

### 2.3 Äquivalenz und Ähnlichkeit

Die *Identitätsrelation auf  $M$*  wird mit  $I_M := \{ \langle m, m \rangle \mid m \in M \}$  bezeichnet.

**Definition 2.44** Seien  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine 2-stellige Relation.

(a)  $R$  ist *reflexiv* (oder: *selbstbezüglich*), falls  $I_M \subseteq R$ , d.h.

$$\forall a \in M \langle a, a \rangle \in R.$$

(b)  $R$  ist *symmetrisch*, falls  $R^\vee \subseteq R$ , d.h.

$$\forall a, b \in M (\langle b, a \rangle \in R \rightarrow \langle a, b \rangle \in R).$$

(c)  $R$  ist *transitiv*, falls  $R; R \subseteq R$ , d.h.

$$\forall a, b, c \in M (\langle a, b \rangle \in R \wedge \langle b, c \rangle \in R \rightarrow \langle a, c \rangle \in R).$$

Wenn man in natürlichen Sprachen zwischen *transitiven Verben* und *intransitiven Verben* unterscheidet, so meint man lediglich den Unterschied zwischen zwei- und *einstelligen* Verben, d.h. ob man neben dem Subjekt noch ein Objekt braucht, um daraus einen Satz zu bilden. Die (extensionale) Bedeutung eines transitiven Verbs ist eine Relation, die eines intransitiven Verbs eine Menge – sonst haben „transitive“ Verben mit „transitiven“ Relationen nichts zu tun.

Es gibt aber einen Zusammenhang zwischen reflexiven Relationen und den *reflexiven Verben* einer natürlichen Sprache:

**Beispiel 2.45** Betrachten wir die Bedeutung eines transitiven Verbs als eine zweistellige Relation  $R \subseteq M \times M$  auf einem Bereich von Individuen, z.B. der Menge  $M$  der Menschen, so entspricht dem *reflexiven Gebrauch* des Verbs, wo als syntaktisches Objekt das Reflexivpronomen *sich* benutzt wird, die Relation

$$R \cap I_M = \{ \langle m, m \rangle \mid m \in M \wedge \langle m, m \rangle \in R \} \subseteq I_M,$$

also eine *Teilrelation* von  $I_M$ , der kleinsten reflexiven Relation auf  $M$  – wegen eine reflexive Relation eine *Oberrelation* von  $I_M$  ist. Die „echt“ *reflexiven Verben*, wie *sich schämen*, die *nur* den reflexiven Gebrauch erlauben, haben als Bedeutung eine Relation  $R \subseteq I_M$ .

Auf der Menge  $M' := \{ m \in M \mid \langle m, m \rangle \in R \}$  der Individuen, auf die der Reflexive Gebrauch des Verbs zutrifft, ist seine Bedeutung tatsächlich eine reflexive Relation, wegen  $I_{M'} \subseteq R \cap I_M$ .

Analog gibt es einen Zusammenhang zwischen symmetrischen Relationen und symmetrischen Verben. Offensichtlich gilt:

**Proposition 2.46** Ist  $R \subseteq A \times A$ , so ist  $R \cap R^\smile$  eine symmetrische Relation, der *symmetrische Kern* von  $R$ .

**Beispiel 2.47** Die *symmetrischen* Verben und Nomen der natürlichen Sprache, z.B. die Verben *verwandt sein mit* und *heiraten* und die Nomen *Geschwister* und *Nachbar*, sind die, deren Bedeutung eine symmetrische Relation ist.

Ist  $V$  ein transitives Verb, etwa *lieben*, und  $R = \{ \langle a, b \rangle \mid a \text{ liebt } b \} \subseteq M \times M$  seine Bedeutung auf dem Bereich  $M$  aller Personen. Dann entspricht dem daraus abgeleiteten Verb *einander lieben* der symmetrische Kern von  $R$ :

$$R \cap R^\smile = \{ \langle a, b \rangle \mid a \text{ und } b \text{ lieben einander} \}.$$

Ebenso entspricht der aus der unsymmetrischen Relation

$$R = \{ \langle a, b \rangle \mid a \text{ ist Bruder von } b \}$$

(worin  $b$  auch eine Frau sein kann) gebildeten Relation *Brüder von einander* der symmetrische Kern von  $R$ :

$$\begin{aligned} R \cap R^\smile &= \{ \langle a, b \rangle \mid (a \text{ ist Bruder von } b) \wedge (b \text{ ist Bruder von } a) \} \\ &= \{ \langle a, b \rangle \mid a \text{ und } b \text{ sind Brüder von einander} \}. \end{aligned}$$

Durch das Reziprokpronomen *einander* drückt die Sprache also den Übergang von einer (irreflexiven) zweistelligen Relation zu ihrem symmetrischen Kern aus.

