5 Normalformen

In vielen Fällen ist es nützlich, wenn man sich auf Ausdrucksweisen einer bestimmten Form beschränken kann. Dazu möchte man jede beliebige Ausdrucksweise in eine logisch gleichwertige der gewünschten Form umrechnen können.

Im günstigsten Fall gibt es zu jedem vorgegebenen Ausdruck genau einen äquivalenten Ausdruck „in Normalform“; dann kann män die Äquivalenz zweier Ausdrücke testen, indem man ihre Normalformen berechnet und vergleicht. Die im Folgenden betrachteten Normalformen von Formeln haben diese schöne Eigenschaft aber nicht. (Beispielsweise ist von zwei Formeln, die sich nur durch die Reihenfolge von Argumenten einer kommutativen Operation wie $\wedge$ unterscheiden, keine „normaler“ als die andere.)

5.1 Normalformen in der Aussagenlogik

Definition 5.1 Eine *Basisformel* oder ein *Literal* ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel.

Eine Formel ist in *Negationsnormalform*, wenn sie außer $\neg, \wedge, \vee$ keine Junktoren enthält und wenn in ihr $\neg$ nur vor atomaren Teilformeln auftritt.

Eine Formel ist in *konjunktiver* (bzw. disjunktiver) *Normalform*, wenn sie eine Konjunktion (bzw. Disjunktion) von Disjunktionen (bzw. Konjunktionen) von Literalen ist.

Lemma 5.2 Zu jeder Formel α gibt es eine Formel β, so daß

(a) $\alpha \equiv \beta$,

(b) jede Variable in β kommt auch in α vor,

(c) β ist in Negations- (bzw. konjunktiver bzw. disjunktiver) Normalform.

Beweis: Die Junktoren $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$ können wir mit Hilfe von

$$\begin{aligned}(\alpha \leftrightarrow \beta) &\equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)),\\ (\alpha \rightarrow \beta) &\equiv \neg\alpha \vee \beta\end{aligned}$$

beseitigen. Dann definieren wir die Normalformen durch Induktion über den Aufbau der verbleibenden[5] Formeln wie folgt:

$$\begin{aligned}NNF(A) &:= A,\\ NNF((\alpha_1 \wedge \alpha_2)) &:= (NNF(\alpha_1) \wedge NNF(\alpha_2)),\\ NNF((\alpha_1 \vee \alpha_2)) &:= (NNF(\alpha_1) \vee NNF(\alpha_2)),\end{aligned}$$

[5]Man ergänze die Definitionen um Fälle für die Aussagenkonstanten $\top$ und $\bot$.

$$\begin{array}{rcl} \mathit{NNF}(\neg A) & := & \neg A, \\ \mathit{NNF}(\neg\neg\alpha) & := & \mathit{NNF}(\alpha) \\ \mathit{NNF}(\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2)) & := & (\mathit{NNF}(\neg\alpha_1) \vee \mathit{NNF}(\neg\alpha_2)) \\ \mathit{NNF}(\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)) & := & (\mathit{NNF}(\neg\alpha_1) \wedge \mathit{NNF}(\neg\alpha_2)) \end{array}$$

Man zeigt durch Induktion über den Formelaufbau, daß (a) $\mathit{NNF}(\alpha) \equiv \alpha$ gilt; die Bedingung (b) ist offensichtlich.

