Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Teil II, SS 2003

Hans Leiß
Universität München, CIS

15. Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Temporale und Modale Aussagenlogik

Die bisher betrachtete Aussagenlogik behandelt nur die „logischen“ Junktoren *nicht, und, oder, wenn – dann*, aus denen man ein paar weitere wie *weder – noch*, *sowohl – als auch* definieren könnte.

Einige andere Junktoren der Umgangssprache kann man nicht durch Wahrheitsfunktionen interpretieren,

Zum Beispiel hat die Bedeutung von *weil* etwas mit der Ursache-Wirkungs-Beziehung der durch die Teilaussagen beschriebenen Ereignisse zu tun, oder die Bedeutung von *obwohl* mit den Erwartungshaltungen bei Sprecher und Hörer einer Äußerung. Es ist bisher nicht möglich, die Kausalität oder die Erwartungshaltungen von Personen so genau zu erfassen, daß man die Funktionsweise dieser Junktoren formal darstellen könnte.

Es gibt aber weitere Junktoren, wo eine formale Beschreibung der Bedeutung möglich ist. Das sind solche, die zeitliche Verhältnisse und Modaleigenschaften betreffen, die durch Temporaladverbien wie *einst, früher, später einmal, solange – bis* oder durch Modalverben wie *können, müssen* ausgedrückt werden.

1.1 Temporale Aussagenlogik

Syntax der temporalen Aussagenlogik

Wir erweitern den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, indem wir (einstellige) temporale Junktoren, die *Temporaloperatoren* T, F, G, Y, P, H, zulassen:

Definition 1.1

$$
\begin{array}{rcll}
 & & & \text{intendierte Bedeutung} \\
\varphi,\psi & := & A & \\
 & \mid & \neg\varphi \mid \ldots \mid (\varphi\to\psi) & \text{(wie bisher)} \\
 & \mid & T\varphi & \textit{morgen wird } \varphi \textit{ der Fall sein} \\
 & \mid & F\varphi & \varphi \textit{ wird einmal der Fall sein} \\
 & \mid & G\varphi & \varphi \textit{ wird immer der Fall sein} \\
 & \mid & Y\varphi & \textit{gestern war } \varphi \textit{ der Fall} \\
 & \mid & P\varphi & \varphi \textit{ war einmal der Fall} \\
 & \mid & H\varphi & \varphi \textit{ war immerr der Fall}
\end{array}
$$

Man kann auch zweistellige temporale Junktoren zulassen, insbesondere

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{intendierte Bedeutung:} \\
S(\varphi,\psi) & \textit{seit zuletzt } \varphi \textit{ der Fall war, gilt } \psi \\
U(\varphi,\psi) & \textit{bis } \varphi \textit{ der Fall sein wird, gilt } \psi
\end{array}
$$

Hierbei steht S für *since* (*seit*), U für *until* (*bis*). Auf diese wollen wir aber nicht eingehen.

Semantik der temporalen Aussagenlogik

Um die Bedeutung der neuen Formeln zu erklären, muß man zuerst einmal sagen, wie man die Zeit darstellen will. Man geht meistens von einer (diskreten oder dichten) linear geordneten Zeit

$$\mathcal{T} = (\mathbb{Z}, <, +1, -1) \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{T} = (\mathbb{R}, <, +1, -1)$$

aus und wertet Formeln bei Zeit*punkten* aus.[1] Die Bedeutung von Aussagen soll wieder ein Wahrheitswert sein, aber jetzt hängt dieser Wahrheitswert vom Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$ ab. Dazu muß insbesondere der Wahrheitswert von Aussagevariablen von der Zeit abhängen; die Belegung g sollte also einer Aussagevariablen A zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Wahrheitswerte zuordnen können.

Daher ist jetzt eine *Belegung* eine Funktion

$$g : \mathcal{T} \times Var \to \{0, 1\}.$$

Definition 1.2 Der *Wert* $[\![\varphi]\!]^g_t$ *der Aussage* φ *zum Zeitpunkt* t *bei der Belegung* g ist (induktiv über den Formelaufbau) gegeben durch:

$$\begin{array}{rcl}
[\![A]\!]^g_t & := & g(t, A) \\
[\![\neg\varphi]\!]^g_t & := & -[\![\varphi]\!]^g_t \\
& \vdots & \\
[\![T\varphi]\!]^g_t & := & [\![\varphi]\!]^g_{t+1} \\
[\![F\varphi]\!]^g_t & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists s > t \ [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![G\varphi]\!]^g_t & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } \forall s > t \ [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![Y\varphi]\!]^g_t & := & [\![\varphi]\!]^g_{t-1} \\
[\![P\varphi]\!]^g_t & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists s < t \ [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![H\varphi]\!]^g_t & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } \forall s < t \ [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{array}$$

Wenn man genau sein will, muß auch die Struktur $\mathcal{T}$ noch angegeben werden, durch die man die Zeit modelliert.

Statt $[\![\varphi]\!]^g_t = 1$ schreibt man dann auch $(\mathcal{T}, g, t) \models \varphi$. In den Fällen, wo $\mathcal{T}$ und g aus dem Kontext bekannt sind, schreibt man auch kurz $t \models \varphi$.

Definition 1.3 Eine Formel φ ist *allgemeingültig* (bezüglich der Zeitstruktur $\mathcal{T}$), wenn $[\![\varphi]\!]^g_t = 1$ ist für alle Belegungen $g : \mathcal{T} \times Var \to \{0, 1\}$ und alle Zeitpunkte $t \in \mathcal{T}$.

[1] Für andere Temporaloperatoren ist es besser, die Formeln bei Zeit*intervallen* auszuwerten, z.B: für "*φ während ψ*", "*oft in dieser Woche φ*".

Beispiel 1.4 (Zenons Paradox) Wir betrachten den Wettlauf von Achilles mit einer Schildkröte. Wir betrachten die Aussage

$A :=$ Achilles hat bisher die Schildkröte nicht eingeholt.

Der Wettlauf beginnt zum Zeitpunkt t_0, und die Schildkröte soll einen Vorsprung haben. Zenon behauptet, daß der gute Läufer Achilles die Schildkröte niemals einholen kann.

Zenon argumentiert wie folgt: Angenommen, wir haben schon eine Folge $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ gefunden, so daß $[\![A]\!]^g_{t_i} = 1$ für alle $i \leq n$ gilt; für $n = 0$, den Beginn des Wettlaufs, ist das wegen des Vorsprungs erfüllt. Dann sei $t_{n+1} > t_n$ der Zeitpunkt, zu dem Achilles die Stelle erreicht, wo die Schildkröte zum Zeitpunkt t_n war. Da auch die Schildkröte sich fortbewegt, ist sie zum Zeitpunkt t_n nicht mehr an dieser Stelle; daher hat Achilles sie auch zur Zeit t_{n+1} noch nicht eingeholt, d.h. es gilt auch $[\![A]\!]^g_{t_{n+1}} = 1$. Es gibt also eine *unendliche* Folge

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$$

von Zeitpunkten, wo Achilles die Schildkröte noch nicht eingeholt hat. Also holt er sie nie ein. Das widerspricht aller Erfahrung!

Wo ist der Fehlschluß? Im letzten Schritt wird aus der Tatsache, daß A *unendlich oft* (und wegen dem „bisher“ in A auch *unendlich lange*!) in der Zukunft gilt, geschlossen, daß A *immer* in der Zukunft gilt.

Das Argument ist korrekt, wenn man die Zeit durch $\mathcal{T} = (\mathbb{Z}, <)$ interpretiert, aber falsch, wenn man sie durch $\mathcal{T} = (\mathbb{R}, <)$ interpretiert. Dann kann z.B. $0 \leq t_n < 1$ mit $t_{n+1} = t_n + |1 - t_n|/2$ sein, und trotz $[\![A]\!]^g_t = 1$ für $0 \leq t < 1$ kann $[\![A]\!]^g_1 = 0$ sein.

Beispiel 1.5 Schon Aristoteles beschäftigte sich mit der temporalen und modalen Aussagenlogik und untersuchte z.B., welche der folgenden Aussagen gelten:

$$\begin{array}{ll}
(T\varphi \vee T\neg\varphi), & (T\varphi \wedge T\neg\varphi) \\
(F\varphi \vee F\neg\varphi), & (F\varphi \wedge F\neg\varphi) \\
(G\varphi \vee G\neg\varphi), & (G\varphi \wedge G\neg\varphi)
\end{array}$$

Den Nutzen der Temporaloperatoren sieht man z.B., wenn man Aussagen mit Zeitmarkierung und Negation formalisieren will, etwa:

Er wird nicht zu kommen versprechen.
Sie hatte nicht laut zu singen versprochen.

1.2 Modale Aussagenlogik

Syntax der modalen Aussagenlogik

Wir erweitern den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, indem wir (einstellige) modale Junktoren, die *Modaloperatoren* $\Box, \Diamond$ zulassen:

Definition 1.6

			intendierte Bedeutung
φ, ψ	$:=$	A	
	$\mid$	$\neg\varphi \mid \ldots \mid (\varphi \to \psi)$	(wie bisher)
	$\mid$	$\Diamond\varphi$	*es ist möglich, daß* φ
	$\mid$	$\Box\varphi$	*es ist notwendig, daß* φ

In der Umgangssprache werden die Modalitäten auch durch Modaladverbien wie *notwendigerweise* φ oder *möglicherweise* φ ausgedrückt, oder durch die Verwendung von Modalverben wie *müssen* oder *können*:

> *Muß der Rechner immer abstürzen, wenn ich arbeiten will?*
> *Wenn mein Rechner abgestürzt ist, kann ich nicht arbeiten.*

Es gibt in der Umgangssprache weitere Modaloperatoren, die wir hier nicht betrachten, z.B.

Es ist wahrscheinlich, daß φ.

Semantik der modalen Aussagenlogik

Die Semantik der Modaloperatoren ist erst durch Saul Kripke um 1960 formal geklärt worden, obwohl sich schon Aristoteles (340 v.Chr.) damit beschäftigt hat.

Intuitiv bedeutet *möglicherweise* φ, daß es „die (logische) Möglichkeit“ gibt, daß φ gilt, d.h. daß es logisch nicht ausgeschlossen ist, daß φ gilt. Eine Interpretation wäre also:

$$\Diamond\varphi :\Longleftrightarrow \varphi \textit{ ist erfüllbar},$$

und entsprechend

$$\Box\varphi :\Longleftrightarrow \varphi \textit{ ist allgemeingültig}$$

für die (logische) Notwendigkeit: φ ist logisch notwendig, wenn φ *unter allen logisch möglichen Umständen* wahr ist.

Nun kann es ja sein, daß eine Aussage φ unter *gewissen* Umständen möglich und unter *anderen* Umständen *un*möglich ist. Die Bedeutung von *möglich* und *notwendig* ist daher, so Kripke, *relativ* zu den Umständen.

Um festzulegen, was unter gewissen Umständen (logisch) möglich ist, ordnet man diesen Umständen r daher eine Menge von alternativen Umständen zu, die von r aus „erreichbaren“ Umstände:

Definition 1.7 Ein *Rahmen* $\mathcal{R} = (R, \prec)$ besteht aus einer Menge R von „Umständen" (oder *möglichen Welten*) und einer zweistelligen *Erreichbarkeits*-Relation $\prec\, \subseteq R \times R$.

Eine *Belegung* über $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung $g : R \times Var \to \{0, 1\}$. Der *Wert* $[\![\varphi]\!]^g_r$ *von* φ *unter den Umständen* $r \in R$ ist defininiert durch:

$$
\begin{array}{rcl}
[\![A]\!]^g_r & := & g(r, A) \\
[\![\neg\varphi]\!]^g_r & := & -[\![\varphi]\!]^g_r \\
& \vdots & \\
[\![\Diamond\varphi]\!]^g_r & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \text{ für mindestens ein } s \in R \text{ mit } r \prec s, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
[\![\Box\varphi]\!]^g_r & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^g_s = 1 \text{ für alle } s \in R \text{ mit } r \prec s, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{array}
$$

Eine Formel φ der modalen Aussagenlogik ist *gültig* (über $\mathcal{R}$), wenn $[\![\varphi]\!]^g_r = 1$ ist für jede Belegung g über $\mathcal{R}$ und jedes $r \in R$.

Ob eine Aussage wie „Was notwendig ist, ist auch möglich", d.h.

$$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$$

gültig ist, hängt von $\mathcal{R}$ ab.

Bemerkung 1.8 In der Aussagenlogik werden die „(logischen) Umstände" durch Belegungen $r : Var \to \{0, 1\}$ dargestellt – was nicht durch die Wahrheitswerte der Aussagenvariablen bestimmt ist, ist logisch irrelevant. Man kann dann für R eine Menge von Belegungen im früheren Sinne nehmen und für die in der Definition benutzten g einfach $g(r, A) := r(A)$ benutzen.

Wie bei den Temporaloperatoren haben auch die Modaloperatoren den Vorteil, daß ihr *Wirkungsbereich* eindeutig bestimmt ist: sie beziehen sich auf ihre unmittelbare Teilformel. Zum Vergleich betrachte man die umgangssprachlichen Formulierungen:

(a) Es ist möglich, daß ich diese Frage nicht beantworten kann.

(b) Es ist nicht möglich, daß ich diese Frage beantworten kann.

(c) Ich kann diese Frage möglicherweise nicht beantworten.

(d) Ich kann diese Frage unmöglich beantworten.

2 Boole'sche Algebra

Im 19. Jahrhundert wurde die Begriffslogik des Aristoteles von den Mathematikern G.W.Boole, A. de Morgan und C.S.Peirce in die Form eines „Rechnens“ mit Begriffen gebracht, die dem Rechnen mit Zahlen gleicht.

2.1 Axiome und grundlegende Eigenschaften

Definition 2.1 Eine *Boole'sche Algebra* $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ besteht aus einer Menge $A \neq \emptyset$ mit Operationen und Elementen, so daß:

(a) $+, \cdot\ : A \times A \to A$ sind assoziativ, kommutativ und idempotent: für alle $a, b, c \in A$ gilt

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a + b &= b + a \\ a + a &= a \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \\ a \cdot b &= b \cdot a \\ a \cdot a &= a, \end{aligned}$$

(b) $+$ und $\cdot$ sind distributiv zueinander: für alle $a, b, c \in A$ gilt

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \\ (a \cdot b) + c &= (a + c) \cdot (b + c), \end{aligned}$$

(c) 0, 1 sind neutrale Elemente für $+$ bzw. $\cdot$: für alle $a \in A$ gilt

$$\begin{aligned} a + 0 &= a \\ a \cdot 1 &= a, \end{aligned}$$

(d) $^- : A \to A$ ist der Übergang zum Komplement (Gegenteil): für alle $a \in A$

$$\begin{aligned} a + \overline{a} &= 1 \\ a \cdot \overline{a} &= 0. \end{aligned}$$

Die Anforderungen (a) – (d) an eine Boole'sche Algebra haben die Form von *universellen Gleichungen*, d.h. Aussagen $\forall a \forall b \forall c (s = t)$ mit geeigneten Termen s, t. Sie bilden ein *Axiomensystem* der Boole'schen Algebra, das wir mit BA bezeichnen.

Beispiel 2.2 Die Standardinterpretationen von BA sind:

(a) Die Algebra der Wahrheitswerte,

$$\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \max, \min, ^-, 0, 1)$$

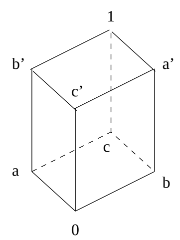
mit $\overline{1} := 0$ und $\overline{0} := 1$. Schon Aristoteles betonte die Bedeutung des „tertium non datur“, $a+\overline{a} = 1$, und des „ausgeschlossenen Widerspruchs“, $a \cdot \overline{a} = 0$ als wichtigste Prinzipien der Logik.

(b) Die Potenzmengenalgebra einer Menge M,

$$2^M := (2^M, \cup, \cap, ^-, \emptyset, M)$$

mit $\overline{A} := M \setminus A := \{\, m \in M \mid m \notin A \,\}$.

Jede Boole'sche Algebra mit 8 Elementen ist isomorph zu 2^M für $M = \{a, b, c\}$ und kann wie folgt dargestellt werden:



Zu den Ecken x und y ist $x + y$ (bzw. $x \cdot y$) die erste Ecke, die man sowohl von x wie von y durch aufsteigende (bzw. absteigende) Linien erreicht. Das Komplement von x ist die „gegenüberliegende“ Ecke, die man durch Spiegelung am Mittelpunkt erreicht, also $\overline{a} = a'$ usw.

Da nicht verlangt wird, daß $0 \neq 1$ ist, gibt es auch eine *triviale* Boole'sche Algebra, deren Individuenbereich aus nur einem Element besteht. Weitere Beispiele für Boole'sche Algebren kann man u.a. wie folgt konstruieren:

Proposition 2.3 Sei $\mathcal{A} = (A, +^A, \cdot^A, -^A, 0^A, 1^A)$ eine Boole'sche Algebra.

(a) Ist $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ eine Unteralgebra, so ist auch $\mathcal{A}'$ eine Boole'sche Algebra.

(b) Die zu $\mathcal{A}$ *duale* Algebra $\widetilde{\mathcal{A}} := (A, \cdot^A, +^A, -^A, 1^A, 0^A)$, die aus $\mathcal{A}$ durch Vertauschen von $+$ und $\cdot$ sowie von 0 und 1 entsteht, ist eine Boole'sche Algebra.

(c) Sei neben $\mathcal{A}$ auch $\mathcal{B} = (B, +^B, \cdot^B, -^B, 0^B, 1^B)$ eine Boole'sche Algebra. Dann ist auch das *kartesische Produkt* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := (A \times B, +^{A\times B}, \cdot^{A\times B}, -^{A\times B}, 0^{A\times B}, 1^{A\times B}),$$

dessen Operationen ("komponentenweise") durch

$$\begin{array}{rcl}
\langle a,b\rangle +^{A\times B} \langle a',b'\rangle &:=& \langle a +^{A} a', b +^{B} b'\rangle,\\
\langle a,b\rangle \cdot^{A\times B} \langle a',b'\rangle &:=& \langle a \cdot^{A} a', b \cdot^{B} b'\rangle,\\
\overline{\langle a,b\rangle}^{A\times B} &:=& \langle \overline{a}^{A}, \overline{b}^{B}\rangle,\\
0^{A\times B} &:=& \langle 0^{A}, 0^{B}\rangle,\\
1^{A\times B} &:=& \langle 1^{A}, 1^{B}\rangle
\end{array}$$

definiert sind, eine Boole'sche Algebra.

Beweis:

(a) Alle Axiome sind von der Form $\forall\vec{x}s(\vec{x}) = t(\vec{x})$ für geeignete Terme s und t. Wir hatten früher gezeigt, daß solche Aussagen beim Übergang von einer Struktur zu einer Unterstruktur „erhalten" bleiben.

(b) Sei $\widetilde{\varphi}$ *die zu* φ *duale* Formel, die aus φ entsteht, wenn man darin $+$ mit $\cdot$ und 0 mit 1 vertauscht. Offenbar gilt $\mathcal{A} \models \varphi$ genau dann, wenn $\widetilde{\mathcal{A}} \models \widetilde{\varphi}$, für jede Aussage φ. Nun beachte, daß für jedes Axiom φ die duale Aussage $\widetilde{\varphi}$ eines der anderen Axiome ist, und daß folglich jedes Axiom φ selbst die duale Aussage eines anderen Axioms ist, nämlich $\varphi = \widetilde{\widetilde{\varphi}}$. Also hat man für jedes Axiom φ:

$$\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \widetilde{\varphi} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{A}} \models \widetilde{\widetilde{\varphi}} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{A}} \models \varphi.$$

(c) Das sieht man leicht durch Nachrechnen, da die Gleichungen ja in jeder Komponente gelten.

□

Aus (b) folgt das *Dualitätsprinzip*

> Die Aussage φ gilt in jeder Boole'schen Algebra genau dann, wenn $\widetilde{\varphi}$ in jeder Boole'schen Algebra gilt.

Proposition 2.4 Sei $\mathcal{A}$ eine Boole'sche Algebra. Sind $a, b \in A$ mit $a \cdot b = 0$ und $a + b = 1$, so ist $a = \overline{b}$.

Beweis:

$$\begin{array}{rcl}
a &=& a \cdot 1\\
&=& a \cdot (b + \overline{b})\\
&=& (a \cdot b) + (a \cdot \overline{b})\\
&=& 0 + (a \cdot \overline{b})
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= (b \cdot \overline{b}) + (a \cdot \overline{b}) \\
&= (b + a) \cdot \overline{b} \\
&= (a + b) \cdot \overline{b} \\
&= 1 \cdot \overline{b} \\
&= \overline{b}.
\end{aligned}$$

□

Daraus folgen die als *de Morgan'sche Regeln* bekannten Gleichungen, die schon Wilhelm von Ockham im 14. Jahrhundert für die Logik gezeigt hat:

Lemma 2.5 (De Morgan) Für alle Elemente a, b einer Boole'schen Algebra gilt

$$\begin{aligned}
\overline{a \cdot b} &= \overline{a} + \overline{b} \\
\overline{a + b} &= \overline{a} \cdot \overline{b}
\end{aligned}$$

Beweis: Nach dem Dualitätsprinzip brauchen wir nur die erste Behauptung nachzuweisen. Nach Proposition 2.4 genügt es dafür zu zeigen:

$$(ab)(\overline{a} + \overline{b}) = 0, \qquad ab + (\overline{a} + \overline{b}) = 1,$$

denn dann folgt $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$. Die erste Gleichung erhält man durch

$$\begin{aligned}
ab(\overline{a} + \overline{b}) &= ab\overline{a} + ab\overline{b} \\
&= a\overline{a}b + a0 \\
&= 0b + a0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

und die zweite Gleichung durch

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 1 \\
&= (a + \overline{a})(b + \overline{b}) \\
&= ab + a\overline{b} + \overline{a}b + \overline{a}\,\overline{b} \\
&= ab + a\overline{b} + \overline{a}b + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{b} \\
&= ab + a\overline{b} + \overline{a}(b + \overline{b}) + \overline{a}\,\overline{b} \\
&= ab + \overline{a}(b + \overline{b}) + a\overline{b} + \overline{a}\,\overline{b} \\
&= ab + \overline{a}1 + (a + \overline{a})\overline{b} \\
&= ab + \overline{a} + 1\overline{b} \\
&= ab + \overline{a} + \overline{b}
\end{aligned}$$

Also sind ab und $\overline{a} + \overline{b}$ komplementär zu einander. □

Proposition 2.6 Ist $+ : A \times A \to A$ eine assoziative, kommutative und idempotente Abbildung, so ist die durch

$$a \leq b :\iff a + b = b \tag{1}$$

definierte Relation auf A eine partielle Ordnung.

Beweis:

(a) $\leq$ ist reflexiv: Da $+$ idempotent ist, gilt $a + a = a$, d.h. $a \leq a$.

(b) $\leq$ ist transitiv: Seien $a \leq b$ und $b \leq c$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcll} a + c & = & a + (b + c) & \text{da } b \leq c \\ & = & (a + b) + c & \text{da } + \text{ assoziativ ist} \\ & = & b + c & \text{da } a \leq b \\ & = & c & \text{da } b \leq c, \end{array}$$

also $a \leq c$. Damit ist $\leq$ transitiv.

(c) $\leq$ ist antisymmetrisch: Seien $a \leq b$ und $b \leq a$. Dann ist

$$\begin{array}{rcll} a & = & b + a & \text{da } b \leq a \\ & = & a + b & \text{da } + \text{ kommutativ ist} \\ & = & b & \text{da } a \leq b \text{ ist.} \end{array}$$

Also ist $\leq$ antisymmetrisch.

Nach (a) – (c) ist $\leq$ eine partielle Ordnung. □

Proposition 2.7 Ist $\mathcal{A}$ eine Boole'sche Algebra und $\leq^{\mathcal{A}}$ die nach (1) aus $+^{\mathcal{A}}$ definierte partielle Ordnung. Dann gilt $0 \leq^{\mathcal{A}} a \leq^{\mathcal{A}} 1$ für jedes $a \in A$.

Beweis: Wegen $0 + a = a + 0 = a$ gilt $0 \leq a$. Wegen

$$a + 1 = a + (a + \overline{a}) = (a + a) + \overline{a} = a + \overline{a} = 1$$

gilt $a \leq 1$. Also ist 0 das kleinste und 1 das größte Element von A □

Nimmt man in (1) statt $+$ die Multiplikation $\cdot$, so erhält man ebenfalls eine partielle Ordnung,

$$a \geq b :\iff a \cdot b = b. \tag{2}$$

In der Potenzmengenalgebra 2^M ist die nach (1) definierte partielle Ordnung die Teilmengenbeziehung, die nach (2) definierte die Obermengenbeziehung:

$$\begin{array}{rcl} A \cup B = B & \iff & A \subseteq B, \\ A \cap B = B & \iff & A \supseteq B. \end{array}$$

Die beiden partiellen Ordnungen verhalten sich auch im allgemeinen so zu einander wie erwartet, d.h. $a \leq b$ gilt genau dann, wenn $b \geq a$ gilt:

Proposition 2.8 In jeder Boole'schen Algebra $\mathcal{A}$ gilt für alle a, b:

$$a + b = b \iff a \cdot b = a$$

Beweis: Sei $a + b = b$. Dann ist

$$ab = a(a + b) = aa + ab = a + ab = a(1 + b) = a1 = a.$$

Ist umgekehrt $a \cdot b = a$, so ist

$$a + b = ab + b = ab + 1b = (a + 1)b = 1b = b.$$

□

Offenbar sind $+$ und $\cdot$ monoton bezüglich $\leq$: ist z.B. $b \leq c$, so ist $ab \leq ac$, da

$$ab + ac = a(b + c) = ac.$$

Die Komplementbildung ist es natürlich nicht, sondern man hat

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad \overline{b} \leq \overline{a}.$$

Eine Boole'sche Algebra $\mathcal{A}$ kann man auch als Verallgemeinerung der 2-wertigen Logik verstehen: dann bedeutet $a = 1$, daß a wahr ist, $a = 0$, daß a falsch ist, und $a \leq b$, daß a logisch stärker ist als b, d.h. daß b aus a folgt.

