3 Relationenalgebra und Peirce'sche Algebra

Wenn man Adjektive und intransitive Verben durch *Eigenschaften*, also einstellige Relationen von Objekten interpretieren will, ist es natürlich, transitive Verben und gewisse prädikative Nomen (wie „Bruder“) durch zwei- oder mehrstellige Relationen zu interpretieren.

Daher ist es auch interessant, ob sich mit Relationen in ähnlicher Weise wie mit Mengen rechnen läßt, und was gegebenenfalls grundlegend neue Operationen sind, die man bei Mengen nicht hat. Das wurde im 19. Jahrhundert von A. de Morgan, C.S.Peirce, E. Schröder untersucht und spielt heute eine Rolle bei der Interpretation von Programmiersprachen, Wissensrepräsentationssprachen und auch natürlichen Sprachen.

Wie in der Boole'schen Algebra geht es darum, die extensionale Betrachtungsweise der Mengenlehre durch eine algebraische Betrachtungsweise zu ersetzen, bei der die Relationen nicht durch ihre Elemente gegeben sein müssen. Statt mit den Elementen soll mit den Eigenschaften der Relationen und ihren Beziehungen zu einander gerechnet werden. Bei der Interpretation z.B. von Verben ist eine extensionale Repräsentation im Computer eher ungeeignet, es sei denn, der Objektbereich ist ziemlich klein.

3.1 Relationenalgebra

Definition 3.1 (Tarski 1955) Eine *Relationenalgebra* $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, \overline{}, 0, 1, ;, \breve{}, I)$ besteht aus einer Menge R von „Relationen“ und Operationen $;\ : R \times R \to R$, $\breve{} : R \to R$ und $I \in R$, sodaß gilt:

(a) $(R, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$ ist eine Boole'sche Algebra, und

(b) für alle $r, s, t \in R$ gelten folgende Gleichungen:

  (a) $r ; (s ; t) = (r ; s) ; t$
  (b) $r ; I = r = I ; r$
  (c) $r^{\smile\smile} = r$
  (d) $(r + s) ; t = (r ; t) + (s ; t)$
  (e) $(r + s)^{\smile} = r^{\smile} + s^{\smile}$
  (f) $(r ; s)^{\smile} = s^{\smile} ; r^{\smile}$
  (g) $r^{\smile} ; \overline{(r ; s)} \leq \overline{s}$,

  wobei die Ungleichungsrelation der letzten Bedingung die durch

$$r \leq s :\Longleftrightarrow r + s = s$$

  definierte partielle Ordnung auf R meint.

Hierbei heißen $r^{\smile}$ die *Inverse* von r, $(r\,;s)$ das *relative Produkt*[2] von r und s, und I die *Identität*. Die *relative Summe* $r \dagger s$ von r und s definiert man durch

$$r \dagger s \;:=\; \overline{\overline{r}\,;\overline{s}}$$

dual aus dem relativen Produkt.

Beispiel 3.2 Die *volle Relationenalgebra über der Menge* V ist

$$\mathcal{R}(V) := (2^{V\times V}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, 1, \,;\,, {}^{\smile}, I)$$

mit den Operationen

$$\begin{array}{rcl} 1 & := & V \times V, \\ \overline{r} & := & \{\, \langle a,b\rangle \in V \times V \mid \langle a,b\rangle \notin r \,\}, \\ r\,;s & := & \{\, \langle a,c\rangle \mid \exists b \in V\ (\langle a,b\rangle \in r \wedge \langle b,c\rangle \in s)\,\}, \\ r^{\smile} & := & \{\, \langle a,b\rangle \mid \langle b,a\rangle \in r \,\}, \\ I & := & \{\, \langle a,a\rangle \mid a \in V \,\}. \end{array}$$

Beachte, daß die relative Summe durch

$$\begin{array}{rcl} r \dagger s & := & \{\, \langle a,c\rangle \mid \neg\exists b \in V\ (\langle a,b\rangle \in \overline{r} \wedge \langle b,c\rangle \in \overline{s})\,\}, \\ & = & \{\, \langle a,c\rangle \mid \forall b \in V\ (\langle a,b\rangle \in r \vee \langle b,c\rangle \in s)\,\}, \end{array}$$

interpretiert wird. Man rechne nach, daß die Axiome bei dieser Interpretation gelten. Die letzte Ungleichung erhält man durch

$$\begin{array}{rcl} a(r^{\smile};\overline{(r\,;s)})b & \Rightarrow & \exists c(a\,r^{\smile} c \wedge c\overline{(r\,;s)}b) \\ & \Rightarrow & \exists c(c\,r\,a \wedge c(\overline{r} \dagger \overline{s})b) \\ & \Rightarrow & \exists c(c\,r\,a \wedge \forall d(c\,\overline{r}\,d \vee d\,\overline{s}\,b)) \\ & \Rightarrow & \exists c(c\,r\,a \wedge a\,\overline{s}\,b) \\ & \Rightarrow & a\,\overline{s}\,b. \end{array}$$

Wählt man $r = 0 = s$, so erhält man $r^{\smile};\overline{(r\,;s)} = 0\,;\overline{(0\,;s)} = 0 \neq 1 = \overline{0}$. Also kann die Ungleichung nicht zu einer Gleichung verstärkt werden.

Beispiel 3.3 Transitive Verben lassen sich durch zweistellige Relationen zwischen Objekten, also durch Elemente von $\mathcal{R}(V)$ interpretieren, oder allgememeiner durch Elemente einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$.