$\mathit{DNF}(\alpha)$ und $\mathit{KNF}(\alpha)$ definieren wir simultan durch Induktion über α:

$$\begin{array}{rcl} \mathit{DNF}(A) & := & A \\ \mathit{DNF}(\neg\alpha) & := & \mathit{NNF}(\neg \mathit{KNF}(\alpha)) \\ \mathit{DNF}((\alpha_1 \vee \alpha_2)) & := & (\mathit{DNF}(\alpha_1) \vee \mathit{DNF}(\alpha_2)) \\ \mathit{DNF}((\alpha_1 \wedge \alpha_2)) & := & \mathit{distrib}(\mathit{DNF}(\alpha_1) \wedge \mathit{DNF}(\alpha_2)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathit{KNF}(A) & := & A \\ \mathit{KNF}(\neg\alpha) & := & \mathit{NNF}(\neg \mathit{DNF}(\alpha)) \\ \mathit{KNF}((\alpha_1 \wedge \alpha_2)) & := & (\mathit{KNF}(\alpha_1) \wedge \mathit{KNF}(\alpha_2)) \\ \mathit{KNF}((\alpha_1 \vee \alpha_2)) & := & \mathit{distrib}(\mathit{KNF}(\alpha_1) \vee \mathit{KNF}(\alpha_2)), \end{array}$$

wobei man bei $\mathit{distrib}(\delta)$ die Distributivregeln anwenden muß. Da alle Umformungen logische Äquivalenzen benutzen und keine neuen Variablen einführen, gilt die Behauptung. □

Beispielsweise ist

$$\begin{array}{rcl} \mathit{DNF}(\neg((A \wedge C) \vee \neg B)) & = & \mathit{NNF}(\neg \mathit{KNF}((A \wedge C) \vee \neg B)) \\ & = & \mathit{NNF}(\neg \mathit{distrib}(\mathit{KNF}(A \wedge C) \vee \mathit{KNF}(\neg B))) \\ & = & \mathit{NNF}(\neg \mathit{distrib}((A \wedge C) \vee \neg B)) \\ & = & \mathit{NNF}(\neg((A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B))) \\ & = & (\mathit{NNF}(\neg(A \vee \neg B)) \vee \mathit{NNF}(\neg(C \vee \neg B))) \\ & = & ((\mathit{NNF}(\neg A) \wedge \mathit{NNF}(\neg\neg B)) \vee \mathit{NNF}(\neg(C \vee \neg B)))) \\ & = & ((\neg A \wedge B) \vee \mathit{NNF}(\neg(C \vee \neg B)))) \\ & = & ((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B)) \end{array}$$

5.2 Normalform von Aussagen der Relationenalgebra

Im folgenden schließen wir die *triviale* Relationenalgebra $\mathcal{R}$ mit $|R| = 1$ aus, so daß wir $0 \neq 1$ annehmen können. Wir zeigen, daß jede Aussage der Relationenalgebra zu einer Gleichung äquivalent ist.

Definition 5.3 Die *Formeln der Relationenalgebra* sind die aus Gleichungen als atomaren Formeln aufgebauten aussagenlogischen Formeln, d.h. die Formeln φ, ψ und Terme r, s werden wie folgt aufgebaut:

$$\begin{array}{rcl} \varphi, \psi & := & r \doteq s \mid \neg\varphi \mid \ (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \to \psi) \mid (\varphi \leftrightarrow \psi), \\ r, s & := & 0 \mid 1 \mid I \mid x \mid (r + s) \mid (r \cdot s) \mid \overline{r} \mid (r \,;\, s) \mid r^{\smile}. \end{array}$$

Auf die relative Summe $(r \dagger s)$ von Termen haben wir verzichtet, da sie durch $\overline{(\overline{r} \,;\, \overline{s})}$ definiert werden kann und üblicherweise $\dagger$ nicht unter die Grundoperationen einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$ aufgenommen wird.

Satz 5.4 (E.Schröder) Jede Formel $\varphi(\vec{x})$ der Relationenalgebra ist zu einer Gleichung der Form $r(\vec{x}) = 1$ logisch äquivalent, d.h. in jeder nicht-trivialen Relationenalgebra $\mathcal{R}$ gilt $\forall\vec{x}\,(\varphi \leftrightarrow (r \doteq 1))$.