2.2 Ideale und Homomorphismen

Definition 2.9 Ein *Ideal* I der Boole'schen Algebra $\mathcal{A}$ ist eine nicht-leere Teilmenge $I \subseteq A$, die „nach unten" (d.h. unter $\geq$) und unter $+$ abgeschlossen ist:

(a) $0 \in I$,

(b) $\forall a, b \in A(b \leq a \in I \Rightarrow b \in I)$,

(c) $\forall a, b \in A(a \in I \wedge b \in I \Rightarrow a + b \in I)$.

Ein Ideal I von $\mathcal{A}$ heißt *echt*, wenn $I \neq A$.

Wegen (b) gilt für jedes Ideal I auf $\mathcal{A}$ und alle $a, b \in A$ offenbar:

$$\begin{aligned} a + b \in I &\quad\Rightarrow\quad a \in I, \\ a \in I &\quad\Rightarrow\quad a \cdot b \in I, \\ 1 \in I &\quad\Leftrightarrow\quad A = I. \end{aligned}$$

Satz 2.10 Sei $\mathcal{A}$ eine Boole'sche Algebra.

(a) Ist $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Homomorphismus in eine Boole'sche Algebra $\mathcal{B}$, so ist $kern(h) := \{ a \in A \mid h(a) = 0^B \}$ ein Ideal von $\mathcal{A}$.

(b) Ist I ein Ideal von $\mathcal{A}$, so gibt es einen Homomorphismus $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in eine Boole'sche Algebra $\mathcal{B}$, so daß $I = kern(h)$ ist.

Beweis:

(a) Nach den Homomorphismuseigenschaften von h gilt $h(0^A) = 0^B$, also $0 \in I$. Ist $b \leq a \in I$, so ist $0 \leq h(b) \leq h(a) = 0$, also auch $b \in I$. Sind $a, b \in I$, so ist $h(a + b) = h(a) + h(b) = 0 + 0 = 0$, also $a + b \in I$.

(b) Wir wollen $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{A}$ durch zusammenfassen von Elementen in Äquivalenzklassen erhalten. Dazu definere

$$a \sim_I b :\iff \exists a' \in I\ \exists b' \in I\ (a + a' = b + b'). \tag{3}$$

Zuerst überprüfen wir, daß diese Relation eine Äquivalenzrelation ist: sie reflexiv, da $0 \in I$ und $a+0 = a+0$ gilt. Offensichtlich ist $\sim_I$ symmetrisch. Und $\sim_I$ ist transitiv, denn zu $a \sim_I b$, $b \sim_I c$ gibt es $a', b', b'', c' \in I$ mit

$$a + a' = b + b' \quad \text{und} \quad b + b'' = c + c',$$

also

$$a + (a' + b'') = (a + a') + b'' = b + b' + b'' = b' + (c + c') = c + (b' + c'),$$

und hier sind $(a + b''), (b' + c') \in I$, also $a \sim_I c$.

Wir nehmen nun

$$B := A/{\sim_I} \quad := \{ [a]_I \mid a \in A \},$$

und schreiben für die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim_I$ kurz

$$[a]_I := \{ a' \in A \mid a \sim_I a' \}.$$

Um aus B eine Boole'sche Algebra $\mathcal{B}$ zu machen, setzen wir natürlich

$$\begin{aligned}
0^B &:= [0]_I, \\
1^B &:= [1]_I \\
[a]_I +^B [c]_I &:= [a + c]_I && (4) \\
[a]_I \cdot^B [c]_I &:= [a \cdot c]_I && (5) \\
\overline{[a]_I}^B &:= [\overline{a}]_I && (6)
\end{aligned}$$

Damit dies wohldefiniert ist, also die rechten Seiten von (4) – (6) nicht von der Wahl der Repräsentanten a, c abhängen, muß $\sim_I$ eine Kongruenzrelation sein. Um das zu überprüfen, seinen $a \sim_I b, c \sim_I d$ und dazu Elemente $a', b', c', d' \in I$ mit

$$a + a' = b + b' \quad \text{und} \quad c + c' = d + d'$$

gegeben. Wir zeigen zuerst, daß $[a+c]_I = [b+d]_I$ ist:

$$\begin{aligned}(a+c)+(a'+c') &= (a+a')+(c+c')\\ &= (b+b')+(d+d')\\ &= (b+d)+(b'+d').\end{aligned}$$

Da $(a'+c'), (b'+d') \in I$ sind, folgt hieraus $(a+c) \sim_I (b+d)$.

Die Behauptungen $[a \cdot c]_I = [b \cdot d]_I$ und $[\overline{a}]_I = [\overline{b}]_I$ bleiben als Übungsaufgaben.

Schließlich ist noch zu zeigen, daß $I = \mathit{kern}(h)$ ist. Für $I \subseteq \mathit{kern}(h)$ sei $a \in I$. Mit $a' := 0$ und $0' := a$ haben wir

$$a + a' = a + 0 = 0 + a = 0 + a'$$

mit $a', 0' \in I$, also $a \sim_I 0$ und daher $h(a) = [0]_I$, d.h. $a \in \mathit{kern}(h)$. Ist umgekehrt $a \in \mathit{kern}(h)$, so ist $h(a) = [a]_I = [0]_I$, also $a \sim_I 0$ und daher für geeignete $a', b' \in I$

$$a + a' = 0 + b' = b' \in I.$$

Da I nach unten abgeschlossen und $a \leq a + a' \in I$ ist, folgt $a \in I$. □

2.3 Der Stone'sche Darstellungssatz

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß jede Boole'sche Algebra (bis auf Isomorphie) eine Unteralgebra der Potenzmengenalgebra 2^M ist, für eine geeignete Menge M.

Definition 2.11 Ein *Primideal* auf $\mathcal{A}$ ist ein Ideal $I \subseteq A$ mit $I \neq A$ und

$$\forall a, b \in A(a \cdot b \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I).$$

Die Bezeichnung kommt daher, daß, wenn man $a \in I$ als "I teilt a" liest, die Primidealeigenschaft der Primzahleigenschaft entspricht.

Beispiel 2.12 Ist $\mathcal{A} = 2^M$ die Potenzmengenalgebra von M und $m \in M$, so ist

$$I := \{\, A \subseteq M \mid m \notin A \,\}$$

ein Primideal von $\mathcal{A}$. Die Primeigenschaft besagt: ist $m \notin A \cap B$, so ist $m \notin A$ oder $m \notin B$.

Wichtig ist der Zusammenhang zwischen Primidealen und dem Komplement:

Lemma 2.13 Für echte Ideale $I \subset A$ sind äquivalent:

(a) I ist ein Primideal,

(b) Für alle $a \in A$ ist $a \in I$ genau dann, wenn $\overline{a} \notin I$,

(c) $I = kern(h)$ für einen Homomorphismus $h : \mathcal{A} \to \mathbb{B}$,

(d) I ist ein maximales echtes Ideal: es gibt kein Ideal J mit $I \subset J \subset A$.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei I ein Primideal und $a \in A$. Da I ein echtes Ideal ist, ist $a + \overline{a} = 1 \notin I$, also wegen der Idealeigenschaften $a \notin I$ oder $\overline{a} \notin I$. Da I Primideal ist, ist andererseits wegen $a \cdot \overline{a} = 0 \in I$ auch $a \in I$ oder $\overline{a} \in I$. Zusammen ergibt das (b).

(b) $\Rightarrow$ (c): Damit I der Kern von h wird, müssen wir

$$h(a) := \begin{cases} 0, & \text{falls } a \in I \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

nehmen. Da $0 \in I$ ist, ist nach (b) $1 \notin I$, sodaß $h(0) = 0$ und $h(1) = 1$ wird. Wir zeigen zuerst, daß h monoton ist. Sei $a \leq b$. Ist $h(a) = 0$, so ist natürlich $h(a) \leq h(b)$. Ist $h(a) = 1$, so ist $a \notin I$, also $b \notin I$ wegen der Idealeigenschaft, und daher $h(b) = 1$, also auch $h(a) \leq h(b)$. Aus der Monotonie folgt

$$h(a \cdot b) \leq h(a) \leq h(a + b)$$

für alle $a, b \in A$. Falls $0 \in \{h(a), h(b)\}$, so ist also schon $h(a \cdot b) = h(a) \cdot h(b)$, und falls $1 \in \{h(a), h(b)\}$, so gilt schon $h(a + b) = h(a) + h(b)$. Ist $h(a) = 1 = h(b)$, also $a, b \notin I$, so ist $a \cdot b \notin I$ da I ein Primideal ist, also $h(a \cdot b) = 1$. Ist $h(a) = 0 = h(b)$, so ist $a + b \in I$, da I ein Ideal ist, also $h(a + b) = 0$.

Schließlich ist $h(\overline{a}) = \overline{h(a)}$ nach der Voraussetzung (b), denn

$$h(\overline{a}) = 0 \iff \overline{a} \in I \iff a \notin I \iff h(a) = 0,$$

und analog $h(\overline{a}) = 1$ genau dann, wenn $h(a) = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (d): (wird nachgetragen)

(d) $\Rightarrow$ (a): Sei I ein maximales echtes Ideal von $\mathcal{A}$. Angenommen, $a \cdot b \in I$, aber $a \notin I$ und $b \notin I$. Die Menge

$$a + I := \{\, c \in A \mid \exists i \in I (c \leq a + i) \,\}$$

ist ein Ideal, da I eines ist und $+$ idempotent ist. Wegen $0 \in I$ und $a \notin I$ ist $I \neq (a + I)$, also $I = A$ und daher $1 = a + i_a$ für ein $i_a \in I$. Ebenso ist $I \neq b + I$ und deshalb $1 = b + i_b$ für ein $i_b \in I$. Daraus folgt

$$1 = (a + i_a) \cdot (b + i_b) = ab + ai_b + i_a b + i_a i_b \in I$$

wegen $ab \in I$ und weil mit $i \in I$ auch $c \cdot i \in I$ ist. □

Lemma 2.14 (Zorn'sches Lemma) Sei $(M, \leq)$ eine partielle Ordnung. Wenn jede durch $\leq$ total geordnete Teilmenge $\emptyset \neq K \subseteq M$ eine obere Schranke hat, dann hat M ein maximales Element.

Dieses Lemma kann man aus den bisher gemachten Annahmen über die Mengenbildungen nicht beweisen. Man braucht ein weiteres Axiom, das sogenannte „Auswahlaxiom“. Umgekehrt folgt das Auswahlaxiom aus dem Zorn'schen Lemma. Beides beweisen wir hier nicht. Das Zorn'sche Lemma ist aber einfach anzuwenden:

Korollar 2.15 Ist I ein echtes Ideal der Boole'schen Algebra $\mathcal{A}$, so gibt es ein Primideal J von $\mathcal{A}$ mit $I \subseteq J$.

Beweis: Betrachte die Menge

$$M := \{\, J \mid I \subseteq J, J \text{ ist echtes Ideal von } \mathcal{A} \,\},$$

partiell geordnet durch $\subseteq$. Jede durch $\subseteq$ total geordnete Teilmenge $\emptyset \neq K \subseteq M$ hat eine obere Schranke, nämlich $\bigcup K \in M$: da $K \neq \emptyset$, ist $0 \in \bigcup K$, und zu $a, b \in \bigcup K$ mit $c \leq a$ gibt es $J \in K$ mit $a, b \in J$, also $c \in J$ und $a+b \in J \subseteq \bigcup K$. Nach dem Zorn'schen Lemma hat M ein maximales Element, also ein maximales echtes Ideal $J \subseteq I$. Nach Lemma 2.13 ist J ein Primideal. □

Satz 2.16 (Stone'scher Darstellungssatz) Jede Boole'sche Algebra $\mathcal{A}$ ist isomorph zu einer Unteralgebra einer Boole'schen Algebra der Form 2^M.

Beweis: Sei M die Menge aller Primideale von $\mathcal{A}$. Definiere $h : A \to 2^M$ durch

$$h(a) := \{\, I \in M \mid a \notin I \,\} \in 2^M.$$

Beachte, daß für jedes Ideal I mit $a \in I$ auch $a \cdot b \in I$ ist, wegen $a \cdot b \leq a$. Für jedes Primideal ist $a \notin I$ genau dann, wenn $\overline{a} \in I$ ist. Daraus folgt, daß h ein Homomorphismus ist: sei I ein Primideal auf $\mathcal{A}$.

(a) $h(0) = \emptyset$: wegen $0 \in I$ ist $I \notin h(0)$.

(b) $h(1) = M$: wegen $1 \notin I$ ist $I \in h(1)$.

(c) für alle $a, b \in A$ gilt: $h(a + b) = h(a) \cup h(b)$:

$$\begin{aligned} (a+b) \notin I &\iff \overline{a+b} \in I, \\ &\iff \overline{a} \cdot \overline{b} \in I, \\ &\iff \overline{a} \in I \text{ oder } \overline{b} \in I, \quad \text{da } I \text{ Primideal ist} \\ &\iff a \notin I \text{ oder } b \notin I. \end{aligned}$$

(d) für alle $a, b \in A$ gilt: $h(a \cdot b) = h(a) \cap h(b)$:

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \notin I \quad &\iff \quad \overline{a \cdot b} \in I \\
&\iff \quad \overline{a} + \overline{b} \in I \\
&\iff \quad \overline{a} \in I \text{ und } \overline{b} \in I \text{ (wegen } \overline{a}, \overline{b} \leq \overline{a} + \overline{b}) \\
&\iff \quad a \notin I \text{ und } b \notin I.
\end{aligned}$$

(e) für alle $a \in A$ gilt $h(\overline{a}) = M \setminus h(a)$.

$$\begin{aligned}
\overline{a} \notin I \quad &\iff \quad a \in I \\
&\iff \quad I \notin h(a).
\end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß h injektiv ist: Sei $a \neq b$. Zum Nachweis von $h(a) \neq h(b)$ zeigen wir, daß a und b „durch ein Primideal getrennt werden“, d.h.

$$a \in I \text{ und } b \notin I \quad \text{oder} \quad b \in I \text{ und } a \notin I \qquad \text{für ein Primideal } I. \tag{7}$$

Wegen $a \neq b$ ist $a \not\leq b$ oder $b \not\leq a$, also etwa $a \not\leq b$. Dann ist $\overline{a} + b \neq 1$, denn sonst wäre

$$a + b = (a + b)(\overline{a} + b) = a\overline{a} + ab + b\overline{a} + bb = 0 + b(a + \overline{a}) + b = b,$$

also doch $a \leq b$. Wegen $1 \not\leq \overline{a} + b$ ist

$$I(a, b) := \{\, c \in A \mid c \leq \overline{a} + b \,\}$$

ein echtes Ideal, und mit $\overline{a} + B \in I(a, b)$ sind $\overline{a} \in I(a, b)$ und $b \in I(a, b)$. Außerdem ist $a \notin I(a, b)$, da sonst $1 = a + \overline{a} \in I(a, b)$ wäre. Nun betrachte

$$M(a, b) := \{\, J \mid I(a, b) \subseteq J, a \notin J, J \text{ ist echtes Ideal} \,\}.$$

Ist $K \subseteq M(a, b)$ eine nichtleere total geordnete Teilmenge, so ist $\bigcup K$ eine obere Schranke von K, und $\bigcup K \in M(a, b)$. Nach dem Zorn'schen Lemma hat $M(a, b)$ ein maximales Element, etwa $J(a, b)$. Nach Korollar 2.15 gibt ein Primideal I mit $J(a, b) \subseteq I$. Wir haben $\overline{a}, b \in I(a, b) \subseteq J(a, b) \subseteq I$. Außerdem ist $a \notin I$, da sonst $1 = a + \overline{a} \in I$ wäre. Damit ist (7) gezeigt. □

2.4 Anwendungen der Boole'schen Algebra

Wo lassen sich Boole'sche Algebren in der Computerlinguistik anwenden? Da sich diese Theorie aus den Vorstellungen des Aristoteles über die Grundaussagen der (griechischen) Sprache entwickelt hat, erinnern wir zunächst daran, daß die Operationen $+$, $\cdot$ und $\overline{}$ die umgangssprachlichen Aussagejunktoren „oder“, „und“ und „nicht“ interpretieren können.

Daneben können zumindest „und“ und „oder“ auch Ausdrücke anderer syntaktischer Art verbinden, etwa Verben, Nomina, Adjektive, Nominalphrasen, Verbalphrasen usw., und die Komplementbildung $\overline{}$ findet man etwa bei der Bildung von Adjektiven und Nomina als Präfix, z.B. in „*un*schön“, „*Un*tiefe“.

Interpretiert man Verben, Nomina und Adjektive durch Relationen und Mengen von Objekten aus einer Menge M, so entsprechen den sprachlichen Koordinationspartikeln die Operationen $+, \cdot, \overline{}$ in gewissen Boole'schen Algebren der Form 2^M oder $2^{M\times M}$ oder Unteralgebren hiervon.

Hierbei spielen allem Anschein nach auch die in den Axiomen ausgedrückten Eigenschaften eine wichtige Rolle, insbesondere die Distributivgesetze. In vielen Fällen lassen sich Koordinierungen von Ausdrücken als „Abkürzungen“ von Satzkoordinierungen verstehen:

Beispiel 2.17 Anwendungen von $(a + b)c = ac + bc$ bzw. $c(a + b) = ca + cb$:

(a) Fritz will ((einen Aufsatz oder ein Buch) lesen)
$\mapsto$ Fritz will ((einen Aufsatz lesen) oder (ein Buch lesen))
$\mapsto$ (Fritz will einen Aufsatz lesen) oder (Fritz will ein Buch lesen)

(b) (Intelligente (Männer und Frauen)) wissen es
$\mapsto$ ((intelligente Männer) und (intelligente Frauen)) wissen es
$\mapsto$ ((intelligente Männer wissen es) und (intelligente Frauen wissen es))

Bemerkung 2.18 Es gibt neben dem Boole'schen *und* auch ein „sequentielles“ *und (dann)*, das z.B. nicht kommutativ ist:

Er ((öffnete das Fenster) und (spuckte [dann] hinaus)
$\mapsto$ (Er öffnete das Fenster) und ([dann] (spuckte er hinaus))
$\neq$ Er ((spuckte zum Fenster hinaus) und (öffnete es))

Dieses sequentielle „und“ wird normalerweise in Befehlen benutzt, wie im Neuen Testament: *Steh auf, nimm dein Bett, und geh!*. In Programmen schreibt man es als Semikolon, wie in $x := y + x\,;\, y := 0$.

Man kann nun das Rechnen mit Gleichungen zwischen Boole'schen Termen benutzen, um die Wahrheit von Aussagen einfacher Form nachzuprüfen. Boole hatte bemerkt, daß man die „kategorischen“ Aussagen des Aristoteles durch (Un-)Gleichungen zwischen Mengen ausdrücken kann:

Aussageform	Aristotelisch	Boole'sch	quantorenlogisch
Alle A sind B	$A\,a\,B$	$A\cdot\overline{B} = 0$	$\forall x(A(x) \to B(x))$
Einige A sind keine B	$A\,o\,B$	$A\cdot\overline{B} \neq 0$	$\exists x(A(x) \land \neg B(x))$
Alle A sind keine B	$A\,e\,B$	$A\cdot B = 0$	$\forall x(A(x) \to \neg B(x))$
Einige A sind B	$A\,i\,B$	$A\cdot B \neq 0$	$\exists x(A(x) \land B(x))$

Aristotes hatte in seiner Logik untersucht, welche Aussagen der Form

$$\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$$

mit kategorischen Aussagen α, β, γ logisch allgemeingültig sind. Dies sind seine *Syllogismen*. Der Syllogismus „B<u>a</u>rb<u>a</u>r<u>a</u>“ ist die *Tautologie*

$$A\,a\,B \,\wedge\, B\,a\,C \;\rightarrow\; A\,a\,C$$

und nicht, wie man seit Boethius (ca 400 n.Chr.) meint, die *Schlußregel*

$$\frac{\begin{array}{c} A\,a\,B \\ B\,a\,C \end{array}}{A\,a\,C}\,.$$

Die Schlußregel ist schwächer, da sie nur besagt: wenn die Obersätze *beweisbar* (bzw. bewiesen) sind, ist auch der Untersatz beweisbar (bzw. bewiesen).

3 Relationenalgebra und Peirce'sche Algebra

Wenn man Adjektive und intransitive Verben durch *Eigenschaften*, also einstellige Relationen von Objekten interpretieren will, ist es natürlich, transitive Verben und gewisse prädikative Nomen (wie „Bruder“) durch zwei- oder mehrstellige Relationen zu interpretieren.

Daher ist es auch interessant, ob sich mit Relationen in ähnlicher Weise wie mit Mengen rechnen läßt, und was gegebenenfalls grundlegend neue Operationen sind, die man bei Mengen nicht hat. Das wurde im 19. Jahrhundert von A. de Morgan, C.S.Peirce, E. Schröder untersucht und spielt heute eine Rolle bei der Interpretation von Programmiersprachen, Wissensrepräsentationssprachen und auch natürlichen Sprachen.

Wie in der Boole'schen Algebra geht es darum, die extensionale Betrachtungsweise der Mengenlehre durch eine algebraische Betrachtungsweise zu ersetzen, bei der die Relationen nicht durch ihre Elemente gegeben sein müssen. Statt mit den Elementen soll mit den Eigenschaften der Relationen und ihren Beziehungen zu einander gerechnet werden. Bei der Interpretation z.B. von Verben ist eine extensionale Repräsentation im Computer eher ungeeignet, es sei denn, der Objektbereich ist ziemlich klein.

3.1 Relationenalgebra

Definition 3.1 (Tarski 1955) Eine *Relationenalgebra* $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1, ;, \breve{\ }, I)$ besteht aus einer Menge R von „Relationen“ und Operationen $; : R \times R \to R$, $\breve{\ } : R \to R$ und $I \in R$, sodaß gilt:

(a) $(R, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$ ist eine Boole'sche Algebra, und

(b) für alle $r, s, t \in R$ gelten folgende Gleichungen:

   (a) $r\,;(s\,;t) = (r\,;s)\,;t$
   (b) $r\,;I = r = I\,;r$
   (c) $r\breve{\ }\breve{\ } = r$
   (d) $(r+s)\,;t = (r\,;t) + (s\,;t)$
   (e) $(r+s)\breve{\ } = r\breve{\ } + s\breve{\ }$
   (f) $(r\,;s)\breve{\ } = s\breve{\ }\,;r\breve{\ }$
   (g) $r\breve{\ }\,;\ \overline{(r\,;s)} \leq \overline{s}$,

   wobei die Ungleichungsrelation der letzten Bedingung die durch

$$r \leq s :\iff r + s = s$$

   definierte partielle Ordnung auf R meint.

Hierbei heißen $r^{\smile}$ die *Inverse* von r, $(r\,;s)$ das *relative Produkt*[2] von r und s, und I die *Identität.* Die *relative Summe* $r \dagger s$ von r und s definiert man durch

$$r \dagger s \;:=\; \overline{\overline{r}\,;\overline{s}}$$

dual aus dem relativen Produkt.

Beispiel 3.2 Die *volle Relationenalgebra über der Menge* V ist

$$\mathcal{R}(V) := (2^{V\times V}, \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, 1, \,;\, , {}^{\smile}, I)$$

mit den Operationen

$$\begin{array}{rcl}
1 & := & V \times V, \\
\overline{r} & := & \{\, \langle a,b\rangle \in V \times V \mid \langle a,b\rangle \notin r \,\}, \\
r\,;s & := & \{\, \langle a,c\rangle \mid \exists b \in V \ (\langle a,b\rangle \in r \wedge \langle b,c\rangle \in s) \,\}, \\
r^{\smile} & := & \{\, \langle a,b\rangle \mid \langle b,a\rangle \in r \,\}, \\
I & := & \{\, \langle a,a\rangle \mid a \in V \,\}.
\end{array}$$

Beachte, daß die relative Summe durch

$$\begin{array}{rcl}
r \dagger s & := & \{\, \langle a,c\rangle \mid \neg\exists b \in V \ (\langle a,b\rangle \in \overline{r} \wedge \langle b,c\rangle \in \overline{s}) \,\}, \\
 & = & \{\, \langle a,c\rangle \mid \forall b \in V \ (\langle a,b\rangle \in r \vee \langle b,c\rangle \in s) \,\},
\end{array}$$

interpretiert wird. Man rechne nach, daß die Axiome bei dieser Interpretation gelten. Die letzte Ungleichung erhält man durch

$$\begin{array}{rcl}
a(r^{\smile};\overline{(r\,;s)})b & \Rightarrow & \exists c(a\,r^{\smile}c \wedge c\overline{(r\,;s)}b) \\
 & \Rightarrow & \exists c(c\,r\,a \wedge c(\overline{r} \dagger \overline{s})b) \\
 & \Rightarrow & \exists c(c\,r\,a \wedge \forall d(c\,\overline{r}\,d \vee d\,\overline{s}\,b)) \\
 & \Rightarrow & \exists c(c\,r\,a \wedge a\,\overline{s}\,b) \\
 & \Rightarrow & a\,\overline{s}\,b.
\end{array}$$

Wählt man $r = 0 = s$, so erhält man $r^{\smile};\overline{(r\,;s)} = 0\,;\overline{(0\,;s)} = 0 \neq 1 = \overline{0}$. Also kann die Ungleichung nicht zu einer Gleichung verstärkt werden.

Beispiel 3.3 Transitive Verben lassen sich durch zweistellige Relationen zwischen Objekten, also durch Elemente von $\mathcal{R}(V)$ interpretieren, oder allgememeiner durch Elemente einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$.