(a) Partikel zur Verbbildung und -Koordination werden durch die Boole'schen Operationen von $\mathcal{R}$ interpretiert: für A = *achtet*, B = *billigt* ist

[2] Es wird oft das *Relationenprodukt* genannt und $r \circ s$ geschrieben. Diese Schreibweise kollidiert mit der Schreibweise $f \circ g$ bei Funktionen f und g, wo man $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ meint; aber $(f \circ g)(x) = z$ ist dann *nicht* dasselbe wie $x(f \circ g)z$, d.h. $\exists y((x,y) \in f \wedge (y,z) \in g)$.

mißachtet $= \overline{A}$, *achtet oder billigt* $= A + B$, *achtet und billigt* $= A \cdot B$

Aussagen mit den so zusammengesetzten Verben können auf Aussagen mit einfachen Verben zurückgeführt werden:

$$\begin{array}{rcc} x \textit{ mißachtet } y & \mapsto & (x \textit{ achtet } y) \textit{ nicht} \\ x \textit{ achtet oder billigt } y & \mapsto & (x \textit{ achtet } y) \textit{ oder } (x \textit{ billigt } y) \\ x \textit{ achtet und billigt } y & \mapsto & (x \textit{ achtet } y) \textit{ und } (x \textit{ billigt } y). \end{array}$$

Das entspricht einem Homomorphismus in die Boole'sche Algebra $\mathbb{B}$:

$$\begin{array}{rcc} x\,\overline{A}^{\mathcal{R}}\,y & = & \overline{x\,A\,y}^{\mathbb{B}} \\ x\,(A +^{\mathcal{R}} B)\,y & = & (x\,A\,y) +^{\mathbb{B}} (x\,B\,y) \\ x\,(A \cdot^{\mathcal{R}} B)\,y & = & (x\,A\,y) \cdot^{\mathbb{B}} (x\,B\,y). \end{array}$$

(b) Die Passivbildung von transitiven Verben wird durch die Inversenbildung $\breve{}$ von $\mathcal{R}$ interpretiert: für $A =$ *achtet* ist $A^{\smile} =$ *wird geachtet von*:

$$\begin{array}{lcl} x \textit{ achtet } y & = & x\,A\,y \\ y \textit{ wird geachtet von } x & = & y\,A^{\smile}x \end{array}$$

(c) Relativierte, existentiell quantifizierte Objekte werden durch das relative Produkt ; von $\mathcal{R}$ interpretiert:

$$\begin{array}{lcl} x \textit{ achtet einen, der } y \textit{ billigt} & = & x\,(A;B)\,y \\ x \textit{ achtet einen, den } y \textit{ billigt} & = & x\,(A;B^{\smile})\,y \end{array}$$

Relativierte, universell quantifizierte Objekte werden durch die relative Summe $\dagger$ von $\mathcal{R}$ interpretiert:

$$\begin{array}{lcl} x \textit{ achtet jeden, der } y \textit{ billigt} & = & x\,(A\,;\overline{B})\,y \\ x \textit{ achtet jeden, den } y \textit{ billigt} & = & x\,(A\,;\overline{B}^{\smile})\,y \end{array}$$

(d) Die Bildung von Verbalphrasen aus einem transitiven Verb und einem Relationsnomen kann ebenso durch das relative Produkt und die relative Summe interpretiert werden, z.B. für $K =$ *kennt*, $B =$ *ist Bruder von*:

$$\begin{array}{lcl} \textit{kennt einen Bruder von} & = & K\,;B = \{\, \langle a,c\rangle \mid \exists b(a\,K\,b \wedge b\,B\,c)\,\}, \\ \textit{kennt keinen Bruder von} & = & \overline{K\,;B} = \overline{K} \dagger \overline{B}, \\ \textit{kennt alle Brüder von} & = & K \dagger \overline{B} = \{\, \langle a,c\rangle \mid \forall b(b\,B\,c \to a\,K\,b)\,\}, \\ \textit{kennt nicht alle Brüder von} & = & \overline{K \dagger \overline{B}} = \overline{K}\,;B, \\ \textit{kennt nur Brüder von} & = & \overline{K} \dagger B = \{\, \langle a,c\rangle \mid \forall b(a\,K\,b \to b\,B\,c)\,\}, \\ \textit{kennt nicht nur Brüder von} & = & \overline{\overline{K} \dagger B} = K\,;\overline{B}, \end{array}$$

(e) Schließlich kann man auch die Bildung zusammengesetzter Relationsnomen durch das relative Produkt und die relative Summe interpretieren: z.B. für $B =$ *Bruder*, $T =$ *Tochter* und $G =$ *Grund*, $K =$ *Klage über*

$$\begin{array}{lcl} \textit{Tochter eines Bruders von} & = & T\,;B \\ \textit{Grund aller Klagen über} & = & G \dagger \overline{K} \end{array}$$

Bekannte Eigenschaften zweistelliger Relationen lassen sich verallgemeinern:

Definition 3.4 Sei r ein Element einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$.

(a) r heißt *reflexiv*, falls $I \leq r$.

(b) r heißt *transitiv*, falls $r\,;r \leq r$.

(c) r heißt *symmetrisch*, falls $r^{\smile} \leq r$.

(d) r ist eine (partielle) *Äquivalenz*, falls r transitiv und symmetrisch ist.

Falls r symmetrisch ist, so ist nach (b) des folgenden Satzes auch $r = r^{\smile\smile} \leq r^{\smile}$, also $r^{\smile} = r$. Eine Äquivalenz r heißt *total*, wenn r auch reflexiv ist.