Beweis: Sei φ eine Formel. Wir können annehmen, daß die Junktoren $\leftrightarrow$, $\to$, $\vee$ nicht in φ vorkommen, da wir $\leftrightarrow$, $\to$ und $\vee$ mit Hilfe von $\wedge$ und $\neg$ ausdrücken können. Wir zeigen die Behauptung für die verbleibenden drei Fälle durch Induktion über den Aufbau von φ.

(a) φ ist $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$: Nach Induktionsannahme gibt es Terme $r_i(\vec{x})$ so daß

$$\forall\vec{x}(\varphi_1 \leftrightarrow (r_1 \doteq 1)) \ \wedge \ \forall\vec{x}(\varphi_2 \leftrightarrow (r_2 \doteq 1))$$

in jeder nicht-trivialen Relationenalgebra $\mathcal{R}$ gilt. Wir zeigen, daß

$$a = 1 \wedge b = 1 \iff a \cdot b = 1$$

in jeder Boole'schen Algebra gilt, insbesondere in $\mathcal{R}$ für die Werte $a := [\![r_1]\!]_h^{\mathcal{R}}$ und $b := [\![r_2]\!]_h^{\mathcal{R}}$ der beiden Terme unter einer Belegung h. Davon folgt „$\Rightarrow$“ aus $1 \cdot 1 = 1$ und „$\Leftarrow$“ indirekt: wäre $a \neq 1$, so wäre auch $a \cdot b \leq b \neq 1$, also $a \cdot b \neq 1$. Das widerspricht der Annahme; also ist $a = 1$ und damit auch $b = 1 \cdot b = a \cdot b = 1$. Für den Term $r := r_1 \cdot r_2$ gilt wegen $[\![r]\!]_h^{\mathcal{R}} = a \cdot b$ dann

$$\forall\vec{x}(\varphi \leftrightarrow (r \doteq 1))$$

in $\mathcal{R}$, und entsprechend in jeder nicht-trivialen Relationenalgebra.

(b) φ ist $s = t$: In jeder Boole'schen Algebra gilt

$$a = b \quad \iff \quad a + \overline{b} = 1 \ \wedge \ a \cdot \overline{b} = 0,$$

wovon „⇒“ nach den Axiomen (d) der Boole'schen Algebra und „⇐“ nach Proposition 2.4 gilt. Außerdem gilt

$$a + \overline{b} = 1 \;\wedge\; a \cdot \overline{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a \cdot b) + (\overline{a} \cdot \overline{b}) = 1.$$

Den Beweis überlassen wir den Lesern zur Übung. Insgesamt haben wir also in jeder Boole'schen Algebra

$$a = b \iff (a \cdot b) + (\overline{a} \cdot \overline{b}) = 1.$$

Zu den Termen $s(\vec{x})$ und $t(\vec{x})$ wähle also $r(\vec{x}) := (s \cdot t) + (\overline{s} \cdot \overline{t})$. Da jede Relationenalgebra eine Boole'sche Algebra ist, gilt $\forall \vec{x}(\varphi \leftrightarrow (r \doteq 1))$ in jeder nicht-trivialen Relationenalgebra.

(c) φ ist $\neg\psi$: Nach Induktionsannahme gibt es einen Term $r(\vec{x})$, so daß

$$\forall \vec{x}(\psi \leftrightarrow (r \doteq 1))$$

in jeder nicht-trivialen Relationenalgebra $\mathcal{R}$ gilt. Es genügt daher zu zeigen, daß für jedes Element r einer nicht-trivialen Relationenalgebra $\mathcal{R}$

$$r \neq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1\,;\overline{r}\,;1 = 1 \tag{19}$$

gilt. Wir zeigen „⇐“ indirekt: da $\mathcal{R}$ nicht trivial ist, ist $0 \neq 1$ und folglich

$$\begin{aligned} r = 1 \quad &\Rightarrow \quad \overline{r} = \overline{1} = 0 \\ &\Rightarrow \quad 1\,;\overline{r}\,;1 = 1\,;0\,;1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad 1\,;\overline{r}\,;1 \neq 1. \end{aligned}$$