(a) Partikel zur Verbbildung und -Koordination werden durch die Boole'schen Operationen von $\mathcal{R}$ interpretiert: für $A =$ *achtet*, $B =$ *billigt* ist

[2] Es wird oft das *Relationenprodukt* genannt und $r \circ s$ geschrieben. Diese Schreibweise kollidiert mit der Schreibweise $f \circ g$ bei Funktionen f und g, wo man $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ meint; aber $(f \circ g)(x) = z$ ist dann *nicht* dasselbe wie $x(f \circ g)z$, d.h. $\exists y((x,y) \in f \wedge (y,z) \in g)$.

mißachtet $= \overline{A}$, *achtet oder billigt* $= A + B$, *achtet und billigt* $= A \cdot B$

Aussagen mit den so zusammengesetzten Verben können auf Aussagen mit einfachen Verben zurückgeführt werden:

$$\begin{array}{rcl} x \textit{ mißachtet } y & \mapsto & (x \textit{ achtet } y) \textit{ nicht} \\ x \textit{ achtet oder billigt } y & \mapsto & (x \textit{ achtet } y) \textit{ oder } (x \textit{ billigt } y) \\ x \textit{ achtet und billigt } y & \mapsto & (x \textit{ achtet } y) \textit{ und } (x \textit{ billigt } y). \end{array}$$

Das entspricht einem Homomorphismus in die Boole'sche Algebra $\mathbb{B}$:

$$\begin{array}{rcl} x\, \overline{A}^{\mathcal{R}}\, y & = & \overline{x\, A\, y}^{\mathbb{B}} \\ x\,(A +^{\mathcal{R}} B)\, y & = & (x\, A\, y) +^{\mathbb{B}} (x\, B\, y) \\ x\,(A \cdot^{\mathcal{R}} B)\, y & = & (x\, A\, y) \cdot^{\mathbb{B}} (x\, B\, y). \end{array}$$

(b) Die Passivbildung von transitiven Verben wird durch die Inversenbildung $\breve{}$ von $\mathcal{R}$ interpretiert: für $A =$ *achtet* ist $A^{\smile} =$ *wird geachtet von*:

$$\begin{array}{lcl} x \textit{ achtet } y & = & x\, A\, y \\ y \textit{ wird geachtet von } x & = & y\, A^{\smile} x \end{array}$$

(c) Relativierte, existentiell quantifizierte Objekte werden durch das relative Produkt ; von $\mathcal{R}$ interpretiert:

$$\begin{array}{lcl} x \textit{ achtet einen, der } y \textit{ billigt} & = & x\,(A\,;B)\,y \\ x \textit{ achtet einen, den } y \textit{ billigt} & = & x\,(A\,;B^{\smile})\,y \end{array}$$

Relativierte, universell quantifizierte Objekte werden durch die relative Summe $\dagger$ von $\mathcal{R}$ interpretiert:

$$\begin{array}{lcl} x \textit{ achtet jeden, der } y \textit{ billigt} & = & x\,(A\,;\overline{B})\,y \\ x \textit{ achtet jeden, den } y \textit{ billigt} & = & x\,(A\,;\overline{B^{\smile}})\,y \end{array}$$

(d) Die Bildung von Verbalphrasen aus einem transitiven Verb und einem Relationsnomen kann ebenso durch das relative Produkt und die relative Summe interpretiert werden, z.B. für $K =$ *kennt*, $B =$ *ist Bruder von*:

$$\begin{array}{lcl} \textit{kennt einen Bruder von} & = & K\,;B = \{\, \langle a,c\rangle \mid \exists b(a\,K\,b \wedge b\,B\,c)\,\}, \\ \textit{kennt keinen Bruder von} & = & \overline{K\,;B} = \overline{K} \dagger \overline{B}, \\ \textit{kennt alle Brüder von} & = & K \dagger \overline{B} = \{\, \langle a,c\rangle \mid \forall b(b\,B\,c \to a\,K\,b)\,\}, \\ \textit{kennt nicht alle Brüder von} & = & \overline{K \dagger \overline{B}} = \overline{K}\,;B, \\ \textit{kennt nur Brüder von} & = & \overline{K} \dagger B = \{\, \langle a,c\rangle \mid \forall b(a\,K\,b \to b\,B\,c)\,\}, \\ \textit{kennt nicht nur Brüder von} & = & \overline{\overline{K} \dagger B} = K\,;\overline{B}, \end{array}$$

(e) Schließlich kann man auch die Bildung zusammengesetzter Relationsnomen durch das relative Produkt und die relative Summe interpretieren: z.B. für $B =$ *Bruder*, $T =$ *Tochter* und $G =$ *Grund*, $K =$ *Klage über*

$$\begin{array}{lcl} \textit{Tochter eines Bruders von} & = & T\,;B \\ \textit{Grund aller Klagen über} & = & G \dagger \overline{K} \end{array}$$

Bekannte Eigenschaften zweistelliger Relationen lassen sich verallgemeinern:

Definition 3.4 Sei r ein Element einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$.

(a) r heißt *reflexiv*, falls $I \leq r$.

(b) r heißt *transitiv*, falls $r\,;r \leq r$.

(c) r heißt *symmetrisch*, falls $r^\smile \leq r$.

(d) r ist eine (partielle) *Äquivalenz*, falls r transitiv und symmetrisch ist.

Falls r symmetrisch ist, so ist nach (b) des folgenden Satzes auch $r = r^{\smile\smile} \leq r^\smile$, also $r^\smile = r$. Eine Äquivalenz r heißt *total*, wenn r auch reflexiv ist.

Satz 3.5 (Chin, Tarski [4]) In einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$ gilt für alle r, s, t, u:

(a) $0^\smile = 0$, $1^\smile = 1$ und $I^\smile = I$.

(b) $r \leq s$ genau dann, wenn $r^\smile \leq s^\smile$.

(c) $(r \cdot s)^\smile = r^\smile \cdot s^\smile$ und $\overline{r}^\smile = \overline{r^\smile}$.

(d) $r\,;0 = 0 = 0\,;r$ und $1\,;1 = 1$.

(e) $r\,;(s+t) = (r\,;s) + (r\,;t)$.

(f) Ist $r \leq s$, so ist $t\,;r \leq t\,;s$ und $r\,;t \leq s\,;t$.

(g) $(r\,;s)\cdot t = 0$ genau dann, wenn $(r^\smile;t)\cdot s = 0$ genau dann,wenn $(t\,;s^\smile)\cdot r = 0$.

(h) $(r\,;s)\cdot(t\,;u) \leq r\,;((r^\smile;t)\cdot(s\,;u^\smile))\,;u$.

(i) Ist $r \leq I$, dann ist r eine Äquivalenz.

(j) Ist $s\,;1 = s$, dann ist $r \cdot s = (s \cdot I)\,;r$ und $r \cdot s^\smile = r\,;(s \cdot I)$.

Beweis: (Bis auf (h))

(a) Da 0 das kleinste Element der Boole'schen Algebra $(R, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$ ist, gilt $0 \leq 0^\smile$, also $0^\smile = 0^\smile + 0$. Daraus folgt nach den Axiomen über $^\smile$ und 0

$$0 = 0^{\smile\smile} = (0^\smile + 0)^\smile = 0^{\smile\smile} + 0^\smile = 0 + 0^\smile = 0^\smile.$$

Entsprechend folgt $1^\smile = 1$ aus $1^\smile \leq 1$. Mit (b) der Definition gilt

$$I^\smile;I = I^\smile = I\,;I^\smile,$$

woraus mit (f) und (b) folgt:

$$I = I^{\smile\smile} = (I\,;I^\smile)^\smile = I^{\smile\smile};I^\smile = I\,;I^\smile = I^\smile.$$

(b) Sei $r \leq s$. Dann ist $r + s = s$, also $s^{\smile} = (r + s)^{\smile} = (r^{\smile} + s^{\smile})$, also $r^{\smile} \leq s^{\smile}$. Ist umgekehrt $r^{\smile} \leq s^{\smile}$, so ist auch $r = r^{\smile\smile} \leq s^{\smile\smile} = s$, wie gerade gezeigt.

(e) Das folgt aus (d) und (f) der Definition.

(f) Das folgt aus (e) und dem Teil (d) der Definition.

(i) Sei $r \leq I$. Nach (b) und (a) ist dann auch $r^{\smile} \leq I^{\smile} = I$. Nach (f) ist $r\,;r \leq r\,;I = r$.

(c) Für $\overline{r}^{\smile} = \overline{r^{\smile}}$ ist zu zeigen, daß $\overline{r}^{\smile}$ und $r^{\smile}$ komplementär zueinander sind:

$$\overline{r}^{\smile} + r^{\smile} = (\overline{r} + r)^{\smile} = 1^{\smile} = 1$$

ist klar. Für $\overline{r}^{\smile} \cdot r^{\smile} = 0$ beachte zunächst: aus (b) und $r \cdot s \leq r$ folgt $(r{\cdot}s)^{\smile} \leq r^{\smile}$ und $(r{\cdot}s)^{\smile} \leq s^{\smile}$, und daraus mit der Idempotenz und Monotonie von $\cdot$ auch

$$(r \cdot s)^{\smile} \leq r^{\smile} \cdot s^{\smile}.$$

Damit erhalten wir:

$$r^{\smile} \cdot \overline{r}^{\smile} = (r^{\smile} \cdot \overline{r}^{\smile})^{\smile\smile} \leq (r^{\smile\smile} \cdot \overline{r}^{\smile\smile})^{\smile} = (r \cdot \overline{r})^{\smile} = 0^{\smile} = 0.$$

Nun folgt auch der erste Teil von (c) mit Hilfe von (e):

$$(r \cdot s)^{\smile} = \overline{(\overline{r} + \overline{s})}^{\smile} = \overline{(\overline{r} + \overline{s})^{\smile}} = \overline{(\overline{r}^{\smile} + \overline{s}^{\smile})} = \overline{(\overline{r^{\smile}} + \overline{s^{\smile}})} = r^{\smile} \cdot s^{\smile}.$$

(g) Wir zeigen zuerst $(r\,;s) \cdot t = 0 \leftrightarrow (r^{\smile}; t) \cdot s = 0$: In der Boole'schen Algebra folgt $a \leq \overline{b}$ aus $a \cdot b = 0$. Sei $(r\,;s) \cdot t = 0$. Dann ist

$$\begin{array}{rcll} (r^{\smile}; t) \cdot s & \leq & (r^{\smile}; \overline{(r\,;s)}) \cdot s & \text{wegen } t \leq \overline{(r\,;s)} \\ & \leq & \overline{s} \cdot s = 0 & \text{mit Axiom (g)} \end{array}$$

Ist umgekehrt $(r^{\smile}; t) \cdot s = 0$, so ist analog

$$(r\,;s) \cdot t \leq (r\,; \overline{(r^{\smile}; t)}) \cdot t \leq \overline{t} \cdot t = 0.$$

Wir zeigen nun $(r^{\smile}; t) \cdot s = 0 \leftrightarrow (t\,;s^{\smile}) \cdot r = 0$: Sei zuerst $(t\,;s^{\smile}) \cdot r = 0$. Dann ist $r \leq \overline{(t\,;s^{\smile})}$ und daher

$$\begin{array}{rcl} (r^{\smile}; t) \cdot s & = & ((r^{\smile}; t) \cdot s)^{\smile\smile} \\ & \leq & ((r^{\smile}; t)^{\smile} \cdot s^{\smile})^{\smile} \\ & = & ((t^{\smile}; r) \cdot s^{\smile})^{\smile} \\ & \leq & ((t^{\smile}; \overline{(t\,;s^{\smile})}) \cdot s^{\smile})^{\smile} \\ & \leq & (\overline{s^{\smile}} \cdot s^{\smile})^{\smile} \\ & = & 0^{\smile} = 0. \end{array}$$

Ist umgekehrt $(r^{\smile} ; t) \cdot s = 0$, so ist $s \leq \overline{r^{\smile} ; t}$ und dann

$$\begin{array}{rcll} (t\,; s^{\smile}) \cdot r & \leq & (t\,; \overline{(r^{\smile} ; t)}^{\smile}) \cdot r & \\ & = & (t\,; \overline{(r^{\smile} ; t)^{\smile}}) \cdot r & \text{mit (c)} \\ & = & (t\,; \overline{(t^{\smile} ; r)}) \cdot r & \\ & \leq & \overline{r} \cdot r = 0 & \text{mit Axiom (g).} \end{array}$$

(d) Da 1 maximal ist, gilt $1\,;1 \leq 1$ und $I \leq 1$. Daher ist auch

$$1 = 1 + (1\,;1) = (1\,;I) + (1\,;1) = 1\,;(I+1) = 1\,;1.$$

Nach (g_1) ist

$$r\,;0 = (r\,;0)\cdot 1 = 0 \;\leftrightarrow\; (r^{\smile};1)\cdot 0 = 0,$$

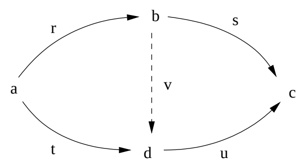
und die rechte Gleichung gilt in der Boole'schen Algebra. Durch Invertierung folgt daraus auch

$$0\,;r = (0\,;r)^{\smile\smile} = (r^{\smile};0^{\smile})^{\smile} = (r^{\smile};0)^{\smile} = 0^{\smile} = 0.$$

(h) Das folgende Bild veranschaulicht, daß die Behauptung

$$(r\,;s)\cdot(t\,;u) \leq r\,;((r^{\smile};t)\cdot(s\,;u^{\smile}))\,;u$$

in der vollen Peirce-Algebra über V gilt, wobei $v = (r^{\smile};t)\cdot(s\,;u^{\smile})$ ist:



(Aber wie kann man die Aussage aus den Axiomen beweisen?)

(j) Wegen $s \cdot I \leq I$ ist $(s\cdot I)\,;r \leq I;r = r$, analog $(s\cdot I)\,;r \leq s\,;r \leq s\,;1 = s$, da s rechtsideal ist. Daraus folgt

$$(s \cdot I)\,;r \leq r \cdot s.$$

Die umgekehrte Ungleichung erhalten wir durch

$$\begin{array}{rcll} r \cdot s & = & s \cdot r & \\ & = & (I\,;s)\cdot(I\,;r) & \\ & \leq & I\,;[(I^{\smile};I)\cdot(s\,;r^{\smile})]\,;r, & \text{mit (h)} \\ & = & [(I\,;I)\cdot(s\,;r^{\smile})]\,;r & \\ & = & [I\cdot(s\,;r^{\smile})]\,;r & \\ & \leq & [I\cdot(s\,;1)]\,;r & \text{mit (f)} \\ & = & (I\cdot s)\,;r, & \text{da } s \text{ rechtsideal ist,} \\ & = & (s\cdot I)\,;r. & \end{array}$$

Die zweite Behauptung folgt daraus über

$$\begin{array}{rcll} r \cdot s^{\smile} & = & (r \cdot s^{\smile})^{\smile\smile} & \\ & = & (r^{\smile} \cdot s)^{\smile} & \text{mit (c)} \\ & = & ((s \cdot I)\,;r^{\smile})^{\smile} & \\ & = & r\,;(s \cdot I)^{\smile} & \\ & = & r\,;(s \cdot I) & \text{mit (i).} \end{array}$$

□

Definition 3.6 Ein Element r einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$ heißt *rechtsideal*, falls $r;1 = r$, *linksideal*, falls $1;r = r$, und r heißt *ideal*, falls $1;r;1 = r$.

Wegen $I \leq 1$ und (f) gelten $r \leq 1\,;r$, $r \leq r\,;1$ und $r \leq 1\,;r\,;1$ für jedes $r \in R$.

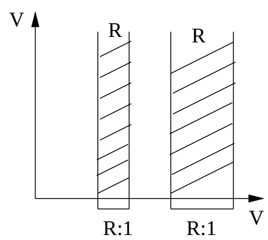
Beispiel 3.7 In der vollen Relationenalgebra $\mathcal{R}(V)$ bedeutet $R\,;1 \leq R$, daß

$$\{\, \langle a,b \rangle \in V \times V \mid \exists c \in V\, R(a,c) \,\} \subseteq R,$$

das heißt, da die umgekehrte Inklusion trivialerweise gilt, daß

$$\{\, a \in V \mid \exists c \in V\, R(a,c) \,\} \times V = (R:1) \times V = R.$$

Also ist R der Rechtszylinder $X \times V$ über der Projektion $X = (R:1)$ von R auf die erste Komponente, den man so darstellen kann:



Lemma 3.8 Sei $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, ^{-}, 0, 1, \,;\,, ^{\smile}, I)$ eine Relationenalgebra. Dann ist $(J, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ eine Boole'sche Algebra, wobei J die Menge der rechtsidealen (oder linksidealen oder idealen) Elemente von $\mathcal{R}$ ist.

Beweis: Wir zeigen es für die Menge $J = \{\, r \in R \mid r\,;1 = r \,\}$ der rechtsidealen Elemente. Nach Satz 3.5 (d) sind 0 und 1 in J. Für $r, s \in J$ ist

$$(r+s)\,;1 = (r\,;1) + (s\,;1) = r + s,$$

also ist auch $(r + s) \in J$. Da $r \in J$ ist, hat man mit Hilfe von Satz 3.5 (j)

$$\begin{aligned}(r \cdot s)\,;1 &= ((s \cdot I)\,;r)\,;1\\ &= (s \cdot I)\,;(r\,;1)\\ &= (s \cdot I)\,;r\\ &= r \cdot s,\end{aligned}$$

und daher auch $(r \cdot s) \in J$. Zum Nachweis von $\overline{r} \in J$ zeigen wir, daß $\overline{r}\,;1$ und r komplementär zueinander sind. Mit Satz 3.5 (d) ist

$$(\overline{r}\,;1) + r = (\overline{r}\,;1) + (r\,;1) = (\overline{r} + r)\,;1 = 1\,;1 = 1.$$

Wegen $r \in J$ erhalten wir aus (g) der Definition

$$r^{\smile};\overline{r} = r^{\smile};\overline{r\,;1} \leq \overline{1} = 0,$$

und daher über (f) der Definition und Monotonie

$$\overline{r}^{\smile};r = \overline{r}^{\smile};r^{\smile\smile} = (r^{\smile};\overline{r})^{\smile} \leq 0^{\smile} = 0.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}(\overline{r}\,;1) \cdot r &= (\overline{r}\,;1) \cdot (r\,;1)\\ &\leq \overline{r}\,;[(\overline{r}^{\smile};r) \cdot (1\,;1^{\smile})]\,;1 && \text{mit (h)}\\ &= \overline{r}\,;[0 \cdot (1\,;1^{\smile})]\,;1\\ &= \overline{r}\,;0\,;1\\ &= 0.\end{aligned}$$

Damit sind $\overline{r}\,;1$ und r komplementäre Elemente von $\mathcal{R}$. Aus einem früheren Lemma über Boole'sche Algebren erhalten wir dann $\overline{r}\,;1 = \overline{r}$, also $\overline{r} \in J$. □

Bemerkung 3.9 (Tarski [12]) Eine Relation R von $\mathcal{R}(V)$ ist

(a) eine surjektive Funktion, falls $R^{\smile};R = I$,

(b) total und injektiv, falls $(R\,;R^{\smile}) = I$.

Die Relationen mit beiden Eigenschaften erfüllen die Axiome der Gruppentheorie. Da die Gruppentheorie unentscheidbar ist, ist es auch die (Horntheorie der) Relationenalgebra.

3.2 Boole'sche Moduln

Boole'sche Algebra und Relationenalgebra behandeln Mengen und Relationen unabhängig und völlig getrennt voneinander. Wir wollen nun eine Verbindung herstellen, die in der natürlichen Sprache ja auch allgegenwärtig ist: Eigenschaften werden als Nomina, Adjektive und intransitive Verben formuliert, Relationen als transitive Verben.

Eine grundlegende Operation erlaubt es, aus einer Relation und einer Menge wieder eine Menge zu bilden, das *Urbild* $R : B$ der Menge B unter der Relation R. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Operation faßt folgende Definition zusammen:

Definition 3.10 (Brink 1988) Ein *Boole'scher Modul* $\mathcal{M} = (\mathcal{B}, \mathcal{R}, :)$ besteht aus

(a) einer Boole'schen Algebra $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$,

(b) einer Relationenalgebra $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, \overline{}, 0, 1, ;, \breve{}, I)$,

(c) und einer Abbildung : von $R \times B$ nach B, so daß für alle $a, b \in B$ und $r, s \in R$ gilt:

  (a) $r : (a + b) = r : a + r : b$,
  (b) $(r + s) : a = r : a + s : a$,
  (c) $r : (s : a) = (r ; s) : a$,
  (d) $I : a = a$,
  (e) $0 : a = 0$,
  (f) $r\breve{} : \overline{(r : a)} \leq \overline{a}$.

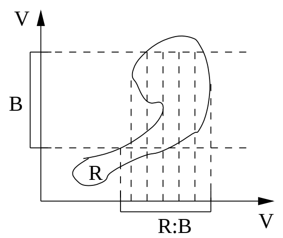
Wegen (a) und (b) ist : monoton in beiden Argumenten. Daraus folgt z.B.

$$\begin{array}{rcl} a = I : a & \leq & 1 : a, \\ (r \cdot s) : a & \leq & (r : a) \cdot (s : a). \end{array}$$

Beispiel 3.11 Der *volle Boole'sche Modul über* V, $\mathcal{M}(V) = (\mathcal{B}(V), \mathcal{R}(V), :)$, besteht aus der vollen Boole'schen Algebra $\mathcal{B}(V)$ mit der vollen Relationenalgebra $\mathcal{R}(V)$ über V und dem *Urbild von* B *unter* R,

$$R : B := \{\, a \in V \mid \exists b \in V (R(a, b) \wedge B(b)) \,\},$$

dem sogenannten *Peirce'schen Produkt*, das man wie folgt darstellen kann:



Die zum Peirce'schen Produkt duale Operation ist die *Peirce'schen Summe*,

$$R \dot{+} B := \overline{\overline{R} : \overline{B}} = \{\, a \in V \mid \forall b \in V(R(a,b) \vee B(b)) \,\}.$$

Man rechnet leicht nach, daß die Axiome gelten. Für die letzte Ungleichung sieht man das wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} a \in R^{\smile} : \overline{R : A} & \Rightarrow & \exists b(R^{\smile}(a,b) \wedge \overline{R : A}(b)) \\ & \Rightarrow & \exists b(R(b,a) \wedge \neg\exists c(c \in A \wedge R(b,c))) \\ & \Rightarrow & a \notin A. \\ & \Rightarrow & a \in \overline{A}. \end{array}$$

Für $R := \emptyset$ und $A := \emptyset$ erhält man wieder $0 = R^{\smile} : \overline{R : A} \neq 1 = \overline{A}$, so daß die Ungleichung nicht zu einer Gleichung verstärkt werden kann.

Proposition 3.12 In einem Boole'schen Modul sind folgende Mengen und Relationen definierbar:

(a) Das *Bild* der Menge A unter der Relation R:

$$R``A := \{\, b \in V \mid \exists a \in V(A(a) \wedge R(a,b)) \,\} = R^{\smile} : A$$

(b) Die 1. und 2. *Projektion* der Relation R:

$$\begin{array}{rcl} dom(R) & := & \{\, a \in V \mid \exists b \in V\, R(a,b) \,\} = R : 1 \\ ran(R) & := & \{\, b \in V \mid \exists a \in V\, R(a,b) \,\} = R``1 \end{array}$$

(c) Das *Feld* der Relation R,

$$\begin{array}{rcl} F(R) & := & \{\, v \in V \mid \exists w \in V(R(v,w) \vee R(w,v)) \,\} \\ & = & dom(R) + ran(R) \end{array}$$

Beispiel 3.13 Aus transitiven Verben und Gemeinnamen erhält man einstellige Prädikate, z.B. für $L = \mathit{liest}, B = \mathit{Buch}$

(a) $\mathit{liest\ ein\ Buch} = \{\, a \mid \exists b(L(a,b) \wedge B(b)) \,\} = L : B$

(b) $\mathit{liest\ alle\ Bücher} = \{\, a \mid \forall b(B(b) \to L(a,b)) \,\} = L \dot{+} \overline{B}$

(c) $\mathit{liest\ nur\ Bücher} = \{\, a \mid \forall b(L(a,b) \to B(b)) \,\} = \overline{L} \dot{+} B$

Entsprechend erhält man aus Relationsnomen und Gemeinnamen wieder Gemeinnamen, z.B. für $A = x$ *stellt* y *an*, $M = \mathit{Museum}$ bzw. $B = \mathit{betrügt}$

(d) $\mathit{Museumsangestellter} = \{\, a \mid \exists b(A(b,a) \wedge M(b)) \,\} = A^{\smile} : M$

(e) $\mathit{Betrüger} = B : 1$, $\mathit{Betrogener} = B^{\smile} : 1$,

wobei im letzten Beispiel das Universum V aus Personen bestehen soll.

3.3 Peirce'sche Algebren

Das Urbild $r : a$ einer Menge a unter der Relation r erlaubt es, aus Mengen und Relationen neue *Mengen* zu konstruieren. Man kann aber auch damit noch nicht alle *Relationen* bilden, die man mit gewissen Grundmengen und Relationen haben möchte. Zum Beispiel hätte man mit zwei Mengen meistens auch gerne ihr kartesisches Produkt, eine zweistellige Relation. Einen einfachen Spezialfall davon führen wir nun als weitere Grundoperation ein:

Definition 3.14 (Britz 1988) Eine *Peirce'sche Algebra* $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ ist ein Boole'scher Modul $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :)$ mit einer Abbildung $^c : \mathcal{B} \to \mathcal{R}$, so daß

(a) für alle $a \in B$ gilt $a^c : 1 = a$, und

(b) für alle $r \in R$ gilt $(r : 1)^c = r\,;1$.

Man nennt a^c die *Rechtszylindrifizierung* von a.