Satz 3.5 (Chin, Tarski 1951) In einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$ gilt für alle r, s, t, u:

(a) $0^{\smile} = 0$, $1^{\smile} = 1$ und $I^{\smile} = I$,

(b) $r \leq s$ gdw. $r^{\smile} \leq s^{\smile}$

(c) $(r \cdot s)^{\smile} = r^{\smile} \cdot s^{\smile}$ und $\overline{r}^{\smile} = \overline{r^{\smile}}$

(d) $r\,;0 = 0 = 0\,;r$ und $1\,;1 = 1$

(e) $r\,;(s + t) = (r\,;s) + (r\,;t)$

(f) Wenn $r \leq s$ so ist $t\,;r \leq t\,;s$ und $r\,;t \leq s\,;t$

(g) $(r\,;s) \cdot t = 0$ gdw. $(r^{\smile};t) \cdot s = 0$ gdw.$(t\,;s^{\smile}) \cdot r = 0$

(h) $(r\,;s) \cdot (t\,;u) \leq r\,;((r^{\smile};t) \cdot (s\,;u^{\smile}))\,;u$

(i) Wenn $r \leq I$, dann ist r eine Äquivalenz

(j) Wenn $s\,;1 = s$, dann ist $r \cdot s = (s \cdot I)\,;r$

Beweis: (Bis auf (h))

(a) Da 0 das kleinste Element der Boole'schen Algebra $(R, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$ ist, gilt $0 \leq 0^{\smile}$, also $0^{\smile} = 0^{\smile} + 0$. Daraus folgt nach den Axiomen über $^{\smile}$ und 0

$$0 = 0^{\smile\smile} = (0^{\smile} + 0)^{\smile} = 0^{\smile\smile} + 0^{\smile} = 0 + 0^{\smile} = 0^{\smile}.$$

Entsprechend folgt $1^{\smile} = 1$ aus $1^{\smile} \leq 1$. Mit (b) der Definition gilt

$$I^{\smile};I = I^{\smile} = I\,;I^{\smile},$$

woraus mit (f) und (b) folgt:

$$I = I^{\smile\smile} = (I\,;I^{\smile})^{\smile} = I^{\smile\smile};I^{\smile} = I\,;I^{\smile} = I^{\smile}.$$

(b) Sei $r \leq s$. Dann ist $r + s = s$, also $s^\smile = (r+s)^\smile = (r^\smile + s^\smile)$, also $r^\smile \leq s^\smile$. Ist umgekehrt $r^\smile \leq s^\smile$, so ist auch $r = r^{\smile\smile} \leq s^{\smile\smile} = s$, wie gerade gezeigt.

(e) Das folgt aus (d) und (f) der Definition.

(f) Das folgt aus (e) und dem Teil (d) der Definition.

(i) Sei $r \leq I$. Nach (b) und (a) ist dann auch $r^\smile \leq I^\smile = I$. Nach (f) ist $r\,;r \leq r\,;I = r$.

(c) Für $\overline{r}^\smile = \overline{r^\smile}$ ist zu zeigen, daß $\overline{r}^\smile$ und $r^\smile$ komplementär zueinander sind:

$$\overline{r}^\smile + r^\smile = (\overline{r} + r)^\smile = 1^\smile = 1$$

ist klar. Für $\overline{r}^\smile \cdot r^\smile = 0$ beachte zunächst: aus (b) und $r \cdot s \leq r$ folgt $(r{\cdot}s)^\smile \leq r^\smile$ und $(r{\cdot}s)^\smile \leq s^\smile$, und daraus mit der Idempotenz und Monotonie von $\cdot$ auch

$$(r \cdot s)^\smile \leq r^\smile \cdot s^\smile.$$

Damit erhalten wir:

$$r^\smile \cdot \overline{r}^\smile = (r^\smile \cdot \overline{r}^\smile)^{\smile\smile} \leq (r^{\smile\smile} \cdot \overline{r}^{\smile\smile})^\smile = (r \cdot \overline{r})^\smile = 0^\smile = 0.$$

Nun folgt auch der erste Teil von (c) mit Hilfe von (e):

$$(r \cdot s)^\smile = \overline{(\overline{r} + \overline{s})}^\smile = \overline{(\overline{r} + \overline{s})^\smile} = \overline{(\overline{r}^\smile + \overline{s}^\smile)} = \overline{(\overline{r^\smile} + \overline{s^\smile})} = r^\smile \cdot s^\smile.$$

(g) Wir zeigen zuerst $(r\,;s) \cdot t = 0 \leftrightarrow (r^\smile;t) \cdot s = 0$: In der Boole'schen Algebra folgt $a \leq \overline{b}$ aus $a \cdot b = 0$. Sei $(r\,;s) \cdot t = 0$. Dann ist

$$\begin{array}{rcll} (r^\smile;t) \cdot s & \leq & (r^\smile;\overline{(r\,;s)}) \cdot s & \text{wegen } t \leq \overline{(r\,;s)} \\ & \leq & \overline{s} \cdot s = 0 & \text{mit Axiom (g)} \end{array}$$

Ist umgekehrt $(r^\smile;t) \cdot s = 0$, so ist analog

$$(r\,;s) \cdot t \leq (r\,;\overline{(r^\smile;t)}) \cdot t \leq \overline{t} \cdot t = 0.$$