Für „⇒“ genügt zu zeigen, daß für jedes Element s von $\mathcal{R}$ die Bedingung

$$s\,;1 = 1 \quad \vee \quad 1\,;\overline{s} = 1 \tag{20}$$

gilt. Denn mit $s := (1\,;\overline{r})$ erhalten wir daraus

$$1\,;\overline{r}\,;1 = 1 \quad \vee \quad 1\,;\overline{1\,;\overline{r}} = 1,$$

und nach Satz 3.5 (a) und Axiom (g) der Relationenalgebra ist

$$1\,;\overline{1\,;\overline{r}} \;=\; 1^{\smile};\overline{1\,;\overline{r}} \;\leq\; \overline{\overline{r}} = r,$$

also zusammen

$$r \neq 1 \;\Rightarrow\; 1\,;\overline{1\,;\overline{r}} \neq 1 \;\Rightarrow\; 1\,;\overline{r}\,;1 = 1.$$

Es bleibt die Bedingung (20) zu zeigen. Wir tun das nur für vollständige Relationenalgebren $\mathcal{R}(V) = (2^{V \times V}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, V \times V, ;, \smile, I)$[6]. Für jede

[6]Der obige Beweis folgt Tarski 1941, wo (20) ein Axiom ist; ich sehe momentan nicht, wie es aus dem oben angebenen Axiomensystem zu bekommen ist. Die Bedingung gilt aber in allen nicht-trivialen Relationenalgebren.

Relation $s \subseteq V \times V = 1$ ist

$$\begin{aligned} s\,;1 &= \{\, \langle a,b\rangle \in V \times V \mid \exists c \in V\, s(a,c)\,\} \\ &= \{\, a \in V \mid \exists c \in V\, s(a,c)\,\} \times V, \\ 1\,;\overline{s} &= V \times \{\, b \in V \mid \exists c \in V\, \overline{s}(c,b)\,\}. \end{aligned}$$

Ist $1 \neq s\,;1$, so gibt es $\langle a,b\rangle \notin s\,;1$, und dann ist $\{a\} \times V \subseteq \overline{s}$. Folglich ist

$$\{\, b \in V \mid \exists c \in V\, \overline{s}(c,b)\,\} = V$$

und daher $1\,;\overline{s} = V \times V = 1$. Also gilt (20) in $\mathcal{R}(V)$.

Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen. □

Der wesentliche Schritt des Beweises ist (19), wo die Negation einer Gleichung in eine Gleichung umgewandelt wird (mit Hilfe des Komplements und des Relationenprodukts). Eine Folgerung ist:

Korollar 5.5 Jeder Homomorphismus $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ zwischen nicht-trivialen Relationenalgebren ist injektiv.

Beweis: Sei $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ ein Homomorphismus, und $a \neq b \in R$. Zur Ungleichung $\neg(x \doteq y)$ gibt es einen Term $r(x,y)$, so daß

$$\forall x \forall y\, (x \neq y \leftrightarrow (r(x,y) \doteq 1))$$

in $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ gilt. Wegen $a \neq b$ ist $\mathcal{R} \models (r \doteq 1)[a,b]$, und da h ein Homomorphismus ist, wird diese atomare Aussage auf $\mathcal{R}'$ übertragen: das heißt, es gilt $\mathcal{R}' \models (r \doteq 1)[h(a),h(b)]$ und daher auch die äquivalente Formel,

$$\mathcal{R}' \models \neg(x \doteq y)[h(a),h(b)].$$

Aber das besagt, daß $h(a) \neq h(b)$ ist. Also ist h injektiv. □

Eine andere Folgerung ist, daß man sich beim Beweisen von Aussagen der Relationenalgebra auf Einsetzen in Gleichungen und die Schlußregel

$$\frac{\varphi, \qquad (\varphi \to \psi)}{\psi}\ \text{(modus ponens)}$$

beschränken kann.