Beispiel 3.15 Die *volle Peirce'sche Algebra über der Menge* V,

$$\mathcal{P}(V) := (\mathcal{B}(V), \mathcal{R}(V), :, ^c),$$

wobei $(\mathcal{B}(V), \mathcal{R}(V), :)$ der volle Boole'sche Modul über V ist und

$$A^c := A \times V \qquad \text{für jedes } A \subseteq V.$$

Dies ergibt eine Peirce'schen Algebra, denn die Axiome sind erfüllt wegen:

$$\begin{aligned} A^c : 1 &= (A \times V) : V = A, \\ (R : 1)^c &= (R : V)^c \\ &= (R : V) \times V \\ &= \{\, a \in V \mid \exists b \in V\, R(a,b) \,\} \times V \\ &= R\,;(V \times V) \\ &= R\,;1. \end{aligned}$$

Proposition 3.16 In einer Peirce'schen Algebra $\mathcal{P}$ hat man Elemente, die sich wie bekannte Mengen und Relationen aus $\mathcal{P}(V)$ verhalten:

(a) das *kartesische Produkt zweier Mengen*:

$$\begin{aligned} A \times B &:= \{\, \langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B \,\} \\ &= (A \times V) \cap (V \times B) \\ &= A^c \cap (B^c)^\smile \end{aligned}$$

(b) die *Vorbeschränkung einer Relation auf eine Menge*:

$$\begin{array}{rcl} R \upharpoonleft A & := & \{ \langle a,b\rangle \mid a \in A, b \in V, R(a,b) \} \\ & = & R \cap (A \times V) \\ & = & R \cap A^c. \end{array}$$

(c) Die *Beschränkung der Identität auf eine Menge*,

$$\begin{array}{rcl} I_A & := & \{ \langle a,a\rangle \mid a \in A \} \\ & = & I \cap (A \times V) \\ & = & I \cap A^c \end{array}$$

Umgekehrt kann man die Rechtszylindrifizierung mit diesen Operationen und denen eines Boole'schen Moduls definieren, z.B:

$$A^c = A \times V = A \times 1, \qquad A^c = (V \times V) \upharpoonleft A \;=\; 1 \upharpoonleft A.$$

Es folgt die Definierbarkeit vieler weiterer Mengen und Relationen, und Zusammenhänge der Mengenoperationen mit $\times$, z.B.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Proposition 3.17 Sei $\mathcal{R}$ eine Relationenalgebra und $\mathcal{B} = (J, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ die Boole'sche Algebra ihrer rechtsidealen Elemente. Dann ist $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ mit

$$r : a \;:=\; r\,;a \qquad \text{und} \qquad a^c \;:=\; a$$

für $a \in J$ und $r \in R$ eine Peirce'sche Algebra.

Beweis: Durch Nachrechnen. □

Lemma 3.18 In jeder Peirce'schen Algebra $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ gilt für alle $a, b \in B$:

(a) $a^c = a^c; 1$, d.h. a^c ist ein rechtsideales Element von R,

(b) $0^c = 0$ und $1^c = 1$,

(c) $(a + b)^c = a^c + b^c$,

(d) $\overline{a}^c = \overline{a^c}$,

(e) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$,

(g) $(r : a)^c = r\,; a^c$,

(f) $a \leq b$ genau dann, wenn $a^c \leq b^c$.

(h) $r : a = b$ genau dann, wenn $r\,;a^c = b^c$,

(i) $r : 1 = 0$ genau dann, wenn $r = 0$.

Beweis:

(a) Nach den Axiomen aus Definition 3.14 ist $a^c = (a^c : 1)^c = a^c\,;1$.

(b) Mit der Moduleigenschaft $0 = 0 : 1$ und der Eigenschaft $0\,;r = 0$ hat man

$$0^c = (0 : 1)^c = 0\,;1 = 0.$$

Analog ist

$$1^c = (1 : 1)^c = 1\,;1 = 1.$$

(c) Wegen $a + b = (a^c : 1) + (b^c : 1) = (a^c + b^c) : 1$ ist

$$(a + b)^c = ((a^c + b^c) : 1)^c = (a^c + b^c)\,;1 = (a^c\,;1) + (b^c\,;1) = a^c + b^c.$$

(g) Wir haben mit den Moduleigenschaften

$$r : a = r : (a^c : 1) = (r\,;a^c) : 1,$$

und daher mit (a)

$$(r : a)^c = ((r\,;a^c) : 1)^c = (r\,;a^c)\,;1 = r\,;(a^c\,;1) = r\,;a^c.$$

(f) Ist $a \leq b$, so ist $a + b = b$, also nach (c) auch $a^c + b^c = (a + b)^c = b^c$, also $a^c \leq b^c$. Gilt umgekehrt $a^c \leq b^c$, so ist $a^c + b^c = b^c$ und daher $a \leq b$ wegen

$$a + b = (a^c : 1) + (b^c : 1) = (a^c + b^c) : 1 = b^c : 1 = b.$$

(h) Aus (f) folgt $a = b \leftrightarrow a^c = b^c$, und daher mit (g):

$$\begin{aligned} r : a = b \quad &\leftrightarrow \quad (r : a)^c = b^c \\ &\leftrightarrow \quad r\,;a^c = b^c. \end{aligned}$$

(i) Nach (h) und (b) gilt $r : 1 = 0$ genau dann, wenn $r\,;1 = 0$. Nach (g) von Satz 3.5 gilt

$$r\,;1 = 0 \leftrightarrow (r\,;1) \cdot 1 = 0 \leftrightarrow (1\,;1^{\smile}) \cdot r = 0 \leftrightarrow r = 0.$$

(d) Wir wollen zeigen, daß a^c und $\overline{a}^c$ komplementär sind; dann folgt $\overline{a}^c = \overline{a^c}$ aus Eigenschaften der Boole'schen Algebra. Wir haben offenbar

$$a^c + \overline{a}^c = (a + \overline{a})^c = 1^c = 1.$$

Für $a^c \cdot \overline{a}^c = 0$ genügt es nach (i), $(a^c \cdot \overline{a}^c) : 1 = 0$ zu zeigen. Aus der Monotonie von $\cdot$ und $:$ folgen

$$(a^c \cdot \overline{a}^c) : 1 \leq (a^c : 1) \quad \text{ und } \quad (a^c \cdot \overline{a}^c) : 1 \leq (\overline{a}^c : 1).$$

Mit der Monotonie und Idempotenz von $\cdot$ und den Peirce-Axiomen folgt:

$$(a^c \cdot \overline{a}^c) : 1 \leq (a^c : 1) \cdot (\overline{a}^c : 1) = a \cdot \overline{a} = 0.$$

(e) Nach den de Morgan'schen Regeln ist mit Hilfe von (c) und (d):

$$(a \cdot b)^c = \overline{\overline{(\overline{a} + \overline{b})}}^c = \overline{(\overline{a} + \overline{b})^c} = \overline{(\overline{a}^c + \overline{b}^c)} = a^c \cdot b^c.$$

$\square$

In der vollen Peirce'schen Algebra $\mathcal{P}(V)$ über V sind die rechtsidealen Relationen $R \subseteq V \times V$ nach Beispiel 3.7 gerade die Rechtszylindrifizierungen $A^c = A \times V$ ihrer Projektionen $A := R : 1$ auf die erste Komponente. Die Abbildung

$$g : 2^V \to \{ R \in 2^{V \times V} \mid R \,;1 \subseteq R \} \qquad \text{mit} \quad g(A) := A^c := (A \times V)$$

ist ein Isomorphismus zwischen Boole'schen Algebren. Das gilt allgemeiner für jede Peirce'sche Algebra:

Satz 3.19 Sei $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ eine Peirce'sche Algebra und J ihre rechtsidealen Elemente. Dann sind die Boole'schen Algebren $\mathcal{B}$ und $(J, +, \cdot, ^-, 0, 1)$ isomorph zu einander.

Beweis: Definiere $g : B \to J$ und $h : J \to B$ durch

$$g(a) \ := \ a^c \qquad \text{und} \qquad h(r) \ := \ r : 1.$$

Nach Lemma 3.18 ist a^c rechtsideal, also $a^c \in J$, und g ein Homomorphismus. Bleibt zu zeigen, daß g bijektiv ist. Für jedes $a \in B$ ist

$$h(g(a)) = h(a^c) = a^c : 1 = a,$$

also ist h surjektiv und g injektiv. Für jedes $r \in J$ ist

$$g(h(r)) = g(r : 1) = (r : 1)^c = r \,; 1 = r,$$

also ist g surjektiv und h injektiv. Damit ist $g = h^{-1}$ eine Bijektion. $\square$

In der vollen Peirce'schen Algebra $\mathcal{P}(V)$ über V entsprechen die Teilrelationen $R \subseteq I$ der Identität den Teilmengen $A \subseteq V$: Die Abbildung

$$h : 2^V \to \{ R \in 2^{V \times V} \mid R \subseteq I \} \qquad \text{mit} \quad h(A) := I_A := I \cap (A \times A)$$

ist ein Isomorphismus zwischen Boole'schen Algebren. Auch das gilt allgemeiner für jede Peirce'sche Algebra, wie der nächste Satz zeigt. Zuerst zeigen wir ein paar Eigenschaften der Elemente $I \cdot a^c$, die den Relationen $I_A = I \cap (A \times V)$ entsprechen:

Lemma 3.20 Sie $\mathcal{P} = (\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, ^c)$ eine Peirce'sche Algebra. Dann gilt für alle $a \in B$ und $r \in R$, mit $I_a := I \cdot a^c$:

(a) I_a ist eine Äquivalenz,

(b) $a^c \cdot r = I_a ; r$ und $a^{c\smile} \cdot r = r ; I_a$,

(c) $I_a : b = a \cdot b$.

Beweis:

(a) Das ist wegen $I_a \leq I$ klar nach (i) von Satz 3.5. Daher gilt auch $I_a{}^\smile = I_a$.

(b) Da a^c ein rechtsideales Element ist, folgt $a^c \cdot r = (a^c \cdot I) ; r = I_a ; r$ aus (j) von Satz 3.5. Die rechte Aussage erhält man daraus durch Invertierung:

$$a^{c\smile} \cdot r = (a^{c\smile} \cdot r)^{\smile\smile} = (a^c \cdot r^\smile)^\smile = (I_a ; r^\smile)^\smile = r ; (I_a)^\smile = r ; I_a.$$

(c) Wir wissen

$$\begin{aligned}(I_a : b)^c &= I_a ; b^c && \text{nach Lemma 3.18 (g)}\\ &= a^c \cdot b^c && \text{nach (b)}\\ &= (a \cdot b)^c && \text{nach Lemma 3.18 (e).}\end{aligned}$$

Daraus folgt $(a^c \cdot I) : b = a \cdot b$ mit (f) von Lemma 3.18.

□

Satz 3.21 Sei $(\mathcal{B}, \mathcal{R}, :, {}^c)$ eine Peirce'sche Algebra und $J := \{ r \in R \mid r \leq I \}$. Dann sind die Boole'schen Algebren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{I} = (J, +, \cdot, \overline{}, 0, I)$ isomorph zu einander, wobei $\overline{r}^{\mathcal{I}} := \overline{r}^{\mathcal{R}} \cdot I$, entsprechend für die anderen Operationen.

Beweis: Definiere $g : B \to J$ durch $g(a) := a^c \cdot I$. Offenbar ist $g(a) \in J$. Daß g ein Homomorphismus ist, folgt aus Lemma 3.18, z.B.

$$g(a + b) = (a + b)^c \cdot I = (a^c + b^c) \cdot I = (a^c \cdot I) + (b^c \cdot I) = g(a) + g(b).$$

Es bleibt zu zeigen, daß g bijektiv ist. Sei $h : J \to B$ durch $h(r) := (r ; 1) : 1$ definiert. Die Funktion g ist injektiv, da mit Lemma 3.20 (b)

$$h(g(a)) = (I_a ; 1) : 1 = (a^c \cdot 1) : 1 = a^c : 1 = a.$$

Um zu zeigen, daß g surjektiv ist, wähle $r \in J$. Dann ist

$$g(h(r)) = ((r ; 1) : 1)^c \cdot I = ((r ; 1) ; 1) \cdot I = (r ; (1 ; 1)) \cdot I = (r ; 1) \cdot I$$

nach den Eigenschaften einer Peirce'schen Algebra und des relativen Produkts. Nach Satz 3.5 (h) ist weiter

$$\begin{aligned}
(r\,;1)\cdot I &= (r\,;1)\cdot(I\,;I)\\
&\leq r\,;[(r^{\smile};I)\cdot(1\,;I^{\smile})]\,;I\\
&\leq r\,;(r^{\smile}\cdot 1)\\
&= r\,;r^{\smile}\\
&\leq r\,;I^{\smile} \qquad \text{wegen } r\leq I\\
&= r\,;I = r.
\end{aligned}$$

Umgekehrt ist wegen $r \leq I$ und den Monotonieeigenschaften auch

$$r = r\cdot I = (r\,;I)\cdot I \leq (r\,;1)\cdot I,$$

also insgesamt $g(h(r)) = (r\,;1)\cdot I = r$ und daher g surjektiv. □

Bemerkung 3.22 Ein zum Satz von Stone analoges Resultat gibt es nicht: nicht jede Relationenalgebra $\mathcal{R}$ kann in die volle Relationenalgebra $\mathcal{R}(V)$ über einer passenden Menge V eingebettet werden.

Während man in den Relationenalgebren $\mathcal{R}$ nach Tarski nur zweistellige Relationen und in der Peirce'schen Algebra nur ein- und zweistellige Relationen über einer Grundmenge M betrachtet, ist die Algebra der mehrstelligen Relationen über M bisher nur ansatzweise untersucht.

Bemerkung 3.23 Jeden Term der Peirce'schen Algebra kann man in eine Aussage der erststufigen Prädikatenlogik übersetzen, die nur ein- und zweistellige Relationssymbole verwendet. Aber nicht jeder solchen Aussage entspricht ein Term der Peirce'schen Algebra: Tarski[12] gibt (für die Relationenalgebra) das Beispiel

$$\forall x\forall y\forall z\exists m\,(r(x,m)\wedge r(y,m)\wedge r(z,m))$$

an, dem wohl die geometrische Interpretation *Je drei Punkte liegen auf einem Kreis r um einen Punkt m* zu Grunde liegt.

Die Terme der Peirce'schen Algebra erlauben nur eine eingeschränkte Form der Quantifizierung über Individuen, die der Verwendung der Quantoren *einige* und *alle* in der natürlichen Sprache besser zu entsprechen scheint als die Ausdrucksmöglichkeiten der Prädikatenlogik.

Dieser Abschnitt stützt sich wesentlich auf die Arbeit von C.Brink, K.Britz und R.A.Schmidt [3]. Ergänzt wurde der Beweis von Satz 3.5, die Beispiele zur natürlichen Sprache, und der Beweis von Lemma 3.18 (d) ist korrigiert.

4 Prädikatenlogik erster Stufe

In der Prädikatenlogik (erster Stufe) erweitert man die Aussagenlogik in zweierlei Weisen:

(a) statt der Aussagenvariablen (oder zusätzlich zu ihnen) werden atomare Aussagen betrachtet, die aus einem Prädikat und einer Folge von Bezeichnungen für Objekte zusammengesetzt sind, und

(b) neben den Junktoren werden die *Quantoren* $\forall$ (*für alle Objekte*) und $\exists$ (*es gibt mindestens ein Objekt*) behandelt.

Man kann die Aussagenlogik auch nur um (a) erweitern, aber (b) macht ohne (a) keinen Sinn. Früher sprach man deshalb (etwas genauer) von der *Quantorenlogik*.

4.1 Syntax

Wir gehen von einer Menge *Var* von (Objekt- oder Individuen-)*variablen*, einer Menge Fn von Funktionszeichen und einer Menge Pr von Prädikatszeichen aus. Jedes $f \in Fn$ und jedes $p \in Pr$ hat eine *Stelligkeit*, $n_f \in \mathbb{N}$ bzw. $n_P \in \mathbb{N}$.

Definition 4.1 Die Menge der *Terme* ist die kleinste Menge *Tm* mit:

(a) jede Variable ist in *Tm*,

(b) ist $f \in Fn$ und sind $t_1, \ldots, t_{n_f}$ in *Tm*, so ist $f(t_1, \ldots, t_{n_f})$ in *Tm*.

Die Menge der *prädikatenlogischen Formeln* ist die kleinste Menge *Fml* mit:

(a) sind s und t Terme, so ist $s = t$ in *Fml*,

(b) ist $P \in Pr$ und sind $t_1, \ldots, t_{n_P}$ Terme, so ist $P(t_1, \ldots, t_{n_P})$ in *Fml*,

(c) sind φ und ψ in *Fml*, so auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$,

(d) ist φ in *Fml* und x eine Variable, so sind auch $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$ in *Fml*.

Bei zweistelligen Prädikaten schreibt man das Prädikatszeichen oft zwischen die Argumente, also sRt statt $R(s,t)$, insbesondere bei $s = t$ oder Vergleichsrelationen: $s < t$, $s \leq t$, $s > t$, $s \geq t$.

Die Formel $\neg s = t$ schreibt man meistens als $s \neq t$ oder zumindest als $\neg(s = t)$, damit sie besser lesbar ist; entsprechend: $s \not< t$, $s \not\leq t$, $s \not> t$, $s \not\geq t$.

Jeder Quantor in einer Formel hat einen *Wirkungsbereich* und *bindet* eine Variable. Für $Q \in \{\exists, \forall\}$ ist in $Qx\varphi$, grob gesagt, φ der Wirkungsbereich von Qx

und x die von $Q \in \{\forall, \exists\}$ gebundene Variable. Genauer gesagt ist der Wirkungsbereich von Qx in $Qx\varphi$ die Teilformel φ *außer* ihren Teilformeln der Form $\exists x\psi$ und $\forall x\psi$, und nur diejenigen Vorkommen von x in φ, die im Wirkungsbereich von Qx liegen, werden durch Qx gebunden.

Für viele Zwecke genügt es, zu wissen, welche Variablen irgendwo in einer Formel gebunden oder ungebunden (frei) vorkommen:

Definition 4.2 Die Menge $\mathit{frei}(\varphi)$ der *in φ frei vorkommenden* Variablen ist induktiv über den Aufbau der Formeln φ (und Terme t) definiert:

- $\mathit{frei}(t) = \mathit{Var}(t)$,
- $\mathit{frei}(s = t) = \mathit{frei}(s) \cup \mathit{frei}(t)$,
- $\mathit{frei}(P(t_1, \ldots, t_{n_P})) = \bigcup\{\, \mathit{frei}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n \,\}$,
- $\mathit{frei}(\neg\varphi) = \mathit{frei}(\varphi)$,
- $\mathit{frei}(\varphi \wedge \psi) = \mathit{frei}(\varphi \vee \psi) = \mathit{frei}(\varphi \to \psi) = \mathit{frei}(\varphi) \cup \mathit{frei}(\psi)$,
- $\mathit{frei}(\exists x\varphi) = \mathit{frei}(\forall x\varphi) = \mathit{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$.

Die Menge $\mathit{geb}(\varphi)$ der *in φ gebunden vorkommenden* Variablen ist ebenfalls induktiv über den Aufbau der Formeln φ (und Terme t) definiert:

- $\mathit{geb}(t) = \emptyset$,
- $\mathit{geb}(s = t) = \mathit{geb}(s) \cup \mathit{geb}(t)$,
- $\mathit{geb}(P(t_1, \ldots, t_{n_P})) = \bigcup\{\, \mathit{geb}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n \,\}$,
- $\mathit{geb}(\neg\varphi) = \mathit{geb}(\varphi)$,
- $\mathit{geb}(\varphi \wedge \psi) = \mathit{geb}(\varphi \vee \psi) = \mathit{geb}(\varphi \to \psi) = \mathit{geb}(\varphi) \cup \mathit{geb}(\psi)$,
- $\mathit{geb}(\exists x\varphi) = \mathit{geb}(\forall x\varphi) = \mathit{geb}(\varphi) \cup \{x\}$.

Definition 4.3 Der *(Quantoren-) Rang* einer Formel φ, die maximale Anzahl der in φ in einander geschachtelt vorkommenden Quantoren, wird induktiv definiert durch:

- $\mathit{Rang}(\varphi) = 0$, falls φ eine atomare Formel ist,
- $\mathit{Rang}(\neg\varphi) = \mathit{Rang}(\varphi)$,
- $\mathit{Rang}(\varphi \wedge \psi) = \mathit{Rang}(\varphi \vee \psi) = \mathit{Rang}(\varphi \to \psi) = \max\{\mathit{Rang}(\varphi), \mathit{Rang}(\psi)\}$,
- $\mathit{Rang}(\exists x\varphi) = \mathit{Rang}(\forall x\varphi) = 1 + \mathit{Rang}(\varphi)$.

Beispiel 4.4 Für $\varphi = \forall x(\forall y(x \leq y \wedge y \leq z \to x = y \wedge y = z) \to \forall z\ x = z)$ ist $frei(\varphi) = \{z\}$ und $geb(\varphi) = \{x, y, z\}$; insbesondere ist hier $frei(\varphi) \cap geb(\varphi) \neq \emptyset$.

Der Quantorenrang von φ ist $Rang(\varphi) = 2$.

Bemerkung 4.5 In den natürlichen Sprachen hat man keine Variablen, aber Personalpronomina und Relativpronomina (sowie Pronominaladverbien) fungieren in gewisser Weise wie Variable. Zum Beispiel ist in

> *Die Leute, die sich nicht mögen, mögen auch keine anderen.*
> *Die Leute, die sich nicht grüßen, mögen sich nicht.*

der bestimmte Artikel 'die' implizit ein $\forall$-Quantor, und das Relativpronomen 'die' sowie das Reflexivpronomen 'sich' beziehen sich auf die durch diesen Quantor gebundenen (nicht explizit erscheinenden) Variablen.

Gleichzeitig ist das Reflexivpronomen 'sich' mehrdeutig: im ersten Satz ist 'sich' betont und meint 'sich selbst', im zweiten Satz ist 'sich' unbetont und meint 'einander'. Daher wird im ersten Satz implizit nur ein Quantor $\forall x$ benötigt, im zweiten dagegen zwei Quantoren, $\forall x \forall y$.

In anderen Fällen wird durch verschiedene Pronomina klar gemacht, wie die Bezüge gemeint sind:

> *Er wunderte sich, daß niemand sich entschuldigt hatte.*
> *Er wunderte sich, daß niemand ihn entschuldigt hatte.*

Beachte aber, daß hier der zweite Satz noch mehrdeutig ist: das Personalpronomen 'ihn' im eingebetteten Teilsatz bezieht sich entweder auf das Subjekt 'er' des Hauptsatzes oder auf eine vorher genannte andere Person.

Da sich die Personalpronomina der eingebetteten Sätze auf Nomina von übergeordneten Sätzen beziehen, kann man auch diese als Operatoren ansehen, die gewisse Vorkommen von Personalpronomina binden. Aber es ist nicht offensichtlich und auch nicht eindeutig, was der Wirkungsbereich ist bzw. wie die Bindungen gemeint sind:

> *Herr Huber fragt sich, ob Herr Meyer sich wundert, daß niemand ihn entschuldigt hatte.*

Man kann mit 'ihn' Herrn Huber oder Herrn Meyer (oder einen Dritten) meinen.

Übersetzungen zwischen Aussagen der natürlichen Sprache und Formeln der Prädikatenlogik

Wir geben hier kein Übersetzungsprogramm an, sondern zeigen an einem Beispiel, wie Aussagen der natürlichen Sprache durch logische Formeln ausgedrückt werden.

Beispiel 4.6 Die Axiome der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel geben wir zuerst in der Umgangssprache und dann durch logische Formeln wieder. Die logische Sprache enthält nur ein zweistelliges Prädikat, die Elementbeziehung $\in$. Die Mengen sind hier die Objekte, über die man spricht; daher stehen alle Variable für Mengen (und deren Elemente sind wieder Mengen).

Die meisten Axiome verlangen, daß bestimmte Mengen existieren; aber man hat in der logsichen Sprache keine Namen dafür. Im Vereinigungsaxiom z.B. wird zu jeder Menge x die Existenz der Menge

$$\bigcup x := \{\, z \mid \exists v(z \in v \wedge v \in x)\,\}$$

verlangt; da man in den Axiomen mit möglichst wenig Funktions- und Realtionszeichen auskommen will, hat man nur die Variable y zur Bezeichnung von $\{\, z \mid \exists v(z \in v \wedge v \in x)\,\}$, denn auch $\{\, z \mid \psi\,\}$ ist nur eine Abkürzung. Daher sieht das Vereinigungsaxiom zunächst etwas unverständlich aus. Für $x = \{v_1, v_2\}$ ist $\bigcup x$ die Menge, die man sonst meist $v_1 \cup v_2$ schreibt.

(a) (Extensionalitätsaxiom) Je zwei Mengen, die dieselben Elemente enthalten, sind gleich:

$$\forall x\ \forall y\ (\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

(b) (Aussonderungsschema, für jede Formel $\varphi(\vec{u}, x, z)$) Sondert man aus einer Menge x alle Elemente z aus, die die Eigenschaft $\varphi(\vec{u}, x, z)$ haben, so erhält man wieder eine Menge, y:

$$\forall \vec{u}\ \forall x\ \exists y\ \forall z(z \in y\ \leftrightarrow\ (z \in x \wedge \varphi(\vec{u}, x, z))).$$

Man bezeichnet die Gesamtheit der ausgesonderten Elemente auch mit $\{z \mid z \in x \wedge \varphi(\vec{u}, x, z)\}$ oder kurz $\{z \in x \mid \varphi(\vec{u}, x, z)\}$. Das Axiom besagt also:

$$\forall \vec{u}\ \forall x\ \text{“}\{z \in x \mid \varphi(\vec{u}, x, z)\} \text{ ist eine Menge”}.$$

(c) (Vereinigungsaxiom) Hat man eine Menge von Mengen und faßt man alle Elemente dieser Mengen zusammen, so erhält man wieder eine Menge:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z(z \in y\ \leftrightarrow\ \exists v(v \in x \wedge z \in v)).$$

Mit anderen Worten:

$$\forall x\ \text{“}\{z \mid \exists v(v \in x \wedge z \in v)\} \text{ ist eine Menge”}.$$

(d) (Potenzmengenaxiom) Die Gesamtheit aller Teilmengen z einer Menge x bildet eine Menge, y:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z(z \in y\ \leftrightarrow\ z \subseteq x).$$

Mit anderen Worten:

$$\forall x \text{ “}\{z \mid z \subseteq x\} \text{ ist eine Menge”}.$$

Hierbei verwenden wir die Abkürzung

$$z \subseteq x \;:\leftrightarrow\; \forall v(v \in z \;\rightarrow\; v \in x).$$

(e) (Ersetzungsaxiom) Ersetzt man die Elemente z einer Menge x durch andere, ihnen durch eine Funktion f zugeordnete Objekte $f(z)$, so erhält man wieder eine Menge:

$$\forall x\, \forall f(\text{“}f \text{ ist eine Funktion”} \rightarrow \text{ “}\{f(z) \mid z \in x\} \text{ ist eine Menge”}).$$

Auf die genaue Formulierung wollen wir hier verzichten, bis wir den Begriff der Funktion in der Mengenlehre ausdrücken können.