Wir zeigen nun $(r^\smile;t) \cdot s = 0 \leftrightarrow (t\,;s^\smile) \cdot r = 0$: Sei zuerst $(t\,;s^\smile) \cdot r = 0$. Dann ist $r \leq \overline{(t\,;s^\smile)}$ und daher

$$\begin{array}{rcl} (r^\smile;t) \cdot s & = & ((r^\smile;t) \cdot s)^{\smile\smile} \\ & \leq & ((r^\smile;t)^\smile \cdot s^\smile)^\smile \\ & = & ((t^\smile;r) \cdot s^\smile)^\smile \\ & \leq & ((t^\smile;\overline{(t\,;s^\smile)}) \cdot s^\smile)^\smile \\ & \leq & (\overline{s^\smile} \cdot s^\smile)^\smile \\ & = & 0^\smile = 0. \end{array}$$

Ist umgekehrt $(r^\smile ; t) \cdot s = 0$, so ist $s \leq \overline{r^\smile ; t}$ und dann

$$\begin{array}{rcll} (t\,;s^\smile)\cdot r & \leq & (t\,;(\overline{r^\smile;t})^\smile)\cdot r & \\ & = & (t\,;\overline{(r^\smile;t)^\smile})\cdot r & \text{mit (c)} \\ & = & (t\,;\overline{(t^\smile;r)})\cdot r & \\ & \leq & \overline{r}\cdot r = 0 & \text{mit Axiom (g).} \end{array}$$

(d) Da 1 maximal ist, gilt $1\,;1 \leq 1$ und $I \leq 1$. Daher ist auch

$$1 = 1 + (1\,;1) = (1\,;I) + (1\,;1) = 1\,;(I+1) = 1\,;1.$$

Nach (g_1) ist

$$r\,;0 = (r\,;0)\cdot 1 = 0 \;\leftrightarrow\; (r^\smile;1)\cdot 0 = 0,$$

und die rechte Gleichung gilt in der Boole'schen Algebra. Durch Invertierung folgt daraus auch

$$0\,;r = (0\,;r)^{\smile\smile} = (r^\smile;0^\smile)^\smile = (r^\smile;0)^\smile = 0^\smile = 0.$$

(h) Das bleibt nachzutragen. (Ich habe nicht gesehen, wie man das aus den Axiomen bekommt. Man überlegt sich aber einfach, daß es in der vollen Peirce-Algebra über V gilt.)

(j) Wegen $s\cdot I \leq I$ ist $(s\cdot I)\,;r \leq I;r = r$, analog $(s\cdot I)\,;r \leq s\,;r \leq s\,;1 = s$, da s rechtsideal ist. Daraus folgt

$$(s\cdot I)\,;r \leq r\cdot s.$$

Die umgekehrte Ungleichung erhalten wir durch

$$\begin{array}{rcll} r\cdot s & = & s\cdot r & \\ & = & (I\,;s)\cdot(I\,;r) & \\ & \leq & I\,;[(I^\smile;I)\cdot(s\,;r^\smile)]\,;r, & \text{mit (h)} \\ & = & [(I\,;I)\cdot(s\,;r^\smile)]\,;r & \\ & = & [I\cdot(s\,;r^\smile)]\,;r & \\ & \leq & [I\cdot(s\,;1)]\,;r & \text{mit (f)} \\ & = & (I\cdot s)\,;r, & \text{da } s \text{ rechtsideal ist,} \\ & = & (s\cdot I)\,;r. & \end{array}$$

□

Definition 3.6 Ein Element r einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$ heißt *rechtsideal*, falls $r;1 = r$, *linksideal*, falls $1;r = r$, und r heißt *ideal*, falls $1;r;1 = r$.

Wegen $I \leq 1$ und (f) gelten $r \leq 1\,;r$, $r \leq r\,;1$ und $r \leq 1\,;r\,;1$ für jedes $r \in R$.

Beispiel 3.7 In der vollen Relationenalgebra $\mathcal{R}(V)$ bedeutet $R\,;1 \leq R$, daß

$$\{\, \langle a,b\rangle \in V \times V \mid \exists c \in V\, R(a,c)\,\} \subseteq R,$$

das heißt, da die umgekehrte Inklusion trivialerweise gilt, daß

$$\{\, a \in V \mid \exists c \in V\, R(a,c)\,\} \times V = (R:1) \times V = R.$$

Also ist R der Rechtszylinder $X \times V$ über der Projektion $X = (R:1)$ von R auf die erste Komponente.

Lemma 3.8 Sei $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, \overline{}, 0, 1, \,;\,, \breve{}, I)$ eine Relationenalgebra. Dann ist $(J, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$ eine Boole'sche Algebra, wobei J die Menge der rechtsidealen (oder linksidealen oder idealen) Elemente von $\mathcal{R}$ ist.

Beweis: Wir zeigen es für die Menge $J = \{\, r \in R \mid r\,;1 = r\,\}$ der rechtsidealen Elemente. Nach Satz 3.5 (d) sind 0 und 1 in J. Für $r, s \in J$ ist

$$(r+s)\,;1 = (r\,;1) + (s\,;1) = r + s,$$

also ist auch $(r+s) \in J$. Da $r \in J$ ist, hat man mit Hilfe von Satz 3.5 (j)

$$\begin{aligned}
(r \cdot s)\,;1 &= ((s \cdot I)\,;r)\,;1 \\
&= (s \cdot I)\,;(r\,;1) \\
&= (s \cdot I)\,;r \\
&= r \cdot s,
\end{aligned}$$

und daher auch $(r \cdot s) \in J$. Zum Nachweis von $\overline{r} \in J$ zeigen wir, daß $\overline{r}\,;1$ und r komplementär zueinander sind. Mit Satz 3.5 (d) ist

$$(\overline{r}\,;1) + r = (\overline{r}\,;1) + (r\,;1) = (\overline{r} + r)\,;1 = 1\,;1 = 1.$$