**Lemma 2.48** Sei  $\mathcal{R} \subseteq 2^{A \times A}$  eine Menge von Relationen.

- (a) Wenn jedes  $R \in \mathcal{R}$  reflexiv ist, so ist auch  $\bigcap \mathcal{R}$  reflexiv.
- (b) Wenn jedes  $R \in \mathcal{R}$  symmetrisch ist, so ist auch  $\bigcap \mathcal{R}$  symmetrisch.
- (c) Wenn jedes  $R \in \mathcal{R}$  transitiv ist, so ist auch  $\bigcap \mathcal{R}$  transitiv.

**Beweis:** Für alle  $a, b \in A$  ist

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \in \bigcap \mathcal{R} &\iff \langle a, b \rangle \in \{ x \mid \forall R \in \mathcal{R} x \in R \} \\ &\iff \forall R \in \mathcal{R} \langle a, b \rangle \in R. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

- (a) Für jedes  $a \in A$  ist

$$\langle a, a \rangle \in \bigcap \mathcal{R} \iff \forall R \in \mathcal{R} \langle a, a \rangle \in R.$$

(b) Für jedes  $\langle a, b \rangle \in A \times A$  ist

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \in \left(\bigcap \mathcal{R}\right)^{-1} &\iff \langle b, a \rangle \in \left(\bigcap \mathcal{R}\right) \\ &\iff \forall R \in \mathcal{R} \langle b, a \rangle \in R \\ &\iff \forall R \in \mathcal{R} \langle b, a \rangle \in R^{-1} \\ &\iff \forall R \in \mathcal{R} \langle a, b \rangle \in R \\ &\iff \langle a, b \rangle \in \bigcap \mathcal{R}. \end{aligned}$$

(c) Für alle  $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \in A \times A$  ist

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \in \bigcap \mathcal{R} \wedge \langle b, c \rangle \in \bigcap \mathcal{R} &\iff \forall R \in \mathcal{R} \langle a, b \rangle \in R \wedge \forall R' \in \mathcal{R} \langle b, c \rangle \in R' \\ &\implies \forall R \in \mathcal{R} (\langle a, b \rangle \in R \wedge \langle b, c \rangle \in R) \\ &\implies \forall R \in \mathcal{R} \langle a, c \rangle \in R \\ &\iff \langle a, c \rangle \in \bigcap \mathcal{R}. \end{aligned}$$

□

### Ähnlichkeit und Überdeckungen

Man nennt zwei Objekte  $a$  und  $b$  *einander ähnlich*, wenn sie bestimmte Eigenschaften gemeinsam haben. Manchmal gibt man folgende Definition:

**Definition 2.49** Eine Relation  $R \subseteq M \times M$  ist eine *Ähnlichkeitsrelation* auf  $M$ , wenn  $R$  reflexiv und symmetrisch ist.

**Beispiel 2.50** Sei  $\mathcal{P} \subseteq 2^M$  eine Menge von Eigenschaften auf  $M$ . Die durch

$$R(a, b) : \iff \exists P \in \mathcal{P} (P(a) \wedge P(b))$$

definierte Relation ist symmetrisch; wenn jedes Element von  $M$  mindestens eine der Eigenschaften aus  $\mathcal{P}$  hat, so ist  $R$  auch reflexiv, also eine Ähnlichkeit.

Aus Lemma 2.48 folgt:

**Korollar 2.51** Ist  $\mathcal{R} \subseteq 2^{M \times M}$  eine Menge von Ähnlichkeitsrelationen auf  $M$ , so ist auch  $\bigcap \mathcal{R}$  eine Ähnlichkeitsrelation auf  $M$ .

**Definition 2.52** Eine *Überdeckung* der Menge  $M$  ist eine Menge  $\mathcal{P} \subseteq 2^M$  von nicht-leeren Teilmengen von  $M$  mit  $M = \bigcup \mathcal{P}$ , d.h.

(a) jedes  $P \in \mathcal{P}$  enthält ein  $m \in M$ ,

(b) jedes  $m \in M$  liegt in einem  $P \in \mathcal{P}$ .

**Lemma 2.53** (a) Ist  $\mathcal{P}$  eine Überdeckung von  $M$ , so ist die durch

$$a \sim_{\mathcal{P}} b : \iff \exists P \in \mathcal{P} (a \in P \wedge b \in P)$$

definierte Relation eine Ähnlichkeitsrelation auf  $M$ .

(b) Ist  $\sim$  eine Ähnlichkeitsrelation auf  $M$ , so ist

$$\mathcal{P}_{\sim} := \{ [a]_{\sim} \mid a \in M \}, \quad \text{mit } [a]_{\sim} := \{ b \mid a \sim b \},$$

eine Überdeckung von  $M$ .