(f) (Fundierungsaxiom) Jede nicht leere Menge x enthält ein Element y, dessen Elemente z keine Elemente von x sind:

$$\forall x(\exists y(y \in x) \;\rightarrow\; \exists y \in x\; \forall z \in y\; z \notin x).$$

Hier haben wir von den Abkürzungen

$$\exists y \in x\; \varphi :\leftrightarrow\; \exists y(y \in x \wedge \varphi) \qquad \text{und} \qquad \forall y \in x\; \psi :\leftrightarrow\; \forall y(y \in x \rightarrow \psi)$$

Gebrauch gemacht.

(g) (Unendlichkeitsaxiom) Es gibt eine Menge mit unendlich vielen Elementen, genauer gesagt, es gibt eine Menge x, die die leere Menge enthält und mit jedem Element y auch die Vereinigungsmenge von $\{y\}$ mit y:

$$\exists x(\; \exists y \in x\; \forall z\; (z \notin y) \wedge\; \forall y \in x\; \exists z \in x\; \forall v(v \in z \leftrightarrow (v \in y \vee v = y))).$$

3.2 Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe

Zur Interpreation der der L-*Terme* und L-*Formeln*, d.h. der Terme und Formeln der Prädikatenlogik mit dem Vokabular $L = Fn \cup Pr$ von Funktions- und Relationszeichen, brauchen wir L-Stukturen (zur Festlegung des Objektbereichs und der Interpretation der Funktions- und Relationszeichen) und Belegungen (zur Interpetation der Variablen):

Definition 3.7 Sei $L = Fn \cup Pr$ das Vokabular der Funktions- und Relationszeichen. Eine L-*Struktur* $\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}})_{f \in Fn, P \in Pr}$ besteht aus

(a) einer Menge $M \neq \emptyset$,

(b) einer Funktion $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \rightarrow M$ für jedes $f \in Fn$, und

(c) einer Relation $P^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_P}$ für jedes $P \in Pr$.

Eine *Belegung (der Variablen) über* $\mathcal{M}$ ist eine Abbildung $g : Var \to M$.

Eine *Relationalstruktur* ist eine L-Struktur mit $Fn = \emptyset$ (ggf. erlaubt man noch Individuenkonstanten, d.h. 0-stellige Funktionssymbole). Ein *Graph* ist eine Relationalstruktur $\mathcal{M} = (M, K)$ mit einer 2-stelligen Relation $K \subseteq M \times M$; jedes $(a, b) \in K$ heißt *Kante*. Eine *Algebra* ist eine L-Struktur mit $Pr = \emptyset$.

Beispiel 3.8 $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, *)$ und $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, 0)$ sind Algebren derselben Sprache $L = Fn = \{0, 1, +, *\}$, wobei $0, 1$ 0-stellig und $+, *$ 2-stellig sind.

Sei Σ^* die Menge aller endlichen Folgen (oder *Wörter*) über der Menge (oder dem *Alphabet*) Σ, und $\leq_{lex}$ die lexikographische Anordnung auf Σ^*, relativ zu einer Anordnung $<$ auf Σ. Dann ist $\mathcal{M} = (\Sigma^*, \leq_{lex})$ eine Relationalstruktur.

Definition 3.9 Der *Wert* $[\![t]\!]_g^{\mathcal{M}}$ eines Terms t in der Struktur M bezüglich der Belegung g ist induktiv über den Aufbau der Terme definiert durch:

(a) $[\![x]\!]_g^{\mathcal{M}} = g(x) \in M$,

(b) $[\![f(t_1, \ldots, t_{n_f})]\!]_g^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]_g^{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_{n_f}]\!]_g^{\mathcal{M}})$.

Der *Wert* $[\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}}$ einer Formel φ in der Struktur $\mathcal{M}$ bezüglich der Belegung g ist induktiv über den Aufbau der Formeln definiert durch:

(a) $[\![s = t]\!]_g^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![s]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![t]\!]_g^{\mathcal{M}}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$

(b) $[\![P(t_1, \ldots, t_{n_P})]\!]_g^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } ([\![t]\!]_1, \ldots, [\![t]\!]_{n_P}) \in P^{\mathcal{M}}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$

(c) $[\![\neg\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} = 1 - [\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}}$,

(d) $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} \sqcap [\![\psi]\!]_g^{\mathcal{M}}$,

(e) $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} \sqcup [\![\psi]\!]_g^{\mathcal{M}}$,

(f) $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} \sqsubseteq [\![\psi]\!]_g^{\mathcal{M}}$,

(g) $[\![\exists x\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]_{g(x/a)}^{\mathcal{M}} = 1 \text{ für mindestens ein } a \in M, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$

(h) $[\![\forall x\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]_{g(x/a)}^{\mathcal{M}} = 1 \text{ für alle } a \in M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Hierbei ist $g(x/a)$ die Belegung h mit $h(y) = \begin{cases} a, & \text{falls } y = x, \\ g(y) & \text{sonst.} \end{cases}$

Wie bei der Auswertung von Formeln der Aussagenlogik hängen der Wert von φ nicht von allen Details einer Interpretation oder Belegung ab:

Lemma 3.10 (Koinzidenzlemma) Der Wert eines Terms t bzw. einer Formel φ bei der Interpretation $\mathcal{M}$ und der Belegung g hängt nicht von den Werten $g(x)$ für $x \notin \mathit{frei}(t)$ bzw. $x \notin \mathit{frei}(\varphi)$ ab, und auch nicht von den Interpretationen $f^{\mathcal{M}}$ und $P^{\mathcal{M}}$ der Funktions- und Prädikatszeichen f und P, die in t bzw. φ nicht vorkommen.

Beweis: Durch Induktion über den Term- und Formelaufbau. (Übung!) □

Man schreibt $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ für eine Belegung g mit $g(x_1) = a_1, \ldots, g(x_n) = a_n$, wenn klar ist, daß es auf die Werte von g auf anderen Variablen nicht ankommt, also für $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ z.B.

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{[x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n]} \quad \text{statt} \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_g.$$

Man schreibt $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, wenn $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und φ als Aussage über n Objekte betrachtet wird. Für $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ benutzt man auch

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad :\Longleftrightarrow \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{[x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n]} = 1 \tag{8}$$

$$\mathcal{M} \not\models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \quad :\Longleftrightarrow \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{[x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n]} = 0 \tag{9}$$

gelesen: *In $\mathcal{M}$ gilt φ bei der Belegung* $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ für (8).

Definition 3.11 Eine Relation $R \subseteq M^n$ auf dem Objektbereich einer L-Struktur $\mathcal{M}$ heißt (mit den Parametern $a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$) *definierbar*, wenn es eine L-Formel $\varphi(a_1, \ldots, a_{n+k})$ gibt, so daß

$$R = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \mid \mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+k}/a_{n+k}] \,\}.$$

Ist hierin $k = 0$, so heißt R *ohne Parameter definierbar.*

Die durch $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ohne Parameter definierte Relation bezeichnen wir mit

$$\varphi^{\mathcal{M}} := \{\, (a_1, \ldots, a_n) \mid \mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \,\}$$

Beispiel 3.12 In $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist die Menge $P = \{\, r \mid r \in \mathbb{R}, 0 < r \,\}$ der positiven rellen Zahlen ohne Parameter definierbar, nämlich durch

$$\varphi(x) := \exists y(x = y \cdot y) \wedge \exists z(x \cdot z \neq x).$$

Denn eine reelle Zahl ist genau dann positiv, wenn sie eine Quadratzahl, aber nicht die 0 ist.

Beispiel 3.13 Sei $\Sigma = \{a, \ldots, z, A, \ldots, Z\}$ das Alphabet der üblichen Buchstaben und

$$\mathcal{M} = (\Sigma^*, \cdot^{\mathcal{M}}, V^{\mathcal{M}}, \ldots, Adv^{\mathcal{M}})$$

die Struktur, bei der $\cdot^{\mathcal{M}}$ die Verkettung von Wörtern (= Buchstabenfolgen) ist und $V^{\mathcal{M}}, N^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}}, Adj^{\mathcal{M}}, Adv^{\mathcal{M}}$ die Mengen der deutschen Verben, Nomina, Präpositionen, Adjektive und Adverbien (bzw. die Menge ihrer Vollformen) sind. Wahrscheinlich ist die Menge $S \subseteq \Sigma^*$ der deutschen Aussagesätze[3] in $\mathcal{M}$ nicht definierbar, aber ein genauer Beweis dafür ist (mir) nicht bekannt.

Definition 3.14 Zwei L-Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ sind zueinander *elementar k-äquivalent*, in Zeichen: $\mathcal{M} \equiv_k \mathcal{M}'$, wenn

$$\mathcal{M} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}' \models \varphi$$

für alle L-Aussagen φ mit Quantorenrang $\leq k$ gilt. $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ sind *elementar äquivalent* zu einander, kurz: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$, wenn $\mathcal{M} \equiv_k \mathcal{M}'$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.

$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ besagt, daß sich $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ nicht durch elementare, d.h. erststufige, Aussagen unterscheiden lassen.

Beispiel 3.15 Sei $\mathcal{N}_m = (N_m, , <^{\mathcal{N}_m})$ mit $N_m := \{0, 1, \ldots, m-1\}$ und $<^{\mathcal{N}_m}$ die Einschränkung von $<^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $N_m \times N_m$. Wir werden später noch sehen, daß $\mathcal{N}_m \equiv_k \mathcal{N}_{m+1}$ ist, wenn $m > 2^{k+1}$ ist.

Daraus folgt: durch keine erststufige Aussage mit $L = \{<\}$ kann man

„$<$ ist eine lineare Anordnung einer <u>geraden</u> Anzahl von Objekten“

ausdrücken. Denn angenommen, man kann es durch φ ausdrücken. Sei $k = \mathit{Rang}(\varphi)$ und $m > 2^{k+1}$ eine gerade Zahl. Dann ist N_m eine lineare Anordnung einer geraden Anzahl von Objekten, und folglich $\mathcal{N}_m \models \varphi$. Da $m+1$ ungerade ist, erhalten wir $\mathcal{N}_{m+1} \models \neg\varphi$. Aber wegen $\mathcal{N}_m \equiv_k \mathcal{N}_{m+1}$ müßte

$$\mathcal{N}_m \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{N}_{m+1} \models \varphi$$

gelten, ein Widerspruch. Also gibt es ein solches φ nicht.

[3] mit beliebig tiefer Schachtelung (oder beliebig langen Konjunktionen) von Teilsätzen oder Nominalausdrücken usw. – denn sonst ist S endlich und zumindest mit Parametern definierbar.

3.3 Verallgemeinerte Quantifizierungen

Wie der Name andeutet, besagen die Quantoren Q in $Qx\varphi$ etwas über die Quantität aus, und zwar über die bei einer Interpretation $\mathcal{M}$ durch $\varphi(x)$ –hier einfachheitshalber ohne Parameter– definierte Menge $\varphi^{\mathcal{M}}$:

- $\exists x\varphi$ soll bei $\mathcal{M}$ wahr sein, wenn $\varphi^{\mathcal{M}}$ mindestens ein Objekt enthält, also Größe $\neq 0$ hat,
- $\forall x\varphi$ soll bei $\mathcal{M}$ wahr sein, wenn $\varphi^{\mathcal{M}}$ alle Objekte enthält, also maximale Größe hat.

Die Quantoren machen also eine Aussage über die Anzahl $|\varphi^{\mathcal{M}}|$ von φ^{M}. Wir betrachten im Folgenden modifizierte und verallgemeinerte Quantoren.

Zahlquantoren

Oft möchte man sagen, daß die Größe von φ^{M} *mindestens, höchstens* oder *genau* n ist, für eine bestimmte Zahl $n \in \mathbb{N}$. Dazu braucht man keine neuen Quantoren, sondern kann folgende Abkürzungen benutzen:

(a) $\exists^{\geq n} x\varphi := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1\leq i,j\leq n, i\neq j}(x_i \neq x_j \wedge \varphi(x/x_i))$

(b) $\exists^{\leq n}\varphi := \forall x_1 \ldots \forall x_{n+1}(\bigwedge_{1\leq i\leq n+1} \varphi(x/x_i) \to \bigvee_{1\leq i<j\leq n+1} x_i = x_j)$

(c) $\exists^{=n} x\varphi := \exists^{\leq n} x\varphi \wedge \exists^{\geq n} x\varphi.$

Manchmal möchte man sagen, daß $\varphi^{\mathcal{M}}$ *endlich* oder *unendlich groß* ist. Das kann man nicht mehr in der Prädikatenlogik erster Stufe (in höheren Stufen geht es); dann führt man neue Quantoren ein:

(a) $\exists^{<\infty} x\varphi =$ *es gibt nur endlich viele x mit φ*

(b) $\exists^{\infty} x\varphi =$ *es gibt unendlich viele x mit φ.*

Für solche, nicht durch Abkürzung eingeführten Quantoren muß man die erlaubten Interpretationen so definieren, daß die Quantoren die gewünschte Bedeutung haben.

Neben diesen einstelligen Zahlquantoren kann man auch *vergleichende Zahlquantoren* betrachten:

(a) $Q^{<}x(\varphi, \psi) =$ *es gibt weniger x mit der Eigenschaft φ als solche mit ψ*

(b) $Q^{>}x(\varphi, \psi) =$ *es gibt mehr x mit der Eigenschaft φ als solche mit ψ*

(c) $Q^{=}x(\varphi, \psi) =$ *es gibt genau so viele x mit φ wie solche mit ψ*

Z.B. kann man bei einer Interpretation in $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, +, 1)$ (auch *ohne* $\exists^\infty$) durch

$$Q^= x(\exists y(x = y + y), \exists z(x = z + z + 1))$$

ausdrücken, daß es genau so viele gerade wie ungerade Zahlen gibt.

Beschränkte Quantoren

In der natürliche Sprache quantifiziert man –im Unterschied zur Mathematik– in derselben Aussage oft über Objekte verschiedener Arten wie Gegenstände, Personen, Zeitpunkte, Orte usw., indem man z.B. sagt

> *alle Gegenstände, jede Person, zu manchen Zeiten, an vielen Orten,*
> *in den meisten Fällen, alle drei Versuche, ...*

Die Quantoren laufen nicht *unbeschränkt* über eine 'Universum' aller Objekte, sondern werden auf Teilbereiche G, P, Z, O, F usw. beschränkt. Es wäre also natürlich, wenn man auch in der Prädikatenlogik statt der unbeschränkten Quantifizierung $\forall x$ und $\exists x$ die *auf einen Teilbereich P beschränkte Quantifizierung* $\forall x \in P$ und $\exists x \in P$ hätte. Die einander syntaktisch ähnlichen Aussagen

> *<u>Eine</u> Person, die im Parkverbot parkte, bekam keinen Strafzettel.*
> *Jede Person, die im Parkverbot parkte, bekam keinen Strafzettel.*

könnte man dann durch syntaktisch einander ebenfalls ähnliche Formeln

$$\exists x \in P\, \varphi \qquad \textit{bzw.} \qquad \forall x \in P\, \varphi \tag{10}$$

wiedergeben. Das macht man in der Prädikatenlogik nicht, da man die gewünschte Beschränkung auch durch die Abkürzungen

$$\exists x \in P\, \varphi := \exists x(P(x) \land \varphi) \qquad \textit{bzw.} \qquad \forall x \in P\, \varphi := \forall x(P(x) \to \varphi) \tag{11}$$

erreichen kann, wenn man einstellige Prädikate P für die entsprechenden Teilbereiche hat. (Beachte, daß die Formeln einander nicht mehr so stark gleichen!)

In mathematischen Texten findet man oft einen Spezialfall der beschränkten Quantoren:

$$\exists x < t\, \varphi := \exists x(x < t \land \varphi) \qquad \text{und} \qquad \forall x < t\, \varphi := \forall x(x < t \to \varphi) \tag{12}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $x \notin \mathit{frei}(t)$ ist. Hier ist der Teilbereich P durch die Formel $P(x) := x < t$ relativ zu einem Element t definiert. Analog sind die auch üblichen Abkürzungen $\exists x \leq t\, \varphi, \exists x > t\, \varphi, \exists x \geq t\, \varphi, \exists x \neq t\, \varphi$ und die zugehörigen $\forall$-Versionen zu definieren.

Verallgemeinerte Quantoren

Nun gibt es in den natürlichen Sprachen viele Quantoren, die man nicht durch $\exists, \forall$ oder die bisher genannten Varianten davon ausdrücken kann, etwa *die meisten*, *viele*, *nur wenige*, *ein Drittel aller*[4]. Daneben gibt es unter den Adverbien viele 'versteckte' Quantoren:

(a) *oft = zu vielen Zeitpunkten*,

(b) *häufig = in vielen Fällen*,

(c) *meistens = in den meisten aller Fälle*,

(d) *immer wieder = jedesmal, wenn ..., dann später noch einmal*,

(e) *immer öfter = in jedem Zeitraum ... zu mehr Zeitpunkten als in früheren Zeiträumen (gleicher Größe)*

Ob und wie man solche Quantoren definieren kann, ist nicht mehr offensichtlich. Man kann sich aber fragen, was denn überhaupt ein Quantor ist? Alle bisherigen einstelligen Quantoren $Qx\varphi$ drücken *Eigenschaften der Menge* $\varphi^{\mathcal{M}}$ *aus*, bei einer Interpretation $\mathcal{M}$, und die zweistelligen Quantoren $Qx(\varphi, \psi)$ drückten eine Beziehung zwischen $\varphi^{\mathcal{M}}$ und ψ^{M} aus. Daher definiert man:

Definition 3.16 Ein *k-stelliger verallgemeinerter Quantor* über einer Menge M ist eine k-stellige Relation $Q^M \subseteq 2^M \times \cdots \times 2^M$ zwischen Teilmengen von M. Die Bedeutung von $Qx(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(x_1, \ldots, x_n)$ bei einer Interpretation $\mathcal{M} = (M, Q^M, \ldots)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} &\mathcal{M} \models Qx(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] :\iff (A_1, \ldots, A_n) \in Q^M \\ &\text{für} \quad A_i := \{\, a \in M \mid \mathcal{M} \models \varphi_i[x/a, x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n] \,\} \end{aligned}$$

Mit $\exists^M := \{\, A \mid A \subseteq M, A \neq \emptyset \,\}$ und $\forall^M := \{\, A \mid A \subseteq M, A = M \,\}$ kommt für $Q = \exists, \forall$ die gewünschte Bedeutung heraus.

Ein verallgemeinerter Quantor wird hier zunächst semantisch definiert; schreibt man $Q(A, B)$ für $(A, B) \in Q^M$, so hat man auch für Teilmengen von M, die *nicht* durch Formeln definierbar sind:

$$\begin{aligned} \exists(A) &\iff A \neq \emptyset, && (13)\\ \forall(A) &\iff A = M, && (14)\\ \exists^{\leq n}(A) &\iff |A| \leq n, && (15)\\ \exists^{\infty}(A) &\iff |A| = \infty, && (16)\\ Q^{<}(A, B) &\iff |A| < |B|, && (17)\\ Q^{3*}(A, B) &\iff |A| = 3|B|, && (18) \end{aligned}$$

[4] was aber nicht gleichbedeutend ist mit *jeder dritte*, wenn man sich damit (implizit) auf eine bestimmte Anordnung aller Objekte bezieht: *Jede zehnte Zahl* < 101 *ist durch 2 teilbar* bedeutet nicht dasselbe wie *ein Zehntel aller Zahlen* < 101 *ist durch 2 teilbar*.

usw. wobei $Q^{3*}(A, B)$ für *es gibt dreimal soviele A wie B* steht.

Es gibt sinnvolle Einschränkungen an den Begriff eines Quantors, die in der Literatur behandelt werden.

3.4 Erfüllbarkeit und logische Folgerung

Definition 3.17 Eine L-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ heißt *erfüllbar*, wenn es eine L-Struktur $\mathcal{M}$ gibt, so daß

$$\mathcal{M} \models \exists x_1 \dots \exists x_n \, \varphi.$$

Die Struktur $\mathcal{M}$ ist *ein Modell von* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, oder φ ist *gültig in* $\mathcal{M}$, wenn

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \, \varphi.$$

Eine L-Formel φ heißt *allgemeingültig*, wenn sie in jeder L-Struktur gültig ist. Zwei L-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $\psi(x_1, \dots, x_n)$ heißen *logisch äquivalent*, wenn $\forall x_1 \dots \forall x_n \, (\varphi \leftrightarrow \psi)$ allgemeingültig ist.

Logische Äquivalenz von φ und ψ bedeutet also wie in der Aussagenlogik, daß die Formeln *unter allen logisch möglichen Umständen* denselben Wahrheitswert haben: das heißt hier, daß bei allen Interpretationen $\mathcal{M}$ und allen Belegungen g die Werte $[\![\varphi]\!]_g^{\mathcal{M}}$ und $[\![\psi]\!]_g^{\mathcal{M}}$ gleich sind.

Beispiel 3.18 (a) Die Formel $\varphi(x) := \exists y(x \neq y)$ ist erfüllbar (in jeder Struktur mit mindestens zwei Elementen). Die Formel

$$\psi := \exists x \forall y(x \neq f(y)) \land \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y)$$

ist erfüllbar, z.B. in $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, f^{\mathcal{N}})$ mit $f(n) := n+1$. Aber jede Struktur, die ψ erfüllt, ist unendlich. Die Aussage $\psi \land \exists x \forall z(x = z)$ ist nicht erfüllbar.

(b) $\forall x(\varphi \land \psi)$ und $(\forall x\varphi \land \forall x\psi)$ sind logisch äquivalent.

Definition 3.19 Eine *Theorie* (in der Sprache L) ist eine Menge von L-Aussagen. Die Struktur $\mathcal{M}$ *ist ein Modell von* T, in Zeichen: $\mathcal{M} \models T$, wenn $\mathcal{M} \models \psi$ für jede Aussage $\psi \in T$.

Eine L-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *folgt* aus der L-Theorie T, in Zeichen: $T \models \varphi$, wenn jedes Modell von T auch ein Modell von φ ist. Zwei Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $\psi(x_1, \dots, x_n)$ sind *äquivalent über* T, wenn

$$T \models \forall x_1 \dots x_n \, (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

Die *Theorie der L-Struktur* $\mathcal{M}$ ist die Menge aller in $\mathcal{M}$ gültigen L-Aussagen,

$$Th(\mathcal{M}) := \{ \varphi \mid \mathit{frei}(\varphi) = \emptyset, \mathcal{M} \models \varphi \}.$$

Beispiel 3.20 Sein $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathcal{N}}, S^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}})$. In $Th(\mathcal{N})$ gelten z.B.:

(a) die Anordnung ist rekursiv aus dem Nachfolger definierbar:

$$\forall x \forall y\, (x < y \leftrightarrow (y = S(x) \vee \exists z (x < z \wedge z < y))).$$

(b) die Induktionsprinzipien: trifft eine (erststufige!) Eigenschaft auf 0 zu und enthält sie mit einer Zahl auch ihren Nachfolger, so enthält sie alle Zahlen:

$$\forall \vec{y}\, ([\varphi(x/0) \wedge \forall x(\varphi \to \varphi(S(x)/x))] \to \forall x\, \varphi).$$

5 Normalformen

In vielen Fällen ist es nützlich, wenn man sich auf Ausdrucksweisen einer bestimmten Form beschränken kann. Dazu möchte man jede beliebige Ausdrucksweise in eine logisch gleichwertige der gewünschten Form umrechnen können.

Im günstigsten Fall gibt es zu jedem vorgegebenen Ausdruck genau einen äquivalenten Ausdruck „in Normalform“; dann kann män die Äquivalenz zweier Ausdrücke testen, indem man ihre Normalformen berechnet und vergleicht. Die im Folgenden betrachteten Normalformen von Formeln haben diese schöne Eigenschaft aber nicht. (Beispielsweise ist von zwei Formeln, die sich nur durch die Reihenfolge von Argumenten einer kommutativen Operation wie $\wedge$ unterscheiden, keine „normaler“ als die andere.)

5.1 Normalformen in der Aussagenlogik

Definition 5.1 Eine *Basisformel* oder ein *Literal* ist eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel.

Eine Formel ist in *Negationsnormalform*, wenn sie außer $\neg, \wedge, \vee$ keine Junktoren enthält und wenn in ihr $\neg$ nur vor atomaren Teilformeln auftritt.

Eine Formel ist in *konjunktiver* (bzw. disjunktiver) *Normalform*, wenn sie eine Konjunktion (bzw. Disjunktion) von Disjunktionen (bzw. Konjunktionen) von Literalen ist.

Lemma 5.2 Zu jeder Formel α gibt es eine Formel β, so daß

(a) $\alpha \equiv \beta$,

(b) jede Variable in β kommt auch in α vor,

(c) β ist in Negations- (bzw. konjunktiver bzw. disjunktiver) Normalform.

Beweis: Die Junktoren $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$ können wir mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
(\alpha \leftrightarrow \beta) &\equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)), \\
(\alpha \rightarrow \beta) &\equiv \neg\alpha \vee \beta
\end{aligned}$$

beseitigen. Dann definieren wir die Normalformen durch Induktion über den Aufbau der verbleibenden[5] Formeln wie folgt:

$$\begin{aligned}
NNF(A) &:= A, \\
NNF((\alpha_1 \wedge \alpha_2)) &:= (NNF(\alpha_1) \wedge NNF(\alpha_2)), \\
NNF((\alpha_1 \vee \alpha_2)) &:= (NNF(\alpha_1) \vee NNF(\alpha_2)),
\end{aligned}$$

[5] Man ergänze die Definitionen um Fälle für die Aussagenkonstanten $\top$ und $\bot$.

$$\begin{aligned}
NNF(\neg A) &:= \neg A, \\
NNF(\neg\neg\alpha) &:= NNF(\alpha) \\
NNF(\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2)) &:= (NNF(\neg\alpha_1) \vee NNF(\neg\alpha_2)) \\
NNF(\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)) &:= (NNF(\neg\alpha_1) \wedge NNF(\neg\alpha_2))
\end{aligned}$$

Man zeigt durch Induktion über den Formelaufbau, daß (a) $NNF(\alpha) \equiv \alpha$ gilt; die Bedingung (b) ist offensichtlich.