Wegen $r \in J$ erhalten wir aus (g) der Definition

$$r^{\smile};\overline{r} = r^{\smile};\overline{r\,;1} \leq \overline{1} = 0,$$

und daher über (f) der Definition und Monotonie

$$\overline{r}^{\smile};r = \overline{r}^{\smile};r^{\smile\smile} = (r^{\smile};\overline{r})^{\smile} \leq 0^{\smile} = 0.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}
(\overline{r}\,;1) \cdot r &= (\overline{r}\,;1) \cdot (r\,;1) \\
&\leq \overline{r}\,;[(\overline{r}^{\smile};r) \cdot (1\,;1^{\smile})]\,;1 && \text{mit (h)} \\
&= \overline{r}\,;[0 \cdot (1\,;1^{\smile})]\,;1 \\
&= \overline{r}\,;0\,;1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit sind $\overline{r}\,;1$ und r komplementäre Elemente von $\mathcal{R}$. Aus einem früheren Lemma über Boole'sche Algebren erhalten wir dann $\overline{r}\,;1 = \overline{r}$, also $\overline{r} \in J$. $\square$

Bemerkung 3.9 (Tarski 1941) Eine Relation R von $\mathcal{R}(V)$ ist

(a) eine surjektive Funktion, falls $R^{\smile} ; R = I$,

(b) total und injektiv, falls $(R ; R^{\smile}) = I$.

Die Relationen mit beiden Eigenschaften erfüllen die Axiome der Gruppentheorie. Da die Gruppentheorie unentscheidbar ist, ist es auch die (Horntheorie der) Relationenalgebra.

3.2 Boole'sche Moduln

Boole'sche Algebra und Relationenalgebra behandeln Mengen und Relationen unabhängig und völlig getrennt voneinander. Wir wollen nun eine Verbindung herstellen, die in der natürlichen Sprache ja auch allgegenwärtig ist: Eigenschaften werden als Nomina, Adjektive und intransitive Verben formuliert, Relationen als transitive Verben.

Eine grundlegende Operation erlaubt es, aus einer Relation und einer Menge wieder eine Menge zu bilden, das *Urbild* $R : B$ der Menge B unter der Relation R. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Operation faßt folgende Definition zusammen:

Definition 3.10 (Brink 1988) Ein *Boole'scher Modul* $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mathcal{R}, :)$ besteht aus

(a) einer Boole'schen Algebra $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, \overline{\ }, 0, 1)$,

(b) einer Relationenalgebra $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, \overline{\ }, 0, 1, ;, {}^{\smile}, I)$,

(c) und einer Abbildung $:$ von $R \times B$ nach B, so daß für alle $a, b \in B$ und $r, s \in R$ gilt:

   (a) $r : (a + b) = r : a + r : b$,

   (b) $(r + s) : a = r : a + s : a$,

   (c) $r : (s : a) = (r ; s) : a$,

   (d) $I : a = a$,

   (e) $0 : a = 0$,

   (f) $r^{\smile} : \overline{(r : a)} \leq \overline{a}$.

Wegen (a) und (b) ist $:$ monoton in beiden Argumenten. Daraus folgt z.B.

$$\begin{array}{rcl} a = I : a & \leq & 1 : a, \\ (r \cdot s) : a & \leq & (r : a) \cdot (s : a). \end{array}$$

Beispiel 3.11 Der *volle Boole'sche Modul über* V, $\mathcal{M}(V) = (\mathcal{B}(V), \mathcal{R}(V), :)$, besteht aus der vollen Boole'schen Algebra $\mathcal{B}(V)$ mit der vollen Relationenalgebra $\mathcal{R}(V)$ über V und dem *Urbild von* B *unter* R,

$$R : B := \{ a \in V \mid \exists b \in V(R(a,b) \wedge B(b)) \},$$

dem sogenannten *Peirce'schen Produkt*. Die dazu duale Operation ist die *Peirce'schen Summe*,

$$R \dagger B := \overline{\overline{R} : \overline{B}} = \{ a \in V \mid \forall b \in V(R(a,b) \vee B(b)) \}.$$

Man rechnet leicht nach, daß die Axiome gelten. Für die letzte Ungleichung sieht man das wie folgt:

$$\begin{aligned} a \in R^{\smile} : \overline{R : A} & \Rightarrow \exists b(R^{\smile}(a,b) \wedge \overline{R : A}(b)) \\ & \Rightarrow \exists b(R(b,a) \wedge \neg\exists c(c \in A \wedge R(b,c))) \\ & \Rightarrow a \notin A. \\ & \Rightarrow a \in \overline{A}. \end{aligned}$$

Für $R := \emptyset$ und $A := \emptyset$ erhält man wieder $0 = R^{\smile} : \overline{R : A} \neq 1 = \overline{A}$, so daß die Ungleichung nicht zu einer Gleichung verstärkt werden kann.

