathcal{P}} a' :\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (a \in P \wedge a' \in P)$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf A.

Beweis:

(a) Wir zeigen für A/R die Eigenschaften einer Partition.

(i) Da R reflexiv ist, ist $a \in [a]_R$, und daher ist jede Menge $[a]_R$ nicht leer und jedes $a \in M$ liegt in einer Menge aus A/R.

(ii) Zwei verschiedene Mengen aus A/R sind disjunkt: Sind $[a]_R$ und $[a']_R$ nicht disjunkt, so gibt es ein $b \in [a]_R \cap [a']_R$, also $\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle a', b\rangle \in R$. Da R symmetrisch und transitiv ist, folgen $\langle a, a'\rangle \in R$ und $\langle a', a\rangle \in R$, und weiter für jedes $c \in M$:

$$\begin{aligned} c \in [a]_R &\iff \langle a, c\rangle \in R \\ &\iff \langle a, c\rangle \in R \wedge \langle a', a\rangle \in R \\ &\iff \langle a', c\rangle \in R \wedge \langle a, a'\rangle \in R \\ &\iff c \in [a']_R. \end{aligned}$$

Also ist $[a]_R = [a']_R$.

(b) $\simeq_{\mathcal{P}}$ ist reflexiv: da $\mathcal{P}$ eine Partition ist, gilt

$$\begin{aligned} a \in A &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ a \in P \\ &\iff a \simeq_{\mathcal{P}} a. \end{aligned}$$

$\simeq_{\mathcal{P}}$ ist symmetrisch:

$$\begin{aligned} a \simeq_{\mathcal{P}} a' &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (P(a) \wedge P(a')) \\ &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (P(a') \wedge P(a)) \\ &\iff a' \simeq_{\mathcal{P}} a. \end{aligned}$$

$\simeq_{\mathcal{P}}$ ist transitiv: da je zwei nicht disjunkte Mengen aus $\mathcal{P}$ gleich sind, ist

$$\begin{aligned} a \simeq_{\mathcal{P}} a' \wedge a' \simeq_{\mathcal{P}} a'' &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (P(a) \wedge P(a'))\ \wedge \\ &\qquad \exists P' \in \mathcal{P}\ (P'(a') \wedge P'(a'')) \\ &\iff \exists P \in \mathcal{P}\ (P(a) \wedge P(a') \wedge P(a'')) \\ &\implies a \simeq_{\mathcal{P}} a''. \end{aligned}$$

Beachte, daß bei (b) $A/\simeq_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ ist. $\square$

Beispiel 2.61 Für eine Relation $R \subseteq A \times A$ kann A/R auch dann eine Zerlegung von A sein, wenn R weder reflexiv, noch transitiv, noch symmetrisch ist. Betrachte $A = \mathbb{Z}$ und $aR\,b :\iff a{+}1 = b$. Dann ist $[a]_R = \{a{+}1\}$ und offenbar A/R eine Zerlegung von A, aber R ist nicht reflexiv, transitiv oder symmetrisch.

Beispiel 2.62 Ist $f : A \to B$ und R die Äquivalenzrelation $\simeq_f$, so ist

$$[a]_{\simeq_f} = \{\, a' \in A \mid f(a') = f(a) \,\}$$

die Menge aller Elemente von A, die denselben f-Wert wie a haben, eben $f(a)$.

Tatsächlich ist *jede* Äquivalenzrelation eine Relation $\simeq_f$ wie im vorigen Beispiel:

Lemma 2.63 Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$. Dann sind äquivalent:

(a) R ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Es gibt eine Menge B und eine Funktion $f : A \to B$, so daß $R = \simeq_f$ ist.

Beweis: (b) $\Rightarrow$ (a): Das ist klar, da $\simeq_f$ eine Äquivalenzrelation ist. (a) $\Rightarrow$ (b): Wähle $B := A/R$ und setze $f(a) := [a]_R$. Offensichtlich ist $f : A \to B$ eine totale Funktion. Wir haben

$$\begin{aligned} a \simeq_f a' \quad &\iff \quad f(a) = f(a') \\ &\iff \quad [a]_R = [a']_R. \end{aligned}$$

Da R eine Äquivalenzrelation ist, ist aber

$$[a]_R = [a']_R \quad \iff \quad R(a, a'),$$

wie man leicht nachrechnet. $\square$