$DNF(\alpha)$ und $KNF(\alpha)$ definieren wir simultan durch Induktion über α:

$$\begin{aligned}
DNF(A) &:= A \\
DNF(\neg\alpha) &:= NNF(\neg KNF(\alpha)) \\
DNF((\alpha_1 \vee \alpha_2)) &:= (DNF(\alpha_1) \vee DNF(\alpha_2)) \\
DNF((\alpha_1 \wedge \alpha_2)) &:= \mathit{distrib}(DNF(\alpha_1) \wedge DNF(\alpha_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
KNF(A) &:= A \\
KNF(\neg\alpha) &:= NNF(\neg DNF(\alpha)) \\
KNF((\alpha_1 \wedge \alpha_2)) &:= (KNF(\alpha_1) \wedge KNF(\alpha_2)) \\
KNF((\alpha_1 \vee \alpha_2)) &:= \mathit{distrib}(KNF(\alpha_1) \vee KNF(\alpha_2)),
\end{aligned}$$

wobei man bei $\mathit{distrib}(\delta)$ die Distributivregeln anwenden muß. Da alle Umformungen logische Äquivalenzen benutzen und keine neuen Variablen einführen, gilt die Behauptung. □

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}
DNF(\neg((A \wedge C) \vee \neg B)) &= NNF(\neg KNF((A \wedge C) \vee \neg B)) \\
&= NNF(\neg \mathit{distrib}(KNF(A \wedge C) \vee KNF(\neg B))) \\
&= NNF(\neg \mathit{distrib}((A \wedge C) \vee \neg B)) \\
&= NNF(\neg((A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B))) \\
&= (NNF(\neg(A \vee \neg B)) \vee NNF(\neg(C \vee \neg B))) \\
&= ((NNF(\neg A) \wedge NNF(\neg\neg B)) \vee NNF(\neg(C \vee \neg B)))) \\
&= ((\neg A \wedge B) \vee NNF(\neg(C \vee \neg B)))) \\
&= ((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B))
\end{aligned}$$

5.2 Normalform von Aussagen der Relationenalgebra

Im folgenden schließen wir die *triviale* Relationenalgebra $\mathcal{R}$ mit $|R| = 1$ aus, so daß wir $0 \neq 1$ annehmen können. Wir zeigen, daß jede Aussage der Relationenalgebra zu einer Gleichung äquivalent ist.

Definition 5.3 Die *Formeln der Relationenalgebra* sind die aus Gleichungen als atomaren Formeln aufgebauten aussagenlogischen Formeln, d.h. die Formeln φ, ψ und Terme r, s werden wie folgt aufgebaut:

$$\begin{array}{rcl} \varphi, \psi & := & r \doteq s \mid \neg\varphi \mid \ (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \mid (\varphi \leftrightarrow \psi), \\ r, s & := & 0 \mid 1 \mid I \mid x \mid (r + s) \mid (r \cdot s) \mid \overline{r} \mid (r\,;s) \mid r^{\smile}. \end{array}$$

Auf die relative Summe $(r \dagger s)$ von Termen haben wir verzichtet, da sie durch $\overline{(\overline{r}\,;\overline{s})}$ definiert werden kann und üblicherweise $\dagger$ nicht unter die Grundoperationen einer Relationenalgebra $\mathcal{R}$ aufgenommen wird.

Satz 5.4 (E.Schröder) Jede Formel $\varphi(\vec{x})$ der Relationenalgebra ist zu einer Gleichung der Form $r(\vec{x}) = 1$ logisch äquivalent, d.h. in jeder nicht-trivialen Relationenalgebra $\mathcal{R}$ gilt $\forall\vec{x}\,(\varphi \leftrightarrow (r \doteq 1))$.

Beweis: Sei φ eine Formel. Wir können annehmen, daß die Junktoren $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$ nicht in φ vorkommen, da wir $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ und $\vee$ mit Hilfe von $\wedge$ und $\neg$ ausdrücken können. Wir zeigen die Behauptung für die verbleibenden drei Fälle durch Induktion über den Aufbau von φ.

(a) φ ist $s \doteq t$: In jeder Boole'schen Algebra gilt

$$a = b \quad \Longleftrightarrow \quad a + \overline{b} = 1 \ \wedge \ a \cdot \overline{b} = 0,$$

wovon „$\Rightarrow$" nach den Axiomen (d) der Boole'schen Algebra und „$\Leftarrow$" nach Proposition 2.4 gilt. Außerdem gilt

$$a + \overline{b} = 1 \ \wedge \ a \cdot \overline{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a \cdot b) + (\overline{a} \cdot \overline{b}) = 1.$$

Den Beweis überlassen wir den Lesern zur Übung. Insgesamt haben wir also in jeder Boole'schen Algebra

$$a = b \iff (a \cdot b) + (\overline{a} \cdot \overline{b}) = 1.$$

Zu den Termen $s(\vec{x})$ und $t(\vec{x})$ wähle also $r(\vec{x}) := (s \cdot t) + (\overline{s} \cdot \overline{t})$. Da jede Relationenalgebra eine Boole'sche Algebra ist, gilt $\forall\vec{x}(\varphi \leftrightarrow (r \doteq 1))$ in jeder Relationenalgebra.

(b) φ ist $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$: In jeder Boole'schen Algebra gilt

$$a = 1 \wedge b = 1 \iff a \cdot b = 1.$$

Davon folgt „$\Rightarrow$“ aus $1 \cdot 1 = 1$, und „$\Leftarrow$“ sieht man indirekt ein: wäre $a \neq 1$, so wäre auch $a \cdot b \leq a \neq 1$, also $a \cdot b \neq 1$. Das widerspricht der Annahme; also ist $a = 1$ und damit auch $b = 1 \cdot b = a \cdot b = 1$.

Nach Induktionsannahme gibt es Terme $r_i(\vec{x})$ so daß

$$\forall \vec{x}(\varphi_1 \leftrightarrow (r_1 \doteq 1)) \ \wedge \ \forall \vec{x}(\varphi_2 \leftrightarrow (r_2 \doteq 1))$$

in jeder nicht-trivialen Relationenalgebra $\mathcal{R}$ gilt. Da $\mathcal{R}$ eine Boole'sche Algebra ist, gilt darin die obige Gleichung für die Werte $a := [\![r_1]\!]_h^{\mathcal{R}}$ und $b := [\![r_2]\!]_h^{\mathcal{R}}$ unter einer Belegung h. Für $r := r_1 \cdot r_2$ gilt dann wegen $[\![r]\!]_h^{\mathcal{R}} = a \cdot b$ auch

$$\forall \vec{x}(\varphi \leftrightarrow (r \doteq 1))$$

in $\mathcal{R}$, und damit in jeder nicht-trivialen Relationenalgebra.

(c) φ ist $\neg\psi$: Nach Induktionsannahme gibt es einen Term $r(\vec{x})$, so daß

$$\forall \vec{x}(\psi \leftrightarrow (r \doteq 1))$$

in jeder nicht-trivialen Relationenalgebra $\mathcal{R}$ gilt. Es genügt daher zu zeigen, daß für jedes Element r einer nicht-trivialen Relationenalgebra $\mathcal{R}$

$$r \neq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1\,;\overline{r}\,;1 = 1 \tag{19}$$

gilt. Wir zeigen „$\Leftarrow$“ indirekt: *da $\mathcal{R}$ nicht trivial ist*, ist $0 \neq 1$ und folglich

$$\begin{aligned} r = 1 \quad & \Rightarrow \quad \overline{r} = \overline{1} = 0 \\ & \Rightarrow \quad 1\,;\overline{r}\,;1 = 1\,;0\,;1 = 0 \\ & \Rightarrow \quad 1\,;\overline{r}\,;1 \neq 1. \end{aligned}$$

Für „$\Rightarrow$“ genügt zu zeigen, daß für jedes Element s von $\mathcal{R}$ die Bedingung

$$s\,;1 = 1 \quad \vee \quad 1\,;\overline{s} = 1 \tag{20}$$

gilt. Denn mit $s := (1\,;\overline{r})$ erhalten wir daraus

$$1\,;\overline{r}\,;1 = 1 \quad \vee \quad 1\,;\overline{1\,;\overline{r}} = 1,$$

und nach Satz 3.5 (a) und Axiom (g) der Relationenalgebra ist

$$1\,;\overline{1\,;\overline{r}} \ = \ 1^{\smile};\overline{1\,;\overline{r}} \ \leq \ \overline{\overline{r}} = r,$$

also zusammen

$$r \neq 1 \ \Rightarrow \ 1\,;\overline{1\,;\overline{r}} \neq 1 \ \Rightarrow \ 1\,;\overline{r}\,;1 = 1.$$

Es bleibt die Bedingung (20) zu zeigen. Wir tun das nur für vollständige Relationenalgebren $\mathcal{R}(V) = (2^{V \times V}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, V \times V, \,;\,, \smile, I)$[6]. Für jede

[6] Der obige Beweis folgt Tarski [12], wo (20) ein Axiom ist; ich sehe momentan nicht, wie es aus dem oben angebenen Axiomensystem zu bekommen ist. Die Bedingung gilt aber in allen nicht-trivialen Relationenalgebren.

Relation $s \subseteq V \times V = 1$ ist

$$\begin{array}{rcl} s\,;1 & = & \{\, \langle a,b\rangle \in V \times V \mid \exists c \in V\, s(a,c)\,\} \\ & = & \{\, a \in V \mid \exists c \in V\, s(a,c)\,\} \times V, \\ 1\,;\overline{s} & = & V \times \{\, b \in V \mid \exists c \in V\, \overline{s}(c,b)\,\}. \end{array}$$

Ist $1 \neq s\,;1$, so gibt es $\langle a,b\rangle \notin s\,;1$, und dann ist $\{a\} \times V \subseteq \overline{s}$. Folglich ist

$$\{\, b \in V \mid \exists c \in V\, \overline{s}(c,b)\,\} = V$$

und daher $1\,;\overline{s} = V \times V = 1$. Also gilt (20) in $\mathcal{R}(V)$.

Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen. $\Box$

Der wesentliche Schritt des Beweises ist (19), wo die Negation einer Gleichung in eine Gleichung umgewandelt wird (mit Hilfe des Komplements und des Relationenprodukts). Eine Folgerung ist:

Korollar 5.5 Jeder Homomorphismus $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ zwischen nicht-trivialen Relationenalgebren ist injektiv.

Beweis: Sei $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ ein Homomorphismus, und $a \neq b \in R$. Zur Ungleichung $\neg(x \doteq y)$ gibt es einen Term $r(x,y)$, so daß

$$\forall x \forall y\, (x \neq y \leftrightarrow (r(x,y) \doteq 1))$$

in $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ gilt. Wegen $a \neq b$ ist $\mathcal{R} \models (r \doteq 1)[a,b]$, und da h ein Homomorphismus ist, wird diese atomare Aussage auf $\mathcal{R}'$ übertragen: das heißt, es gilt $\mathcal{R}' \models (r \doteq 1)[h(a),h(b)]$ und daher auch die äquivalente Formel,

$$\mathcal{R}' \models \neg(x \doteq y)[h(a),h(b)].$$

Aber das besagt, daß $h(a) \neq h(b)$ ist. Also ist h injektiv. $\Box$

Eine andere Folgerung ist, daß man sich beim Beweisen von Aussagen der Relationenalgebra auf Einsetzen in Gleichungen und die Schlußregel

$$\frac{\varphi, \qquad (\varphi \to \psi)}{\psi}\ \text{(modus ponens)}$$

beschränken kann.

5.3 Normalformen in der Prädikatenlogik

Wie in der Aussagenlogik gibt es auch für die Formeln der Prädikatenlogik bestimmte Normalformen. Zuerst brauchen wir einige Hilfsmittel:

Lemma 5.6 Folgende Formeln sind logisch äquivalent zu einander:

(a) Vertauschung von Negation und Quantoren:

- (a) $\neg\forall x\varphi$ und $\exists x\neg\varphi$,
- (b) $\neg\exists x\varphi$ und $\forall x\neg\varphi$,

(b) Vertauschung von gleichartigen Quantoren:

- (a) $\forall x\forall y\varphi$ und $\forall y\forall x\varphi$,
- (b) $\exists x\exists y\varphi$ und $\exists y\exists x\varphi$,

(c) Verschmelzung von gleichen Quantoren:

- (a) $\forall x\forall x\varphi$ und $\forall x\varphi$,
- (b) $\exists x\exists x\varphi$ und $\exists x\varphi$,

(d) Distribution von Quantoren über Junktoren:

- (a) $(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$ und $\forall x(\varphi \wedge \psi)$,
- (b) $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$ und $\exists x(\varphi \vee \psi)$,

(e) (Harmloses) Erweitern des Wirkungsbereichs: falls $x \notin \mathit{frei}(\psi)$:

- (a) $(\forall x\varphi \wedge \psi)$ und $\forall x(\varphi \wedge \psi)$,
- (b) $(\forall x\varphi \vee \psi)$ und $\forall x(\varphi \vee \psi)$,
- (c) $(\exists x\varphi \wedge \psi)$ und $\exists x(\varphi \wedge \psi)$,
- (d) $(\exists x\varphi \vee \psi)$ und $\exists x(\varphi \vee \psi)$,
- (e) $(\psi \to \forall x\varphi)$ und $\forall x(\psi \to \varphi)$,
- (f) $(\psi \to \exists x\varphi)$ und $\exists x(\psi \to \varphi)$,
- (g) $(\forall x\varphi \to \psi)$ und $\exists x(\varphi \to \psi)$,
- (h) $(\exists x\varphi \to \psi)$ und $\forall x(\varphi \to \psi)$,

Beweis: Durch nachrechnen. Wir prüfen z.B. den letzten Fall, daß

$$(\exists x_{n+1}\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x_{n+1}(\varphi \to \psi)$$

allgemeingültig ist, wenn $x \notin \mathit{frei}(\psi)$:

$\Longrightarrow$: Sei $\mathcal{M}$ eine Interpretation und $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ eine Belegung mit

$$\mathcal{M} \models (\exists x_{n+1}\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]. \tag{21}$$

Um $\mathcal{M} \models \forall x_{n+1}(\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ zu zeigen, wählen wir ein beliebiges $a_{n+1} \in M$. Falls $\mathcal{M} \not\models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$, so ist nichts zu zeigen; also gelte auch $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$. Insbesondere gilt dann $\mathcal{M} \models \exists x_{n+1}\varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, und mit (21) folgt $\mathcal{M} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$, was wegen $x_{n+1} \notin \mathit{frei}(\psi)$ und dem Koinzidenzlemma zu

$$\mathcal{M} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$$

äquivalent ist. Damit ist $\mathcal{M} \models \forall x_{n+1}(\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ gezeigt.

$\Leftarrow$: Sei $\mathcal{M}$ eine Interpretation und $[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ eine Belegung mit

$$\mathcal{M} \models \forall x_{n+1}(\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]. \tag{22}$$

Um $\mathcal{M} \models (\exists x_{n+1}\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ zu zeigen, können wir

$$\mathcal{M} \models \exists x_{n+1}\varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

annehmen. Also gibt es ein $a_{n+1} \in M$ mit $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$. Nach (22) gilt dafür auch $\mathcal{M} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_{n+1}/a_{n+1}]$, was wegen dem Koinzidenzlemma wieder dasselbe bedeutet wie

$$\mathcal{M} \models \psi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n].$$

Damit ist $\mathcal{M} \models (\exists x_{n+1}\varphi \to \psi)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$ gezeigt. $\square$

Beispiel 5.7 Man überlege sich, daß folgende Formeln allgemeingültig sind, aber die Umkehrungen nicht:

(a) $\exists x \forall y\, \varphi \to \forall y \exists x\, \varphi$

(b) $(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$

(c) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$

Wir wollen Lemma 5.6 dazu benutzen, um alle Quantoren in einer Formel „nach vorne zu ziehen“, d.h. die allgemeingültigen Formeln wie

$$(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$$

dazu benutzen, um Quantoren in Teilformeln durch Quantoren in umfassenden Formeln zu ersetzen. Dabei stört aber die Nebenbedingung $x \notin \mathit{frei}(\psi)$ in den Äquivalenzen wie

$$(\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi).$$

Falls $x \in \mathit{frei}(\psi)$ ist, ersetzt man die gebundene Variable x von $\exists x\varphi$ durch eine Variable $y \notin \mathit{frei}(\psi) \cup \mathit{frei}(\varphi)$, und benutzt dann

$$(\exists y(\varphi(x/y)) \to \psi) \leftrightarrow \forall y(\varphi(x/y) \to \psi).$$

Genauer gesagt:

Definition 5.8 Sei φ eine Formel, x eine Variable und s ein Term. Definiere $t(x/s)$ bzw. $\varphi(x/s)$, *die Ersetzung der freien Vorkommen von x in t bzw. φ durch s*, induktiv durch

$$\begin{array}{rcl}
z(x/s) & := & \begin{cases} z, & \text{falls } z \neq x \\ s, & \text{sonst,} \end{cases} \\
f(t_1, \ldots, t_{n_f})(x/s) & := & f(t_1(x/s), \ldots, t_{n_f}(x/s)), \\
P(t_1, \ldots, t_{n_p})(x/s) & := & P(t_1(x/s), \ldots, t_{n_P}(x/s)), \\
\neg\varphi\,(x/s) & := & \neg(\varphi(x/s)), \\
(\varphi \wedge \psi)(x/s) & := & (\varphi(x/s) \wedge \psi(x/s)), \\
\exists z\varphi\,(x/s) & := & \begin{cases} \exists z\varphi, & \text{falls } x = z, \\ \exists z(\varphi(x/s)), & \text{falls } x \neq z \notin \mathit{frei}(s), \\ \exists v(\varphi(z/v)(x/s)), & \text{falls } x \neq z \in \mathit{frei}(s), \\ & v \notin \mathit{frei}(s, x, \varphi), \end{cases}
\end{array}$$

und ebenso für $\forall z\varphi\,(x/y)$.

Im letzten Fall wird zuerst in $\exists z\varphi$ die gebundenen Variable z durch eine neue (im jeweiligen Kontext noch nicht benutzte) Variable v ersetzt; das nennt man auch *gebundene Umbenennung*.

Beispiel 5.9 Die Variablen x, y, z, v seine paarweise verschieden. Dann ist

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\exists z((z \leq y \vee x \leq z) \to \forall y(y \leq x \to \exists x\, R(x, y, z)))(x/y)} \\
= & \exists z((z \leq y \vee x \leq z)(x/y) \to \forall y(y \leq x \to \exists x\, R(x, y, z))(x/y)) \\
= & \exists z((z \leq y \vee y \leq z) \to \forall y(y \leq x \to \exists x\, R(x, y, z))(x/y)) \\
= & \exists z((z \leq y \vee y \leq z) \to \forall v((y \leq x \to \exists x\, R(x, y, z))(y/v)(x/y))) \\
= & \exists z((z \leq y \vee y \leq z) \to \forall v((v \leq x \to \exists x\, R(x, v, z))(x/y))) \\
= & \exists z((z \leq y \vee y \leq z) \to \forall v((v \leq x)(x/y) \to (\exists x\, R(x, v, z))(x/y))) \\
= & \exists z((z \leq y \vee y \leq z) \to \forall v(v \leq y \to \exists x\, R(x, v, z)))
\end{array}$$

Durch gebundene Umbenennung erhält man stets äquivalente Formeln:

Lemma 5.10 Falls $y \notin \mathit{frei}(\varphi)$, so sind $\exists x\varphi$ und $\exists y(\varphi(x/y))$ logisch äquilvalent, ebenso $\forall x\varphi$ und $\forall y(\varphi(x/y))$.

Beweis: Übung. □

Für die Ersetzung einer Variable durch einen Term kann man durch Induktion über den Formelaufbau leicht zeigen:

Lemma 5.11 Für jede Formel φ und jeden Term s gilt:

$$[\![\varphi(x/s)]\!]_g^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_{g(x/[\![s]\!]_g^{\mathcal{M}})}^{\mathcal{M}}.$$

Auch das Ersetzungslemma der Aussagenlogik setzt sich auf die Prädikatenlogik fort. Sei $\varphi(\psi_1/\psi_2)$ die Formel, die durch Ersetzen (aller Vorkommen) der Teilformel ψ_1 durch ψ_2 entsteht.

Lemma 5.12 (Ersetzungslemma) Sind ψ_1 und ψ_2 logisch äquivalent, so ist φ zu $\varphi(\psi_1/\psi_2)$ logisch äquivalent.

Den Beweis lassen wir aus: da (bei jeder Interpretation und Belegung) der Wert einer Formel nur von den Werten, aber nicht von der Gestalt der Teilformeln abhängt, ist es einleuchtend, daß man eine Teilformel durch eine äquivalente Formel austauschen kann, ohne den Wert der gesamten Formel zu ändern.

Pränexe Normalform

Die am häufigsten benutzte Normalform besteht darin, alle Quantoren aus dem Wirkungsbeich von Junktoren zu beseitigen, indem man den Wirkungsbereich der Quantoren (scheinbar) erweitert:

Definition 5.13 Eine Formel φ ist in *pränexer Form*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$, Quantoren $Q_1, \ldots, Q_k \in \{\forall, \exists\}$ und eine quantorenfreie Formel ψ gibt, so daß

$$\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi.$$

Eine *pränexe Normalform von* φ ist eine zu φ logisch äquivalente Formel in pränexer Form.

Satz 5.14 Zu jeder Formel φ kann man eine pränexe Normalform (mit denselben freien Variablen) angeben.

Beweis: durch Induktion über den Formelaufbau. Sei $\overline{\forall} := \exists$ und $\overline{\exists} := \forall$.

(a) φ ist atomar: Dann ist φ quantorenfrei, also selbst schon in pränexer Form.

(b) $\neg\varphi$: Sei $\varphi^{PNF} := Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi$ eine pränexe Normalform von ψ. Nach dem Ersetzungslemma sind dann $\neg\varphi$ und $\neg(\varphi^{PNF})$ äquivalent. Mit Lemma 5.6 können wir die Quantoren aus dem Wirkungsbereich der Negation herausziehen: $\neg Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi$ ist äquivalent zu $\overline{Q}_1 x_1 \neg Q_2 x_2 \ldots Q_k x_k \psi, \ldots,$ und zu $\overline{Q}_1 x_1 \ldots \overline{Q}_k x_k \neg\psi$. Da $\neg\psi$ quantorenfrei ist, ist dies eine pränexe Normalform $(\neg\varphi)^{PNF}$ von $\neg\varphi$.

(c) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$: Seien

$$Q_1 x_1 \ldots Q_k x_k \psi_1 \quad \text{und} \quad Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_{k+m} x_{k+m} \psi_2$$

induktiv schon pränexe Normalformen φ_1^{PNF} und φ_2^{PNF} der direkten Teilformeln. Dabei können wir –nach gebundener Umbenennung– annehmen, daß die Mengen der gebundenen Variablen der Teilformeln zu einander (und zu den freien Variablen) disjunkt sind. Durch Anwenden von Lemma 5.6 erhalten wir eine äquivalente Formel

$$Q_1x_1 \dots Q_kx_kQ_{k+1}x_{k+1} \dots Q_{k+m}x_{k+m}(\psi_1 \wedge \psi_2),$$

die als $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^{PNF}$ geeignet ist. Man beachte, daß wir die Quantoren auch in jeder anderen Reihenfolge hätten vorziehen können.

(d) $(\varphi_1 \to \varphi_2)$: Das geht wie im vorigen Fall, allerdings mit

$$\overline{Q}_1x_1 \dots \overline{Q}_kx_kQ_{k+1}x_{k+1} \dots Q_{k+m}x_{k+m}(\psi_1 \to \psi_2),$$

d.h. die Quantoren Q_i der pränexen Normalform von φ_1 müssen zu $\overline{Q}_i$ geändert werden.

(e) $\exists x\varphi$: Dann ist $\exists x(\varphi^{PNF})$ eine pränexe Normalform von $\exists x\varphi$.

Die Fälle $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ und $\forall x\varphi$ gehen analog. □

In vielen Fällen kann man einfachere Quantorenpräfixe erreichen als im Beweis angegeben, wenn man die anderen Teile von Lemma 5.6 ausnutzt, um Quantoren von Teilformeln zusammenzufassen.

Beispiel 5.15 Sei $x \notin \mathit{frei}(\varphi_3)$ und (einfachheitshalber) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ quantorenfrei. Dann ist

$$(\forall x\varphi_1 \wedge (\exists x\varphi_2 \to \varphi_3))$$

logisch äquivalent zu $(\forall x\varphi_1 \wedge \forall x(\varphi_2 \to \varphi_3))$ und folglich auch zu

$$\forall x(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \to \varphi_3)).$$

Das Vorgehen aus dem Beweis nimmt eine gebundene Umbennennung vor und erzeugt dann

$$\forall x\forall y(\varphi_1 \wedge (\varphi_2(x/y) \to \varphi_3)),$$

also eine Formel mit zwei Quantoren im Präfix, statt wie oben mit nur einem.

Skolem'sche Normalform

Eine andere häufig nützliche Normalform besteht darin, Quantoren auf Kosten neuer Funktionszeichen zu beseitigen.

Lemma 5.16 Sei $\forall x_1 \dots \forall x_k\exists y\varphi$ eine L-Formel mit $\mathit{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k, y\}$, $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, und f ein in L nicht vorkommendes k-stelliges Funktionszeichen. Dann sind äquivalent:

(a) $\mathcal{M} \models \forall x_1 \dots \forall x_k\exists y\varphi$.