Proposition 3.12 In einem Boole'schen Modul sind folgende Mengen und Relationen definierbar:

(a) Das *Bild* der Menge A unter der Relation R:

$$R``A := \{ b \in V \mid \exists a \in V(A(a) \wedge R(a,b)) \} = R^{\smile} : A$$

(b) Die 1. und 2. *Projektion* der Relation R:

$$\begin{aligned} dom(R) & := \{ a \in V \mid \exists b \in V\, R(a,b) \} = R : 1 \\ ran(R) & := \{ b \in V \mid \exists a \in V\, R(a,b) \} = R``1 \end{aligned}$$

(c) Das *Feld* der Relation R,

$$\begin{aligned} F(R) & := \{ v \in V \mid \exists w \in V(R(v,w) \vee R(w,v)) \} \\ & = dom(R) + ran(R) \end{aligned}$$

Beispiel 3.13 Aus transitiven Verben und Gemeinnamen erhält man einstellige Prädikate, z.B. für $L = \textit{liest}, B = \textit{Buch}$

(a) *liest ein Buch* $= \{ a \mid \exists b(L(a,b) \wedge B(b)) \} = L : B$

(b) *liest alle Bücher* $= \{ a \mid \forall b(B(b) \rightarrow L(a,b)) \} = L \dagger \overline{B}$

(c) *liest nur Bücher* $= \{ a \mid \forall b(L(a,b) \rightarrow B(b)) \} = \overline{L} \dagger B$

Entsprechend erhält man aus Relationsnomen und Gemeinnamen wieder Gemeinnamen: $A = \textit{Angestellter}$, $M = \textit{Museum}$

(d) *Museumsangestellter* $= \{ a \mid \exists b(A(a,b) \wedge M(b)) \} = A : M$.

3.3 Peirce'sche Algebren

Das Urbild $r : a$ einer Menge a unter der Relation r erlaubt es, aus Mengen und Relationen neue *Mengen* zu konstruieren. Man kann aber auch damit noch nicht alle *Relationen* bilden, die man mit gewissen Grundmengen und Relationen haben möchte. Zum Beispiel hätte man mit zwei Mengen meistens auch gerne ihr kartesisches Produkt, eine zweistellige Relation. Einen einfachen Spezialfall davon führen wir nun als weitere Grundoperation ein:

Definition 3.14 (Britz 1988) Eine *Peirce'sche Algebra* $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ ist ein Boole'scher Modul $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :)$ mit einer Abbildung $^c : \mathcal{B} \to \mathcal{R}$, so daß

(a) für alle $a \in B$ gilt $a^c : 1 = a$, und

(b) für alle $r \in R$ gilt $(r : 1)^c = r\,;1$.

Man nennt a^c die *Rechtszylindrifizierung* von a.

Beispiel 3.15 Die *volle Peirce'sche Algebra über der Menge* V,

$$\mathcal{P}(V) := (\mathcal{B}(V), \mathcal{R}(V), :, ^c),$$

wobei $(\mathcal{B}(V), \mathcal{R}(V), :)$ der volle Boole'sche Modul über V ist und

$$A^c := A \times V \qquad \text{für jedes } A \subseteq V.$$

Dies ergibt eine Peirce'schen Algebra, denn die Axiome sind erfüllt wegen:

$$\begin{array}{rcl} A^c : 1 &=& (A \times V) : V = A, \\ (R : 1)^c &=& (R : V)^c \\ &=& (R : V) \times V \\ &=& \{\, a \in V \mid \exists b \in V\ R(a, b)\,\} \times V \\ &=& R\,;(V \times V) \\ &=& R\,;1. \end{array}$$

Proposition 3.16 In einer Peirce'schen Algebra $\mathcal{P}$ hat man Elemente, die sich wie bekannte Mengen und Relationen aus $\mathcal{P}(V)$ verhalten:

(a) das *kartesische Produkt zweier Mengen*:

$$\begin{array}{rcl} A \times B &:=& \{\, \langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\,\} \\ &=& (A \times V) \cap (V \times B) \\ &=& A^c \cap (B^c)^\smile \end{array}$$

(b) die *Vorbeschränkung einer Relation auf eine Menge*:

$$\begin{aligned} R \upharpoonleft A &:= \{\, \langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in V, R(a,b) \,\} \\ &= R \cap (A \times V) \\ &= R \cap A^c. \end{aligned}$$

(c) Die *Beschränkung der Identität auf eine Menge*,

$$\begin{aligned} I_A &:= \{\, \langle a, a\rangle \mid a \in A \,\} \\ &= I \cap (A \times V) \\ &= I \cap A^c \end{aligned}$$

Umgekehrt kann man die Rechtszylindrifizierung mit diesen Operationen und denen eines Boole'schen Moduls definieren, z.B:

$$A^c = A \times V = A \times 1, \qquad A^c = (V \times V) \upharpoonleft A \;=\; 1 \upharpoonleft A.$$

Es folgt die Definierbarkeit vieler weiterer Mengen und Relationen, und Zusammenhänge der Mengenoperationen mit $\times$, z.B.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Proposition 3.17 Sei $\mathcal{R}$ eine Relationenalgebra und $\mathcal{B} = (J, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ die Boole'sche Algebra ihrer rechtsidealen Elemente. Dann ist $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ mit

$$r : a \;:=\; r\,;a \qquad \text{und} \qquad a^c \;:=\; a$$

für $a \in J$ und $r \in R$ eine Peirce'sche Algebra.

Beweis: Durch Nachrechnen. □

Lemma 3.18 In jeder Peirce'schen Algebra $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ gilt für alle $a, b \in B$:

(a) $a^c = a^c; 1$, d.h. a^c ist ein rechtsideales Element von R,

(b) $0^c = 0$ und $1^c = 1$,

(c) $(a + b)^c = a^c + b^c$,

(d) $\overline{a}^c = \overline{a^c}$,

(e) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$,

(g) $(r : a)^c = r\,; a^c$,

(f) $a \leq b$ genau dann, wenn $a^c \leq b^c$.