**Beweis:**

(a)  $\sim_{\mathcal{P}}$  ist symmetrisch: die Bedingung für  $a \sim_{\mathcal{P}} b$  hängt nicht von der Reihenfolge von  $a$  und  $b$  ab.

$\sim_{\mathcal{P}}$  ist reflexiv: da jedes  $a \in M$  in einem  $P \in \mathcal{P}$  liegt, gilt  $a \sim_{\mathcal{P}} a$ .

(b) Da  $\sim$  reflexiv ist, gilt für jedes  $a \in M$ :  $a \sim a$ , also  $a \in [a]_{\sim}$ . Damit erfüllt  $\mathcal{P}_{\sim} = \{ [a]_{\sim} \mid a \in M \}$  die Eigenschaften einer Überdeckung.

□

Beachte, daß für jede Ähnlichkeitsrelation  $\sim$  auf  $A$  gilt:

$$a \sim b \Rightarrow \{a, b\} \subseteq [a]_{\sim} \Rightarrow a \sim_{(\mathcal{P}_{\sim})} b.$$

Also ist  $[a]_{\sim} \subseteq [a]_{\sim_{(\mathcal{P}_{\sim})}}$ .

Beachte, daß Ähnlichkeit im intuitiven Sinn nicht transitiv ist: wenn  $a$  und  $b$  gemeinsame Eigenschaften haben, und  $b$  und  $c$  ebenfalls, so brauchen  $a$  und  $c$  keine gemeinsamen Eigenschaften zu haben.

## Äquivalenz und Zerlegungen

**Definition 2.54**  $R$  ist eine *partielle Äquivalenzrelation*, falls  $R$  transitiv und symmetrisch ist, und eine *Äquivalenzrelation*, falls  $R$  auch reflexiv ist.

**Beispiel 2.55** Sei  $E \subseteq M$  eine Eigenschaft und  $\mathcal{E} \subseteq 2^M$  eine Menge von Eigenschaften.

(a) Die durch

$$R(a, b) : \iff E(a) \wedge E(b)$$

definierte Relation  $R \subseteq M \times M$  ist eine partielle Äquivalenzrelation. Sie ist nur dann eine Äquivalenzrelation, wenn  $E = M$  ist.

(b) Die durch

$$R(a, b) : \iff E(a) \leftrightarrow E(b)$$

definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

(c) Die durch

$$R(a, b) : \iff \forall P \in \mathcal{E}(P(a) \leftrightarrow P(b))$$

definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

**Beispiel 2.56** Sei  $f : A \leftrightarrow B$  eine partielle Funktion. Dann ist

$$a_1 \simeq_f a_2 : \iff \exists b \in B (\langle a_1, b \rangle \in f \wedge \langle a_2, b \rangle \in f)$$

eine partielle Äquivalenzrelation auf  $A$ .

Die Relation  $\simeq_f$  ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn  $f$  eine totale Funktion ist. Daher kommt auch der Name:  $a$  und  $b$  sind *äquivalent*, d.h. *gleichwertig*, wenn ihre Werte  $f(a)$  und  $f(b)$  gleich sind, d.h. wenn  $f(a) = f(b)$ .

Aus Lemma 2.48 folgt:

**Korollar 2.57** Ist  $\mathcal{R} \subseteq 2^{A \times A}$  eine Menge von Äquivalenzrelationen auf  $A$ , so ist auch  $\bigcap \mathcal{R}$  eine Äquivalenzrelation.

**Definition 2.58** Eine *Zerlegung* (auch: *Klasseneinteilung*, *Partition*) der Menge  $M$  ist eine Menge  $\mathcal{P} \subseteq 2^M$  von Teilmengen von  $M$  mit

- (a) jedes  $P \in \mathcal{P}$  enthält ein  $m \in M$ ,
- (b) jedes  $m \in M$  liegt in einem  $P \in \mathcal{P}$ ,
- (c) je zwei verschiedene  $P, P' \in \mathcal{P}$  sind disjunkt.

**Definition 2.59** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$ . Zu jedem  $a \in M$  sei

$$[a]_R := \{ b \in M \mid \langle a, b \rangle \in R \}$$

die *Äquivalenzklasse* von  $a$  und

$$M/R := \{ [a]_R \mid a \in M \}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen.

**Lemma 2.60** Sei  $A$  eine Menge.

- (a) Ist  $R \subseteq A \times A$  eine Äquivalenzrelation, so ist  $A/R$  eine Zerlegung von  $A$ .

(b) Ist  $\mathcal{P}$  eine Zerlegung von  $A$ , so ist die durch

$$a \simeq_{\mathcal{P}} a' : \iff \exists P \in \mathcal{P} (a \in P \wedge a' \in P)$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf  $A$ .