(b) Es gibt eine Funktion $f^{\mathcal{M}} : M^k \to M$ mit

$$(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \models \forall x_1 \dots x_k\, (\varphi(y/f(x_1, \dots, x_k))).$$

Beweis: Für alle $a_1, \dots, a_k \in M$ gilt

$$(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \models \varphi(f(x_1, \dots, x_k)/y)[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k]$$

nach Lemma 5.11 genau dann, wenn

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k, y/f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_k)].$$

(b) $\Longrightarrow$ (a): Zu allen $a_1, \dots, a_k \in M$ gilt nach der Annahme (b) und der obigen Bemerkung $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k, y/f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_k)]$, also insbesondere $\mathcal{M} \models \exists y \varphi\, [x_1/a_1, \dots, x_k/a_k]$.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Nach der Annahme (a) gibt es zu jedem $a_1, \dots, a_k \in M$ mindestens ein $b \in M$ mit $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k, y/b]$. Wähle ein solches b und definiere $f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_k) := b$. Da man das für alle $(a_1, \dots, a_k) \in M^k$ machen kann, erhält man eine Funktion $f^{\mathcal{M}} : M^k \to M$, die die Behauptung erfüllt. □

Bemerkung 5.17 Das zu $\forall x_1 \dots \forall x_k \exists y \varphi$ eingeführte Funktionszeichen f bzw. seine Interpretation $f^{\mathcal{M}}$ heißt *Skolemfunktion*, nach dem norwegischen Logiker Thoralf Skolem. Es ist eine *Auswahlfunktion*, die zu jedem $a_1, \dots, a_k \in M$ ein „Beispiel“ b mit $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_k/a_k, y/b]$ auswählt.

Satz 5.18 (Skolem'sche Normalform) Zu jeder L-Formel $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ gibt es Erweiterung $L' = L \cup \{f_1, \dots, f_r\}$ um neue Funktionszeichen $f_1, \dots, f_r$ und eine quantorenfreie L'-Formel $\psi(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$, so daß φ genau dann erfüllbar ist, wenn $\forall y_1 \dots \forall y_m \psi\, (z_1, \dots, z_n)$ erfüllbar ist.

Beweis: Nach Satz 5.14 können wir annehmen, daß φ eine Formel in pränexer Form ist, $\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_p x_p\, \varphi'$ mit quantorenfreiem $\varphi'(x_1, \dots, x_p, z_1, \dots, z_n)$. Sei r die Anzahl der $\exists$-Quantoren unter $Q_1, \dots, Q_p$. Falls $r = 0$ ist, hat φ schon die gewünschte Form. Ist $r > 0$, so ist

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} Q_{k+2} x_{k+2} \dots Q_p x_p\, \varphi'$$

für ein $k < p$. Wähle ein neues k-stelliges Funktionszeichen f_1. Nach dem vorigen Lemma ist φ genau dann erfüllbar (durch ein $\mathcal{M}$ und $c_1, \dots, c_n \in M$), wenn

$$\forall x_1 \dots \forall x_k (Q_{k+2} x_{k+2} \dots Q_p x_p\, \varphi')(x_{k+1}/f_1(x_1, \dots, x_k))$$

erfüllbar ist (durch ein $\mathcal{M}$ und $c_1, \dots, c_n \in M$ und *eine* passende Funktion $f_1^{\mathcal{M}}$). Diese Formel ist wieder in pränexer Normalform. Falls $r - 1 > 0$ ist, beseitigt man die übrigen $\exists$-Quantoren unter $Q_{k+2}, \dots, P_p$ ebenso durch neue, mindestens k-stellige Funktionszeichen $f_2, \dots, f_r$. □

Beispiel 5.19 (a) In $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ gilt $\forall x \exists y\, (y = x \cdot x)$. Die Skolemfunktion dazu ist $f(n) = n^2$.

(b) Das Aussonderungsaxiom der Mengenlehre (vgl. Beispiel 4.6) besagte, für jede Formel $\varphi(\vec{u}, x, z)$,

$$\forall \vec{u}\ \forall x\ \exists y\ \forall z (z \in y \ \leftrightarrow\ (z \in x \wedge \varphi(\vec{u}, x, z))).$$

In diesem Fall gibt es (nach dem Extensionalitätsaxiom) nur eine passende Menge y. Mit einer Skolemfunktion f hieße das

$$\forall \vec{u}\ \forall x\ \forall z (z \in f(\vec{u}, x) \ \leftrightarrow\ (z \in x \wedge \varphi(\vec{u}, x, z))).$$

Statt $f(\vec{u}, x)$ schreibt man üblicherweise $\{\, z \mid y \in x \wedge \varphi(\vec{u}, x, z)\,\}$.

Aus Satz 5.18 bekommt man zu φ eine Formel ohne $\exists$-Quantoren, die genau dann *erfüllbar* ist, wenn φ erfüllbar ist. Will man eine Formel, die genau dann *allgemeingültig* ist, wenn φ allgemeingültig ist, so wendet man den Satz auf $\neg\varphi$ an:

Beispiel 5.20 Sei $\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y \psi$. Dann ist

$$\neg\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y \neg\psi$$

genau dann erfüllbar, wenn (mit neuem f)

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k (\neg\psi(y/f(x_1, \ldots, x_k)))$$

oder, umgeformt,

$$\neg\exists x_1 \ldots \exists x_k (\psi(y/f(x_1, \ldots, x_k)))$$

erfüllbar ist. Und das bedeutet:

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ ist allgemeingültig} \\ \iff\ & \neg\varphi \text{ ist unerfüllbar} \\ \iff\ & \text{Es gibt kein } \mathcal{M}, f^{\mathcal{M}} : M^k \to M \text{ mit} \\ & (\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}) \models \neg\exists x_1 \ldots \exists x_k (\psi(y/f(x_1, \ldots, x_k))) \\ \iff\ & \exists x_1 \ldots \exists x_k (\psi(y/f(x_1, \ldots, x_k))) \text{ ist allgemeingültig.} \end{aligned}$$

Beachte, daß jetzt die $\forall$-Quantoren durch die Skolemfunktionen ersetzt werden!

Bemerkung 5.21 Man kann die Skolemfunktionen in gewissem Sinn gleich in den Aufbau der Terme einbauen, wenn man die Terme und Formeln simultan definiert. Dann fügt man zu den Termen eine der folgenden Bedingungen hinzu:

(a) Ist t ein Term, x eine Variable, und φ eine Formel, so ist $\iota x \varphi$ ein Term.

(b) Ist t ein Term, x eine Variable, und φ eine Formel, so ist $\epsilon x \varphi$ ein Term.

Man liest $\iota x \varphi$ als *dasjenige Objekt x mit der Eigenschaft φ* und $\epsilon x \varphi$ als *(irgend) ein Objekt x mit der Eigenschaft φ*. Dazu muß man Axiome fordern, z.B.

$$\forall \vec{y} (\exists^{=1} x \varphi \to \varphi(x/\iota x \varphi)) \quad \text{bzw.} \quad \forall \vec{y} (\varphi(x/\epsilon x \varphi)).$$

6 Lindenbaumalgebra und Termmodelle

Es kommt oft vor, daß wir uns durch Beobachtung davon überzeugt haben, daß eine gewisse Menge R von Aussagen wahr ist, eine andere Menge U von Aussagen aber nicht, ohne daß wir verstehen, *warum* die Aussagen $\varphi \in R$ wahr, aber die Aussagen $\psi \in U$ falsch sind.

Um uns diesen Unterschied zu erklären, stellen wir eine Theorie T auf, d.h. wir machen gewisse Annahmen (die vielleicht gar nicht direkt durch Beobachtung geprüft werden können). Diese Theorie T *erklärt* den Unterschied zwischen R und U, wenn

$$T \models \varphi \text{ für alle } \varphi \in R \qquad \text{und} \qquad T \not\models \psi \text{ für alle } \psi \in U.$$

Es kann natürlich viele verschieden Theorien T geben, die den Unterschied zwischen R und U in diesem Sinn erklären. Unter ihnen wählen wir dann nach anderen Kriterien aus; z.B. ist $T := R \cup \{ \neg\psi \mid \psi \in U \}$ nicht gerade erhellend.

Die wichtigste Frage, die man nach der Aufstellung einer Theorie lösen muß, ist: gibt es eine Interpretation dieser Theorie, oder hat sie keine Interpretation, d.h. ist sie „ohne Bedeutung“, weil sie in sich widersprüchlich ist? Wenn es keine Interpretation von T gibt, folgt ja *jede* Aussage aus T, insbesondere $T \models R \cup U$.

6.1 Die Lindenbaumalgebra einer Theorie

Betrachten wir das Problem, ob T überhaupt eine Interpretation hat, für den einfachsten Fall, wo T eine Menge von Sätzen der Aussagenlogik ist.

Beispiel 6.1 Sei $T = \{ A_i \leftrightarrow A_{i+3} \mid i \in \mathbb{N} \}$. Eine Interpretation ist eine Belegung der Aussagenvariablen, bei der alle Aussagen von T wahr sind. Da T unendlich ist und unendlich viele Variablen hat, können wir nicht einfach eine Tabelle aller möglichen Belegungen aufstellen. Trotzdem ist klar, daß es nicht viele verschiedene Interpretationen h von T geben kann, denn es muß gelten:

$$\begin{array}{ll}
h(A_1) = h(A_4) = h(A_7) = \cdots & \in \{0,1\} \\
h(A_2) = h(A_5) = h(A_8) = \cdots & \in \{0,1\} \\
h(A_3) = h(A_6) = h(A_9) = \cdots & \in \{0,1\}
\end{array}$$

Die Theorie erzwingt, daß viele der Aussagenvariablen als „im Wesentlichen dieselbe Aussage“ behandelt werden. In diesem Sinne haben wir nur 3 verschieden Grundaussagen A_1, A_2, A_3 (und natürlich aussagenlogische Kombinationen davon) und erhalten so doch einen Überblick über alle möglichen Interpretationen: es gibt höchstens 2^3 verschiedene Interpretationen h von T.

Definition 6.2 Sei *Fml* die Menge der aussagenlogischen Formeln und $T \subseteq$ *Fml* eine aussagenlogische Theorie. Definiere für aussagenlogische Formeln φ

und ψ die Relation

$$\begin{array}{rcl} \varphi \equiv_T \psi & :\Longleftrightarrow & T \models (\varphi \leftrightarrow \psi), \\ [\varphi]_T & := & \{ \psi \mid \varphi \equiv_T \psi \}. \end{array}$$

Definition 6.3 Die Lindenbaum-Algebra von T ist die Algebra

$$\mathcal{L}_T = (Fml/\equiv_T, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$$

mit den Operationen

$$\begin{array}{rclcrcl} 0 & := & [A_1 \wedge \neg A_1]_T, & \qquad & [\varphi]_T + [\psi]_T & := & [\varphi \vee \psi]_T, \\ 1 & := & [A_1 \vee \neg A_1]_T, & & [\varphi]_T \cdot [\psi]_T & := & [\varphi \wedge \psi]_T, \\ & & & & \overline{[\varphi]_T} & := & [\neg\varphi]_T. \end{array}$$

Die Operationen der Lindenbaum-Algebra sind wohldefiniert: sind etwa $[\varphi]_T = [\varphi']_T$ und $[\psi]_T = [\psi']_T$, so ist

$$T \models (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'),$$

wie man sich leicht überlegt, und daher auch $[\varphi \vee \psi]_T = [\varphi' \vee \psi']_T$; also ist $+$ wohldefiniert. Ebenso für die anderen Operationen.

Proposition 6.4 Die Lindenbaumalgebra einer Theorie T ist eine Boole'sche Algebra.

Beweis: Man zeigt, daß die Axiome erfüllt sind. Beispielsweise sind $+$ und $\cdot$ idempotent, da

$$T \models (\varphi \wedge \varphi) \leftrightarrow \varphi, \qquad \text{und} \qquad T \models (\varphi \vee \varphi) \leftrightarrow \varphi$$

gelten. Beachte, daß $[\varphi]_T = 1$ für jedes $\varphi \in T$ gilt, denn für solche φ ist ja $T \models \varphi$, also auch $T \models \varphi \leftrightarrow (A_1 \vee \neg A_1)$. Für alle von T widerlegbaren Aussagen φ, d.h. für alle φ mit $T \models \neg\varphi$, ist andererseits $[\varphi]_T = 0$. □

Natürlich gilt im allgemeinen nicht für jedes φ eine der beiden Behauptungen $T \models \varphi$ oder $T \models \neg\varphi$. Daher hat $\mathcal{L}_T$ im allgemeinen mehr als 2 Elemente. Wir haben früher gesehen, wie man eine Boole'schen Algebra homomorph auf die Algebra $\mathbb{B}$ abbilden kann. Die Homomorphismen von $h : \mathcal{L}_T \to \mathbb{B}$ sind gerade die Belegungen der Aussagenvariablen, die T erfüllen.

Im obigen Beispiel hat $\mathcal{L}_T$ neben $[A_1]_T$, $[A_2]_T$ und $[A_3]_T$ noch Elemente wie $[A_1 \wedge A_2 \wedge A_3]$, $[A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3]$ usw., und man erhält $\mathcal{L}_T = 2^8$.

6.2 Herbrand-Modelle

Aus der Skolem-Normalform kann man einige wichtige Folgerungen ziehen.[7]

In diesem Abschnitt sei L ein abzählbares Vokabular von Funktions- und Relationszeichen, das mindestens ein 0-stelliges Funktionszeichen c enthält.

Definition 6.5 Ein L-Term t bzw. eine L-Formel φ heißt *geschlossen*, wenn *frei*$(t) = \emptyset$ bzw. *frei*$(\varphi) = \emptyset$. Das *Herbrand-Universum* $H(L)$ ist die Menge aller geschlossenen L-Terme.

Eine *Herbrand-Struktur* ist eine Struktur $\mathcal{H} = (H, f^{\mathcal{H}}, P^{\mathcal{H}})_{f \in Fn(L), P \in Pr(L)}$ mit $H = H(L)$ und

$$f^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_{n_f}) := f(t_1, \ldots, t_{n_f}), \qquad P^{\mathcal{H}} \subseteq H^{n_P} \tag{23}$$

für jedes Funktionszeichen $f \in Fn(L)$ und jedes Prädikatszeichen $P \in Pr(L)$. Ein *Herbrand-Modell* einer L-Theorie T ist eine Herbrandstruktur $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} \models T$.

Satz 6.6 Sei $\overline{\varphi} = \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ eine L-Aussage in Skolem'scher Normalform und ohne Gleichheitszeichen. Die Aussage $\overline{\varphi}$ ist genau dann erfüllbar, wenn φ ein Herbrand-Modell hat.

Beweis: Wir können annehmen, daß L aus c und den in φ vorkommenden Symbolen besteht.

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{A}$ ein Modell von φ. Falls die Konstante c in $\mathcal{A}$ nicht interpretiert ist (wenn c nicht in φ vorkommt), wähle ein Element $a \in A$ und setze $c^{\mathcal{A}} := a$. Dann gibt es zu jedem $t \in H(L)$ ein Element $[\![t]\!]_g^{\mathcal{A}} \in A$, das nicht von der Belegung g abhängt, da t keine freien Varablen hat; wir schreiben daher $[\![t]\!]^{\mathcal{A}}$.

Die Funktionszeichen sind auf $H(L)$ schon durch (23) festgelegt. Die Prädikatszeichen interpretieren wir wie folgt:

$$P^{\mathcal{H}} := \{\, (t_1, \ldots, t_{n_P}) \mid t_1, \ldots, t_{n_P} \in H(L), \mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_{n_P}) \,\} \tag{24}$$

Durch Induktion über den Formelaufbau zeigen wir:

Beh.: Ist ψ eine L-Aussage in Skolem'scher Normalform, so gilt

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \models \psi.$$

Beweis: Für atomare Aussagen haben wir sogar

$$\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_{n_P}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{H} \models P(t_1, \ldots, t_{n_P}).$$

Das überträgt sich durch Induktion auf alle *quantorenfreien* Aussagen.

[7] Dieser Abschnitt folgt eng dem Buch von U.Schöning [9]

Sei nun ψ eine Aussage der Form $\forall x\psi'$, mit $\mathcal{A} \models \psi$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \psi'[x/a]$ für jedes $a \in A$, insbesondere also für jedes $a = [\![t]\!]^{\mathcal{A}}$ mit $t \in H(L)$. Wegen $[\![\psi']\!]^{\mathcal{A}}[x/[\![t]\!]^{\mathcal{A}}] = [\![\psi'[x/t]]\!]^{\mathcal{A}}$ haben wir nach der Induktionsvoraussetzung schon

$$\mathcal{A} \models \psi'[x/t] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \models \psi'[x/t],$$

zusammen also $\mathcal{H} \models \psi'[x/t]$ und wegen $[\![\psi'[x/t]]\!]^{\mathcal{H}} = [\![\psi']\!]^{\mathcal{H}}[x/[\![t]\!]^{\mathcal{H}}]$ auch $\mathcal{H} \models \psi'[x/[\![t]\!]^{\mathcal{H}}]$. Da das für alle $t \in H(L)$ gilt, ist $\mathcal{H} \models \forall x\psi'$.

$\Leftarrow$: Sei $\mathcal{H}$ ein Herbrand-Modell von φ. Dann wird φ von $\mathcal{H}$ erfüllt. □

Bemerkung 6.7 Enthält die Sprache das Gleichheitszeichen, so haben wir bei den Gleichungen nur

$$\mathcal{A} \models s \doteq t \quad \Leftarrow \quad \mathcal{H} \models s \doteq t,$$

was für den obigen Beweis nicht ausreicht. Man kann aber auf $H(L)$ eine Äquivalenzrelation

$$\sim_{\mathcal{A}} := \{\, (s,t) \mid s,t \in H(L), \mathcal{A} \models s \doteq t \,\},$$

einführen und dann statt der Terme $t \in H(L)$ die Äquivalenzklassen

$$t/{\sim_{\mathcal{A}}} := \{\, s \in H(L) \mid s \sim_{\mathcal{A}} t \,\}$$

als Objekte verwenden. Statt $\mathcal{H}$ benutzt man dann die Quotientenstruktur

$$\mathcal{H}/{\sim_{\mathcal{A}}} = (H(L)/{\sim_{\mathcal{A}}}, f^{\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}}, P^{\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}})_{f \in Fn(L), P \in Pr(L)}, \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}
H(L)/{\sim_{\mathcal{A}}} &:= \{\, t/{\sim_{\mathcal{A}}} \mid t \in H(L) \,\}, \\
f^{\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}}(t_1/{\sim_{\mathcal{A}}}, \dots, t_{n_f}/{\sim_{\mathcal{A}}}) &:= f(t_1, \dots, t_{n_f})/{\sim_{\mathcal{A}}}, \\
P^{\mathcal{H}/\sim_{\mathcal{A}}} &:= \{\, (t_1/{\sim_{\mathcal{A}}}, \dots, t_{n_f}/{\sim_{\mathcal{A}}}) \mid t_1, \dots, t_{n_f} \in H(L), \mathcal{A} \models P(t_1, \dots, t_{n_f}) \,\}.
\end{aligned}$$

Man zeigt leicht, daß $\mathcal{H}/{\sim_{\mathcal{A}}}$ wohldefiniert ist (d.h. die Werte nicht von der Wahl der Repräsentanten t_i von $t_i/{\sim_{\mathcal{A}}}$ abhängen), und daß

$$\mathcal{A} \models s \doteq t \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}/{\sim_{\mathcal{A}}} \models s \doteq t.$$

Der Rest des Beweises geht dann wie oben, nur mit $\mathcal{H}/{\sim_{\mathcal{A}}}$ statt $\mathcal{H}$.

Man kann Satz 6.6 statt mit einer Aussage $\overline{\varphi}$ auch mit einer abzählbaren Menge solcher Aussagen (in Skolem-Normalform) führen.

Korollar 6.8 (Satz von Löwenheim und Skolem) Sei T eine (erststufige) Theorie in einer Sprache mit höchstens abzählbarem Vokabular. Dann hat T genau dann ein Modell $\mathcal{A}$, wenn T ein höchstens abzählbares Modell $\mathcal{H}$ hat.

Beweis: Da das Vokabular von T abzählbar ist, gibt es von jeder Länge n nur abzählbar viele verschiedene Aussagen, so daß auch T abzählbar ist. Betrachte die Skolem-Normalform

$$T^{SNF} := \{ \varphi^{SNF} \mid \varphi \in T \}$$

von T. Beim Übergang zu T^{SNF} werden höchstens abzählbar viele Skolemfunktionen eingeführt, so daß auch die Sprache L von T^{SNF} abzählbar ist. Also ist (nach einer Verallgemeinerung von Satz 5.18) T^{SNF} genau dann erfüllbar, wenn T erfüllbar ist. Ist $\mathcal{A} \models T^{SNF}$, so ist die oben konstruierte Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ (bzw. $\mathcal{H}/{\sim_{\mathcal{A}}}$) ein höchstens abzählbares Modell von T^{SNF}, da es nur abzählbar viele L-Terme gibt.

Aus jedem abzählbaren Modell von T^{SNF} erhalten wir ein abzählbares Modell von T (bzw. umgekehrt), indem wir die Interpretation der Skolemfunktionen weglassen (bzw. einführen). □

Die Erfüllbarkeit einer Theorie T in der Prädikatenlogik erster Stufe kann man nun auf die Erfüllbarkeit in der Aussagenlogik zurückführen. Wir machen es wieder nur für eine einzelne Aussage.

Definition 6.9 Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine quantorenfreie L-Aussage. Die *Herbrand-Expansion von* φ ist

$$E(\varphi) := \{ \varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \mid t_1, \dots, t_n \in H(L) \}.$$

Satz 6.10 (Gödel,Herbrand,Skolem) Eine Aussage $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ in Skolem'scher Normalform ist genau dann erfüllbar, wenn die Menge $E(\varphi)$ (aussagenlogisch) erfüllbar ist.

Beweis: Es genügt, Herbrand-Modelle von $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ zu suchen. Für jede Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ gilt aber:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \\
&\quad \iff \quad \text{für alle } t_1, \dots, t_n \in H(L) : \ \mathcal{H} \models \varphi[x_1/[\![t_1]\!]^{\mathcal{H}}, \dots x_n/[\![t_n]\!]^{\mathcal{H}}] \\
&\quad \iff \quad \text{für alle } t_1, \dots, t_n \in H(L) : \ \mathcal{H} \models (\varphi[x_1/t_1, \dots x_n/t_n]) \\
&\quad \iff \quad \mathcal{H} \models E(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Die atomaren Teilaussagen von Aussagen in $E(\varphi)$ haben die Form $P(t_1, \dots, t_{n_P})$ und stehen über die Terme in Beziehung zu einander, aber für die Erfüllbarkeit kann man jedes $P(t_1, \dots, t_{n_P})$ als eine Aussagenvariable verstehen.

Die Erfüllbarkeit einer unendlichen Menge kann auf die Erfüllbarkeit ihrer endlichen Teilmengen zurückgeführt werden:

Satz 6.11 (Endlichkeitssatz der Aussagenlogik) Eine Menge T von aussagenlogischen Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn alle ihre endlichen Teilmengen erfüllbar sind.

Beweis: $\Rightarrow$: Ist g eine Belegung, die T erfüllt, so erfüllt sie auch alle endlichen Teilmengen von T.

$\Leftarrow$: Sei $p_1, p_2, \ldots$ eine Aufzählung aller Aussagevariablen und

$$T_n := \{\, \varphi \in T \mid \mathit{Var}(\varphi) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}\,\}.$$

Es gibt nur 2^n viele Belegungen der $p_1, \ldots, p_n$, also nur 2^{2^n} viele Wahrheitstafeln

$$\begin{array}{c|cc} p_1 \ldots p_n & \varphi & \\ \hline g_1 & v_1 & \in \{0,1\} \\ \vdots & \vdots & \\ g_{2^n} & v_{2^n} & \in \{0,1\} \end{array}$$

bzw. nicht-äquivalente Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^{2^n}} \in T_n$, obwohl es natürlich unendlich viele verschiedene Formeln in T_n gibt. Daher ist *jedes* $\varphi \in T_n$ zu einer Formel aus $E_n := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^{2^n}}\} \subset T_n$ logisch äquivalent. Jede Belegung, die E_n erfüllt, erfüllt daher auch T_n. Nach Voraussetzung gibt es eine Belegung h_n, die E_n und daher $T_n \supset T_{n-1} \supset T_0$ erfüllt.

Definiere nun Belegungen g_n und schließlich eine Belegung g wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} g_0(p_j) & := & 0 \quad \text{für alle } j, \\ g_{n+1}(p_j) & := & \begin{cases} g_n(p_j), & \text{falls } j \leq n, \\ 1, & \text{falls } j = n \text{ und } h_i(p_n) = 1 \text{ für unendlich viele } i, \\ 0, & \text{sonst, für } j \geq n, \end{cases} \\ g(p_j) & := & g_{j+1}(p_j) \quad \text{für alle } j. \end{array}$$

Beachte, daß bei der Definition von g_{n+1} höchstens an dem Argument p_n ein Unterschied (von 0 zu 1) gegenüber g_n entsteht, und daß

$$g_n(p_j) \leq g_{n+1}(p_j) \leq 1$$

Beh.: Die Belegung g erfüllt T.

Bew.: Sei $\varphi \in T$, etwa $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_m) \in T_m$. Da h_n die Menge $T_n \supset T_{n-1} \supset \ldots \supset T_0$ erfüllt, erfüllt jedes h_n mit $n \geq m$ die Formel φ. Nach Definition von g_n ist

$$g_n(p_j) = g(p_j) = h_n(p_j) \quad \text{für } 1 \leq j \leq m < n,$$

also erfüllt auch g die Formel φ. □

Als Folgerung aus den letzten beiden Sätzen ergibt sich:

Satz 6.12 (Satz von Herbrand) Eine Aussage $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ in Skolem'scher Normalform ist genau dann unerfüllbar, wenn eine endliche Teilmenge von $E(\varphi)$ unerfüllbar ist.

Korollar 6.13 Die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Aussagen ist *semi-entscheidbar*, d.h. es gibt ein Verfahren, daß für jede allgemeingültige Aussage φ nach endlich vielen Schritten erkennt, daß φ allgemeingültig ist.

Beweis: Eine Aussage φ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist. Bilde also die Skolem'sche Normalform $(\neg\varphi)^{SNF} = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$ zu $\neg\varphi$ und teste, ob sie unerfüllbar ist. Ist $\neg\varphi$ unerfüllbar, so ist auch $E(\psi)$ unerfüllbar, und nach Satz 6.12 muß es eine endliche Teilmenge $E \subset E(\psi)$ geben, die unerfüllbar ist. Für jedes E kann die (Un)Erfüllbarkeit getestet werden, indem man alle Belegungen der endlich vielen atomaren Aussagen aus E durchspielt. Man muß also nur systematisch alle endlichen Teilmengen $E \subset E(\psi)$ durchsuchen, bis man eine unerfüllbare gefunden hat. □

Wenn man aber mit einer *nicht allgemeingültigen* Aussage φ beginnt, hat $E(\psi)$ keine unerfüllbare endliche Teilmenge, und die Suche danach kommt nicht zu einem Ende. Falls man also nicht weiß, ob φ allgemeingültig ist, kann man es mit dem Verfahren i.a. auch nicht entscheiden: es kann sein, daß das Verfahren nicht terminiert.