(h) $r : a = b$ genau dann, wenn $r \,;\, a^c = b^c$,

(i) $r : 1 = 0$ genau dann, wenn $r = 0$.

Beweis:

(a) Nach den Axiomen aus Definition 3.14 ist $a^c = (a^c : 1)^c = a^c \,;\, 1$.

(b) Mit der Moduleigenschaft $0 = 0 : 1$ und der Eigenschaft $0 \,;\, r = 0$ hat man

$$0^c = (0 : 1)^c = 0 \,;\, 1 = 0.$$

Analog ist

$$1^c = (1 : 1)^c = 1 \,;\, 1 = 1.$$

(c) Wegen $a + b = (a^c : 1) + (b^c : 1) = (a^c + b^c) : 1$ ist

$$(a + b)^c = ((a^c + b^c) : 1)^c = (a^c + b^c) \,;\, 1 = (a^c \,;\, 1) + (b^c \,;\, 1) = a^c + b^c.$$

(g) Wir haben mit den Moduleigenschaften

$$r : a = r : (a^c : 1) = (r \,;\, a^c) : 1,$$

und daher mit (a)

$$(r : a)^c = ((r \,;\, a^c) : 1)^c = (r \,;\, a^c) \,;\, 1 = r \,;\, (a^c \,;\, 1) = r \,;\, a^c.$$

(f) Ist $a \leq b$, so ist $a + b = b$, also nach (c) auch $a^c + b^c = (a + b)^c = b^c$, also $a^c \leq b^c$. Gilt umgekehrt $a^c \leq b^c$, so ist $a^c + b^c = b^c$ und daher $a \leq b$ wegen

$$a + b = (a^c : 1) + (b^c : 1) = (a^c + b^c) : 1 = b^c : 1 = b.$$

(h) Aus (f) folgt $a = b \leftrightarrow a^c = b^c$, und daher mit (g):

$$\begin{aligned} r : a = b \quad &\leftrightarrow \quad (r : a)^c = b^c \\ &\leftrightarrow \quad r \,;\, a^c = b^c. \end{aligned}$$

(i) Nach (h) und (b) gilt $r : 1 = 0$ genau dann, wenn $r \,;\, 1 = 0$. Nach (g) von Satz 3.5 gilt

$$r \,;\, 1 = 0 \leftrightarrow (r \,;\, 1) \cdot 1 = 0 \leftrightarrow (1 \,;\, 1^{\smile}) \cdot r = 0 \leftrightarrow r = 0.$$

(d) Wir wollen zeigen, daß a^c und $\overline{a}^c$ komplementär sind; dann folgt $\overline{a}^c = \overline{a^c}$ aus Eigenschaften der Boole'schen Algebra. Wir haben offenbar

$$a^c + \overline{a}^c = (a + \overline{a})^c = 1^c = 1.$$

Für $a^c \cdot \overline{a}^c = 0$ genügt es nach (i), $(a^c \cdot \overline{a}^c) : 1 = 0$ zu zeigen. Aus der Monotonie von $\cdot$ und $:$ folgen

$$(a^c \cdot \overline{a}^c) : 1 \leq (a^c : 1) \quad \text{ und } \quad (a^c \cdot \overline{a}^c) : 1 \leq (\overline{a}^c : 1).$$

Mit der Monotonie und Idempotenz von $\cdot$ und den Peirce-Axiomen folgt:

$$(a^c \cdot \overline{a}^c) : 1 \leq (a^c : 1) \cdot (\overline{a}^c : 1) = a \cdot \overline{a} = 0.$$

(e) Nach den de Morgan'schen Regeln ist mit Hilfe von (c) und (d):

$$(a \cdot b)^c = \overline{(\overline{a} + \overline{b})}^c = \overline{(\overline{a} + \overline{b})^c} = \overline{(\overline{a}^c + \overline{b}^c)} = a^c \cdot b^c.$$

□

In der vollen Peirce'schen Algebra $\mathcal{P}(V)$ über V sind die rechtsidealen Relationen $R \subseteq V \times V$ nach Beispiel 3.15 gerade die Rechtszylindrifizierungen $A^c = A \times V$ ihrer Projektionen $A := R : 1$ auf die erste Komponente. Die Abbildung

$$g : 2^V \to \{\, R \in 2^{V \times V} \mid R\,;1 \subseteq R \,\} \qquad \text{mit} \qquad g(A) := A^c := (A \times V)$$

ist ein Isomorphismus zwischen Boole'schen Algebren. Das gilt allgemeiner für jede Peirce'sche Algebra:

Satz 3.19 Sei $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, {}^c)$ eine Peirce'sche Algebra und J ihre rechtsidealen Elemente. Dann sind die Boole'schen Algebren $\mathcal{B}$ und $(J, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$ isomorph zu einander.