**Beweis:**

(a) Wir zeigen für  $A/R$  die Eigenschaften einer Partition.

(i) Da  $R$  reflexiv ist, ist  $a \in [a]_R$ , und daher ist jede Menge  $[a]_R$  nicht leer und jedes  $a \in M$  liegt in einer Menge aus  $A/R$ .

(ii) Zwei verschiedene Mengen aus  $A/R$  sind disjunkt: Sind  $[a]_R$  und  $[a']_R$  nicht disjunkt, so gibt es ein  $b \in [a]_R \cap [a']_R$ , also  $\langle a, b \rangle \in R \wedge \langle a', b \rangle \in R$ . Da  $R$  symmetrisch und transitiv ist, folgen  $\langle a, a' \rangle \in R$  und  $\langle a', a \rangle \in R$ , und weiter für jedes  $c \in M$ :

$$\begin{aligned} c \in [a]_R &\iff \langle a, c \rangle \in R \\ &\iff \langle a, c \rangle \in R \wedge \langle a', a \rangle \in R \\ &\iff \langle a', c \rangle \in R \wedge \langle a, a' \rangle \in R \\ &\iff c \in [a']_R. \end{aligned}$$

Also ist  $[a]_R = [a']_R$ .

(b)  $\simeq_{\mathcal{P}}$  ist reflexiv: da  $\mathcal{P}$  eine Partition ist, gilt

$$\begin{aligned} a \in A &\iff \exists P \in \mathcal{P} a \in P \\ &\iff a \simeq_{\mathcal{P}} a. \end{aligned}$$

$\simeq_{\mathcal{P}}$  ist symmetrisch:

$$\begin{aligned} a \simeq_{\mathcal{P}} a' &\iff \exists P \in \mathcal{P} (P(a) \wedge P(a')) \\ &\iff \exists P \in \mathcal{P} (P(a') \wedge P(a)) \\ &\iff a' \simeq_{\mathcal{P}} a. \end{aligned}$$

$\simeq_{\mathcal{P}}$  ist transitiv: da je zwei nicht disjunkte Mengen aus  $\mathcal{P}$  gleich sind, ist

$$\begin{aligned} a \simeq_{\mathcal{P}} a' \wedge a' \simeq_{\mathcal{P}} a'' &\iff \exists P \in \mathcal{P} (P(a) \wedge P(a')) \wedge \\ &\quad \exists P' \in \mathcal{P} (P'(a') \wedge P'(a'')) \\ &\iff \exists P \in \mathcal{P} (P(a) \wedge P(a') \wedge P(a'')) \\ &\implies a \simeq_{\mathcal{P}} a''. \end{aligned}$$

Beachte, daß bei (b)  $A/\simeq_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$  ist.

□

**Beispiel 2.61** Für eine Relation  $R \subseteq A \times A$  kann  $A/R$  auch dann eine Zerlegung von  $A$  sein, wenn  $R$  weder reflexiv, noch transitiv, noch symmetrisch ist. Betrachte  $A = \mathbb{Z}$  und  $aRb : \iff a+1 = b$ . Dann ist  $[a]_R = \{a+1\}$  und offenbar  $A/R$  eine Zerlegung von  $A$ , aber  $R$  ist nicht reflexiv, transitiv oder symmetrisch.

**Beispiel 2.62** Ist  $f : A \rightarrow B$  und  $R$  die Äquivalenzrelation  $\simeq_f$ , so ist

$$[a]_{\simeq_f} = \{ a' \in A \mid f(a') = f(a) \}$$

die Menge aller Elemente von  $A$ , die denselben  $f$ -Wert wie  $a$  haben, eben  $f(a)$ .

Tatsächlich ist *jede* Äquivalenzrelation eine Relation  $\simeq_f$  wie im vorigen Beispiel:

**Lemma 2.63** Sei  $A$  eine Menge und  $R \subseteq A \times A$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $R$  ist eine Äquivalenzrelation.
- (b) Es gibt eine Menge  $B$  und eine Funktion  $f : A \rightarrow B$ , so daß  $R = \simeq_f$  ist.

**Beweis:** (b)  $\Rightarrow$  (a): Das ist klar, da  $\simeq_f$  eine Äquivalenzrelation ist. (a)  $\Rightarrow$  (b): Wähle  $B := A/R$  und setze  $f(a) := [a]_R$ . Offensichtlich ist  $f : A \rightarrow B$  eine totale Funktion. Wir haben

$$\begin{aligned} a \simeq_f a' &\iff f(a) = f(a') \\ &\iff [a]_R = [a']_R. \end{aligned}$$

Da  $R$  eine Äquivalenzrelation ist, ist aber

$$[a]_R = [a']_R \iff R(a, a'),$$

wie man leicht nachrechnet. □