Beweis: Definiere $g : B \to J$ und $h : J \to B$ durch

$$g(a) \ := \ a^c \qquad \text{und} \qquad h(r) \ := \ r : 1.$$

Nach Lemma 3.18 ist a^c rechtsideal, also $a^c \in J$, und g ein Homomorphismus. Bleibt zu ziegen, daß g bijektiv ist. Für jedes $a \in B$ ist

$$h(g(a)) = h(a^c) = a^c : 1 = a,$$

also ist h surjektiv und g injektiv. Für jedes $r \in J$ ist

$$g(h(r)) = g(r : 1) = (r : 1)^c = r\,;1 = r,$$

also ist g surjektiv und h injektiv. Damit ist $g = h^{-1}$ eine Bijektion. □

In der vollen Peirce'schen Algebra $\mathcal{P}(V)$ über V entsprechen die Teilrelationen $R \subseteq I$ der Identität den Teilmengen $A \subseteq V$: Die Abbildung

$$h : 2^V \to \{\, R \in 2^{V \times V} \mid R \subseteq I \,\} \qquad \text{mit} \qquad h(A) := I_A := I \cap (A \times A)$$

ist ein Isomorphismus zwischen Boole'schen Algebren. Auch das gilt allgemeiner für jede Peirce'sche Algebra, wie der nächste Satz zeigt. Zuerst zeigen wir ein paar Eigenschaften der Elemente $I \cdot a^c$, die den Relationen $I_A = I \cap (A \times V)$ entsprechen:

Lemma 3.20 Sie $\mathcal{P} = (\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, {}^c)$ eine Peirce'sche Algebra. Dann gilt für alle $a \in B$ und $r \in R$, mit $I_a := I \cdot a^c$:

(a) I_a ist eine Äquivalenz,

(b) $a^c \cdot r = I_a \,;r$ und $a^{c\smile} \cdot r = r\,; I_a$,

(c) $I_a : b = a \cdot b$.

Beweis:

(a) Das wegen $I_a \leq I$ klar nach (i) von Satz 3.5.

(b) Da a^c ein rechtsideales Element ist, folgt $a^c \cdot r = (a^c \cdot I)\,; r = I_a\,; r$ aus (j) von Satz 3.5. Die rechte Aussage erhält man daraus durch Invertierung:

$$a^{c\smile} \cdot r = (a^{c\smile} \cdot r)^{\smile\smile} = (a^c \cdot r^\smile)^\smile = (I_a\,; r^\smile)^\smile = r\,;(I_a)^\smile = r\,; I_a.$$

(c) Wir wissen

$$\begin{array}{rcll} (I_a : b)^c & = & I_a\,; b^c & \text{nach Lemma 3.18 (g)} \\ & = & a^c \cdot b^c & \text{nach (b)} \\ & = & (a \cdot b)^c & \text{nach Lemma 3.18 (e).} \end{array}$$

Daraus folgt $(a^c \cdot I) : b = a \cdot b$ mit (f) von Lemma 3.18.

□

Satz 3.21 Sei $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, {}^c)$ eine Peirce'sche Algebra und $J := \{\, r \in R \mid r \leq I \,\}$. Dann sind die Boole'schen Algebren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{I} = (J, +, \cdot, {}^-, 0, I)$ isomorph zu einander, wobei $\overline{r}^{\mathcal{I}} := \overline{r}^{\mathcal{R}} \cdot I$, entsprechend für die anderen Operationen.

Beweis: Definiere $g : B \to J$ durch $g(a) := a^c \cdot I$. Offenbar ist $g(a) \in J$. Daß g ein Homomorphismus ist, folgt aus Lemma 3.18, z.B.

$$g(a+b) = (a+b)^c \cdot I = (a^c + b^c) \cdot I = (a^c \cdot I) + (b^c \cdot I) = g(a) + g(b).$$

Es bleibt zu zeigen, daß g bijektiv ist. Sei $h : J \to B$ durch $h(r) := (r\,;1) : 1$ definiert. Die Funktion g ist injektiv, da mit Lemma 3.20 (b)

$$h(g(a)) = (I_a\,;1) : 1 = (a^c \cdot 1) : 1 = a^c : 1 = a.$$

Um zu zeigen, daß g surjektiv ist, wähle $r \in J$. Dann ist

$$g(h(r)) = ((r\,;1) : 1)^c \cdot I = ((r\,;1)\,;1) \cdot I = (r\,;(1\,;1)) \cdot I = (r\,;1) \cdot I$$

nach den Eigenschaften einer Peirce'schen Algebra und des relativen Produkts. Nach Satz 3.5 (h) ist weiter

$$
\begin{aligned}
(r\,;1)\cdot I &= (r\,;1)\cdot(I\,;I)\\
&\leq r\,;[(r^{\smile};I)\cdot(1\,;I^{\smile})]\,;I\\
&\leq r\,;(r^{\smile}\cdot 1)\\
&= r\,;r^{\smile}\\
&\leq r\,;I^{\smile} \qquad \text{wegen } r\leq I\\
&= r\,;I = r.
\end{aligned}
$$

Umgekehrt ist wegen $r \leq I$ und den Monotonieeigenschaften auch

$$r = r\cdot I = (r\,;I)\cdot I \leq (r\,;1)\cdot I,$$

also insgesamt $g(h(r)) = (r\,;1)\cdot I = r$ und daher g surjektiv. □

Bemerkung 3.22 Ein zum Satz von Stone analoges Resultat gibt es nicht: nicht jede Relationenalgebra $\mathcal{R}$ kann in die volle Relationenalgebra $\mathcal{R}(V)$ über einer passenden Menge V eingebettet werden.

Dieser Abschnitt stützt sich wesentlich auf eine Arbeit von C.Brink, K.Britz, und R.A.Schmidt: Peirce Algebra (Univ.Saarbrücken, 1992). Ergänzt wurde der Beweis von Satz 3.5, die Beispiele zur natürlichen Sprache, und der Beweis von Lemma 3.18 (d) ist korrigiert.