Man kann beweisen:

Satz 6.14 Die Menge der allgemeingültigen Aussagen der Prädikatenlogik ist *unentscheidbar*, d.h. es gibt kein Verfahren, mit denen in endlich vielen Schritten von jeder Aussage φ festgestellt werden kann, ob φ allgemeingültig ist.

7 Prädikatenlogik höherer Stufe und Typentheorie

Aristoteles hatte in seiner Schrift über die *Kategorien* die sprachlichen Ausdrücke in zehn Ausdrucksklassen oder eben *syntaktische Kategorien* eingeteilt, mit denen „Seiendes“ aus entsprechenden (disjunkten) Bereichen oder *semantischen Kategorien* bezeichnet wird. Die Unterscheidung zwischen einem sprachlichem Ausdruck und seinem Wert oder seiner Bedeutung ist bei Aristotels zwar nicht sehr klar, aber er unterscheidet sehr deutlich zwischen Ausdrücken bzw. Objekten erster und zweiter Stufe: Objekte erster Stufe (gr.: protai ousiai) sind die, die *nicht als Prädikat*, sondern nur als nur als Subjekt (oder eben: Objekt) von Aussagen auftreten, während Objekte zweiter Stufe (gr.: deuterai ousiai) auch als Prädikate auftreten.

Diese Unterscheidung hat sich bis heute erhalten: in der Prädikatenlogik erster Stufe wird nur *über* Individuen gesprochen und quantifiziert, aber natürlich *mit* Relationen und Funktionen. In der Prädikatenlogik zweiter Stufe wird auch über Relationen und Funktionen gesprochen und quantifiziert, z.B. in „Es gibt keine transitiven Relationen, die auch injektive Funktionen sind“.

7.1 Erweiterungen der Prädikatenlogik erster Stufe

Die bisher behandelte Prädikatenlogik erster Stufe ist in mancher Hinsicht nicht ausreichend, auch wenn schon dafür die Allgemeingültigkeit von Formeln nicht entscheidbar ist. Wir skizzieren kurz zwei Erweiterungen der Prädikatenlogik erster Stufe (auch FO = *first order logic* genannt).

Prädikatenlogik mit verallgemeinerten Quantoren

Die meisten Erweiterungen sind Erweiterungen um zusätzliche Quantoren. Ein neuer Quantor Q hat eine feste Stelligkeit und erlaubt die Bildung neuer Formeln $Qx(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(\vec{y})$ aus Formeln $\varphi_i(x, \vec{y})$. Eine $L(Q)$-Struktur $\mathcal{A}$ muß neben dem Individuenbereich A einen Bereich $Q^{\mathcal{A}}$ angeben, sodaß man die Bedeutung durch

$$\mathcal{A} \models Qx(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[\vec{x}/\vec{a}] :\Longleftrightarrow ([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{A}}_{[\vec{x}/\vec{a}]}, \ldots, [\![\varphi_n]\!]^{\mathcal{A}}_{[\vec{x}/\vec{a}]}) \in Q^{\mathcal{A}}$$

definieren kann, wobei

$$[\![\varphi_i]\!]^{\mathcal{A}}_{[\vec{x}/\vec{a}]} = \{\, b \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi_i[\vec{x}/\vec{a}, x/b] \,\}.$$

Beispiel 7.1 Ein Beispiel für einen zweistelligen Quantor, den man in der Prädikatenlogik nicht ausdrücken kann, ist

$$Ix\,(\varphi, \psi) := \textit{die durch } \varphi \textit{ und } \psi \textit{ definierten Mengen sind gleich mächtig.}$$

Seine Bedeutung ist gegeben durch

$$I^{\mathcal{A}} := \{\, (B, C) \mid B, C \subseteq A \wedge \text{ es gibt eine bijektive Funktion } f : B \to C \,\}.$$

Beispiel 7.2 Erweitert man die Sprache L um den Quantor $\exists^{\geq n}$ mit der Bedeutung $\exists^{\geq n} x\varphi =$ *Es gibt mindestens n Objekte mit der Eigenschaft* φ, so hat eine $L(\exists^{\geq n})$-Struktur die Form

$$\mathcal{A} = (A, (\exists^{\geq n})^{\mathcal{A}}, \ldots) \quad \text{mit } (\exists^{\geq n})^{\mathcal{A}} := \{\, B \mid B \subseteq A, |B| \geq n \,\}.$$

Da man die durch $\exists^{\geq n} x\, \varphi$ ausgedrückte Bedingung durch

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} x_i \not\approx x_j \wedge \varphi(x/x_i))$$

schon in der Prädikatenlogik erster Stufte ausdrücken kann, betrachtet man $\exists^{\geq n} x\, \varphi$ normalerweise als Abkürzung für diese Formel. Selbst wenn man alle Quantoren $\exists^{\geq n}$ hinzufügt, kann man die Bedingung

$$\exists^{<\infty} \varphi := \textit{die durch } \varphi \textit{ definierte Menge ist endlich}$$

nicht ausdrücken, da man dazu die unendliche Disjunktion

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \exists^{\leq n} x\ \varphi$$

bräuchte. (Unendlichen Disjunktionen und Konjunktionen erlaubt man in der sogenannten *infinitären* Logik.)

Prädikatenlogik mit Transitiver Hülle: $FO(TC)$

Ein Spezialfall der Endlichkeit wird oft gebraucht, wenn man es mit Graphen (zweistelligen Relationen) zu tun hat. dann möchte man z.B. die Eigenschaft formulieren können, daß zwei Punkte x, y durch einen *endlich langen Weg* miteinander verbunden sind. Ist $E(x, y)$ die Kantenrelation, so braucht man

$$E^+(x, y) := \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \exists x_1 \ldots \exists x_n (x = x_1 \wedge E(x_1, x_2) \wedge \ldots \wedge E(x_{n-1}, x_n) \wedge x_n = y)$$

Die durch E^+ beschriebene Relation ist *die transitive Hülle* der durch E beschriebenen Relation, und wird auch mit $TC(E)$ bezeichnet.

Allgemeiner ist $FO(TC)$ die Erweiterung der erststufigen Prädikatenlogik, in der zu jeder Formel $\varphi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ mit $|\vec{x}| = |\vec{y}|$ auch $(TC(\vec{x}, \vec{y})\varphi)(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ eine Formel ist, deren Bedeutung durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (TC(\vec{x}, \vec{y})\varphi)[\vec{x}/\vec{a}, \vec{y}/\vec{b}, \vec{z}/\vec{c}] \ &:\iff \\ &(\vec{a}, \vec{b}) \text{ liegt in der transitiven Hülle der Relation} \\ &\{\, (\tilde{a}, \tilde{b}) \mid \mathcal{A} \models \varphi[\vec{x}/\tilde{a}, \vec{y}/\tilde{b}, \vec{z}/\vec{c}] \,\} \end{aligned}$$

festgelegt ist.

7.2 Prädikatenlogik zweiter Stufe

In der Prädikatenlogik zweiter Stufe erlaubt man neben den Individuenvariablen auch Relationsvariable und beim Formelaufbau noch

(a) Ist X eine n-stellige Relationsvariable und sind $t_1, \ldots, t_n$ Individuenterme, so ist $X(t_1, \ldots, t_n)$ eine (atomare) Formel.

(b) Ist φ eine Formel und X eine Relationsvariable, so sind $\exists X \varphi$ und $\forall X \varphi$ Formeln.

Die Stelligkeit n einer Relatiosvariablen X wird oft durch die Schreibweise $X^{(n)}$ angedeutet. Neue Formeln $P(X, Y, \ldots, x, y, \ldots)$ mit Konstanten P für bestimmte Beziehungen zwischen Relationen und Individuen erlaubt man normalerweise nicht, da die meisten interessanten Beziehungen zwischen Relationen sich durch die erlaubten Formeln schon ausdrücken lassen.

Definition 7.3 Eine *zweitstufige Belegung* über $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}}, \ldots, f^{\mathcal{A}}, \ldots)$ ist eine Abbildung g, die jeder Individuenvariablen x ein Element $g(x) \in A$ und jeder n-stelligen Relationsvariablen X eine n-stellige Relation $g(X) \subseteq A^n$ zwischen Individuen zuordnet. Der *Wert* der neuen Formeln ist gegeben durch:

$$[\![\exists X^{(n)} \varphi]\!]_g^{\mathcal{A}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]_{g[X/R]}^{\mathcal{A}} = 1 \text{ für eine Relation } R \subseteq A^n, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und entsprechend für $\forall X \varphi$. Eine (volle) *zweitstufige L-Struktur* ist eine erstufige L-Struktur $\mathcal{A}$, bei der die n-stelligen Relationsvariablen über den Bereich 2^{A^n} aller n-stelligen Relationen über dem Individuenbereich A laufen.

Beispiel 7.4 Die Bedingung „*X ist eine einstellige Funktion*" kann durch die folgende Formel *fun*(X) ausgedrückt werden:

$$\forall x \exists y\, X(x, y) \wedge \forall x \forall y_1 \forall y_2 (X(x, y_1) \wedge X(x, y_2) \to y_1 \doteq y_2)$$

Durch *fun*(X) wird aber nur gesagt, daß X der Graph $\{\, \langle x, y \rangle \mid y = f(x) \,\}$ irgend einer Funktion f ist; wir haben für dieses f i.a. keinen Namen und können es nicht in Individuen*termen* verwenden.

Beispiel 7.5 In der Aussage „*Jede totale zweistellige Relation umfaßt eine Funktion*" wird über Relationen quantifiziert; man kann sie in der Prädikatenlogik zweiter Stufe ausdrücken durch

$$\forall X^{(2)} (\forall x \exists y X(x, y) \to \exists Y^{(2)} (Y \subseteq X \wedge \mathit{fun}(Y))),$$

wobei *fun*(Y) wie im vorigen Beispiel und $Y \subseteq X$ wie üblich formuliert wird.

Funktionsquantoren

Man betrachtet im allgemeinen keine Funktionsquantoren, da man n-stellige Funktionen als $n+1$-stellige Relationen auffassen und alle Formeln mit Funktionsvariablen in Formeln mit Relationsvariablen übersetzen kann.

Beispiel 7.6 (Endlichkeitsdefinitionen) Mit Hilfe von Quantoren über Funktionen kann man die Endlichkeit einer Menge ausdrücken: X *ist endlich*, wenn es keine injektive Funktion $f : X \to X$ gibt, die nicht surjektiv ist:

$$\exists f(f : X \to X \wedge \forall x \forall y(f(x) \doteq f(y) \to x \doteq y) \wedge \exists y \forall x(y \not\doteq f(x)) \tag{25}$$

Dabei ist $f : X \to X$ wie in der Mengenlehre definiert, d.h. durch

$$\forall x \in X\, \exists^{=1} y\ (x, y) \in f.$$

Hier wird natürlich vorausgesetzt, daß die Quantoren über *alle* mengentheoretisch erlaubten Funktionen laufen.

Beispiel 7.7 Die Aussage „Es gibt beliebig stark wachsende Funktionen“ auf den natürlichen Zahlen laßt sich durch

$$\forall f \exists g\ f < g \qquad \text{mit } f < g := \exists n \forall m > n\ f(m) \cdot 2 < g(m)$$

mit Quantoren über Funktionen formulieren.

Beispiel 7.8 (Selektionsaxiome) Es ist oft nützlich, nicht nur zu fordern, daß zu gegebenen Individuen andere existieren, die zu ihnen in bestimmter Relation stehen, sondern mehr zu verlangen: daß man eines dieser Individuen durch in Abhängigkeit der gegebenen Individuen durch eine Funktion wählen kann:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \varphi \to \exists f \forall x_1 \ldots \forall x_n\ \varphi(y/f(x_1, \ldots, x_n))$$

Zum Beispiel wird man in $\mathbb{R}$ statt $\forall x \exists y\,(x = y \cdot y)$ oft *ein* solches y durch eine Funktion auswählen, nämlich nicht die nicht-negative Wurzel von x, $f(x) := \sqrt{x}$. Meist fordert man nicht nur $\exists f \forall x(x = f(x) \cdot f(x))$, sondern will sogar einen bestimmten Namen dieser Funktion haben, hier also $\forall x(x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x})$. Dies sind die früher betrachteten *Skolemfunktionen*.

Manche Eigenschaften der Prädikatenlogik erster Stufe gelten für die zweite Stufe nicht mehr. Dazu gehört der Endlichkeitssatz:

Proposition 7.9 Nicht jede zweitstufige Aussagenmenge T, deren endliche Teilmengen alle erfüllbar sind, ist erfüllbar durch eine volle zweitstufige Struktur.

Beweis: Betrachte die Aussagenmenge $T := \{\varphi_{endl}\} \cup \{\, \varphi_{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}\,\}$, wobei

$$\varphi_{\geq n} := \neg\exists x_1 \cdots \exists x_n \forall y \bigvee_{i=1}^{n} y \doteq x_n$$

und φ_{endl} die für $X = \{\, x \mid x \doteq x \,\}$ formulierte zweitstufige Aussage (25) ist, die genau dann gilt, wenn der Individuenbereich endlich ist. Jede endliche Teilmenge von T ist erfüllbar, aber T selbst nicht: sonst gäbe es ein Modell $\mathcal{A}$, dessen Individuenbereich einerseits endlich wäre und andererseits für jedes $n \in \mathbb{N}$ mehr als n Elemente hätte. □

Auch der Vollständigkeitssatz gilt für die Prädikatenlogik zweiter Stufe nicht:

Satz 7.10 Es gibt *kein* endliches System von Axiomen und Beweisregeln, so daß für jede zweitstufige Theorie T und Aussage φ äquivalent sind:

(a) $T \models \varphi$, d.h. jede zweitstufige Struktur $\mathcal{A}$, die T erfüllt, erfüllt auch φ,

(b) $T \vdash \varphi$, d.h. es gibt einen mit den Beweisregeln und den Aussagen aus T aufgebauten Beweis von φ.

Beweis: (Skizze) Sei $T := \{\, \varphi_{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ mit den Aussagen $\varphi_{\geq n}$ und $\varphi := \varphi_{endl}$ aus dem vorigen Beweis. Jedes Modell $\mathcal{A}$ von T ist unendlich und erfüllt daher die zweitstufige Aussage $\neg\varphi$; daher gilt $T \models \neg\varphi$. Mit $(a) \Rightarrow (b)$ folgt $T \vdash \neg\varphi$, d.h. es gibt einen Beweis von φ aus T. Da Beweise *endlich* sind, werden darin nur *endlich viele* Aussagen von T benutzt, und daher wäre auch $E \vdash \neg\varphi$ für ein endliches $E \subseteq T$. Wegen $(b) \Rightarrow (a)$ wäre $E \models \neg\varphi$. Dies wiederspricht der Erfüllbarkeit von $E \cup \{\varphi\}$ durch eine hinreichend große endliche Struktur. □

Prädikatenlogik der schwachen zweite Stufe

In dieser Version der zweitstufigen Logik bleibt die Syntax unverändert, aber die Relationsquantoren werden anders interpretiert, nämlich nur durch *endliche* Relationen der jeweiligen Stelligkeit.

Prädikatenlogik der monadischen zweiten Stufe

In dieser Version der zweitstufigen Logik wird die Syntax eingeschränkt: alle zweitstufigen Relationsvariablen sind einstellig, d.h. Variablen laufen nur über die Teil-*Mengen* des Individuenbereichs.

Beispiel 7.11 (Charakterisierung der natürlichen Zahlen) Die Menge der natürlichen Zahlen ist die kleinste Menge, die die 0 enthält und mit jedem Element n auch dessen Nachfolger, $s(n)$. Durch die (monadisch) zweitstufige Formel

$$\varphi(X, x) := \forall X([X(0) \wedge \forall n(X(n) \rightarrow X(s(n)))] \rightarrow X(x))$$

kann man ausdrücken, daß ein Element x in allen Mengen liegt, die 0 enthalten und unter s abgeschlossen sind. Die (zu $\forall x\varphi$ äquivalente) Formel

$$\psi(X) := [X(0) \wedge \forall n(X(n) \to X(s(n)))] \to \forall n\, X(n)$$

ist ein *Induktionsaxiom* für X: sie drückt aus, daß X schon alle Individuen enthält, wenn sie die 0 enthält und unter s abgeschlossen ist. Wenn also $\mathcal{A} = (A, s^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}})$ eine Struktur ist, in der die Aussage

$$\forall x(0 \neq s(x)) \wedge \forall x \forall y(s(x) = s(y) \to x \doteq y) \wedge \forall x\varphi$$

gilt, dann ist $\mathcal{A}$ isomorph zu den natürlchen Zahlen: die Abbildung $f(n) := s^{\mathcal{A}^n}(0^{\mathcal{A}})$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A, die $0^{\mathcal{N}}$ in $0^{\mathcal{A}}$ und $s^{\mathcal{N}}$ in $s^{\mathcal{A}}$ überführt.

Beispiel 7.12 (Prinzip der kleinsten Zahl) Die Induktionsaxiome kann man (mit Hilfe der Anordnung) auch anders formulieren: jede nicht leere Menge enthält ein kleinstes Element.

$$\forall X(X \neq \emptyset \to \exists \in X\, \forall y < x\ y \notin X).$$

Beispiel 7.13 (Gleichheitsdefinition) Zwei Individuen unterscheiden sich durch ihre Eigenschaften. Daher kann man die Gleichheit von Individuen in der monadischen zweiten Stufe *definieren*:

$$\forall x \forall y(x \doteq y \leftrightarrow \forall X(X(x) \leftrightarrow X(y)). \tag{26}$$

Zwei Objekte sind demnach gleich, wenn sie dieselben Eigenschaften haben.

Eine der Eigenschaften X, durch die sich die Objekte $a \neq b$ unterscheiden, ist ja $X := \{a\}$. Allerdings wird durch (26) die Bedeutung von $\doteq$ wegen

$$X(b) \iff \{a\}(b) \iff b \in \{a\} \iff b = a$$

letztlich doch auf den (im Extensionalitätsaxiom der Mengen schon vorausgesetzen) Begriff der Gleichheit von Individuen zurückgeführt. Immerhin braucht man aber das Gleichheitssymbol $\doteq$ in der monadischen zweiten Stufe eigentlich nicht.

7.3 Die Hierarchie der einfachen Typen

Im Mengenuniversum $\mathcal{V} = (V, \in, \emptyset)$ haben wir nur *eine* Art von Objekten, die Mengen. (Manchmal erlaubt man eine zweite Art von Objekten, die „Urelemente“, die als Elemente in Mengen erlaubt sind, aber selbst keine Mengen sind.)

In einer Peirce'schen Algebra $\mathcal{P} = (\mathcal{R}, \mathcal{B}, :, ^c)$ hat man *zwei* Arten von Objekten, die „Relationen“ $r \in R$ der Relationenalgebra $\mathcal{R}$ und die „Mengen“ $b \in B$ der

Boole'schen Algebra $\mathcal{B}$. Im allgemeinen reicht es nicht, endlich viele Sorten von Objekten und entsprechende Variablen zu unterscheiden.

Um etwa zwischen einfacheren und komplizierteren Mengen zu unterscheiden, zählt man, wie viele Anwendungen der Potenzmengenbildung man braucht, um die jeweiligen Mengen zu konstruieren. Mengen und Relationen über einer Grundmenge gelten als Objekte zweiter Stufe, Mengen und Relationen von Objekten höchstens zweiter Stufe gelten als Objekte dritter Stufe. In der Programmierung beginnt man ebenfalls zuerst mit einfachen Objekten wie Zahlen und Boole'schen Werten, definiert dann Listen und Felder solcher Objekte, oder Funktionen, die auf solche Objekte anwendbar sind, und anschließend wieder Listen der neuartigen Objekte oder Funktionen, die auf die früheren Funktionen anwendbar sind. So werden stets neue Arten von Objekten aus schon vorhandenen aufgebaut.

Wir betrachten nun eine Theorie, in der man unendlich viele Arten oder *Typen* von Objekten (d.h. semantische Kategorien) unterscheidet und sytematisch aus Grundtypen aufbaut. Für jede Art gibt es eine eigene Art von sprachlichen Ausdrücken (d.h. syntaktischen Kategorien), mit denen Objekte dieser Art bezeichnet werden können.

Definition 7.14 *Grundtypen* ι und *einfache Typen* σ, τ sind gemäß folgender Grammatik aufgebaut:

$$
\begin{array}{lcll}
\iota & := & e & \text{(Individuen)} \\
 & \mid & t & \text{(Wahrheitswerte)} \\
 & \mid & \cdots & \text{(weitere Grundtypen)} \\
\sigma, \tau & := & \iota & \\
 & \mid & (\sigma \to \tau) & \text{(Funktionen)} \\
 & \mid & (\sigma \times \tau) & \text{(Paare)} \\
 & \mid & \sigma^* & \text{(Listen)} \\
 & \mid & \ldots & \text{(weitere Typen)}
\end{array}
$$

Mit *Typ* bezeichnen wir im Folgenden die Menge der einfachen Typen.

Definition 7.15 Die *Sprache* L_{Typ} besteht aus den *Termen vom Typ* τ, für jedes $\tau \in Typ$, die wie folgt aufgebaut sind:

(a) Jede Konstante $c : \tau$ und jede Variable x^τ ist ein Term vom Typ τ.

(b) Ist s ein Term vom Typ σ und t ein Term vom Typ $(\sigma \to \tau)$, so ist $t(s)$ ein Term vom Typ τ.

(c) Ist x^σ eine Variable und t ein Term vom Typ τ, so ist $\lambda x^\sigma t$ ein Term vom Typ $(\sigma \to \tau)$.

Terme vom Typ t heißen *Formeln* und werden mit φ, ψ bezeichnet, Terme vom Typ e heißen *Individuenterme*. Die *freien Variablen* eines Terms werden definiert über

$$\mathit{frei}(x^\tau : \tau) := \{x^\tau\}, \qquad \mathit{frei}(\lambda x^\sigma t) := \mathit{frei}(t) \setminus \{x^\sigma\},$$
$$\mathit{frei}(c : \tau) := \emptyset \qquad \mathit{frei}(t(s)) := \mathit{frei}(t) \cup \mathit{frei}(s)$$

Wir schreiben $t : \tau$ statt „t ist ein Term vom Typ τ“. Wir nehmen an, daß $\times$ stärker bindet als $\to$ und schreiben also $\sigma \times \tau \to \varrho$ statt $((\sigma \times \tau) \to \varrho)$.

Wir nehmen weiter an, daß es (mindestens) folgende Konstanten $c : \tau$ gibt:

$$\begin{array}{ll}
\neg : t \to t & \\
\vee : (t \times t) \to t & \exists^\tau : (\tau \to t) \to t \\
\wedge : (t \times t) \to t & \forall^\tau : (\tau \to t) \to t \\
\mathtt{nil}^\tau : \tau^* & \mathtt{cons}^\tau : \tau \times \tau^* \to \tau^* \\
\pi_1 : \sigma \times \tau \to \sigma & \langle , \rangle : \sigma \to (\tau \to \sigma \times \tau), \\
\pi_2 : \sigma \times \tau \to \tau &
\end{array}$$

Für diese Konstanten wird die übliche Schreibweise benutzt, z.B.

$$\begin{array}{lll}
(\varphi \wedge \psi) & \text{statt} & \wedge(\varphi, \psi), \\
\forall x^\sigma \varphi & \text{statt} & \forall^\sigma(\lambda x^\sigma \varphi), \\
\langle s, t \rangle & \text{statt} & \langle , \rangle(s)(t), \\
\mathtt{[]} & \text{statt} & \mathtt{nil} \\
[t_1, t_2, t_3] & \text{statt} & \mathtt{cons}(t_1, \mathtt{cons}(t_2, \mathtt{cons}(t_3, \mathtt{nil}))).
\end{array}$$

Definition 7.16 Eine *Typenstruktur* oder eine L_{Typ}*-Struktur*

$$\mathcal{D} = (D_\tau, c^{\mathcal{D}})_{\tau \in \mathit{Typ}}$$

besteht aus einer Menge $D_\tau \neq \emptyset$ für jedes $\tau \in \mathit{Typ}$ und einem Element $c^{\mathcal{D}} \in D_\tau$ für jede Konstante $c : \tau$, so daß folgende Bedingungen gelten:

(a) $D_{\sigma \to \tau} \subseteq \{ f \mid f : D_\sigma \to D_\tau \}$,

(b) $D_{\sigma \times \tau} = D_\sigma \times D_\tau = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in D_\sigma, b \in D_\tau \}$,

(c) $D_{\tau^*} = D_\tau^* = \{ \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid n \in \mathbb{N}, a_1 \in D_\tau, \ldots, a_n \in D_\tau \}$,

(d) $\exists^\tau(f) := \begin{cases} 1, & \text{falls } f(a) = 1 \text{ für ein } a \in D_\tau, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(e) $\forall^\tau(f) := \begin{cases} 1, & \text{falls } f(a) = 1 \text{ für alle } a \in D_\tau, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

und entsprechend für die übrigen Konstanten, z.B.

(f) $(\mathtt{cons}^\tau)^{\mathcal{D}}(a_1, \langle a_2, \ldots, a_n \rangle) := \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$,

(g) $\pi_2^{\mathcal{D}}(\langle a, b\rangle) := b$.

Eine *Belegung* über der Typenstruktur $\mathcal{D}$ ist eine Abbildung

$$g : \mathit{Var} \to \bigcup_{\tau \in \mathit{Typ}} D_\tau,$$

die jeder Variable $x : \tau$ ein Objekt $g(x : \tau) \in D_\tau$ des entsprechenden Bereichs zuordnet. Der *Wert* $[\![t]\!]_g^{\mathcal{D}}$ des Terms t bei der Belegung g über $\mathcal{D}$ ist das wie folgt definierte Element von D_τ:

$$\begin{aligned}
[\![c]\!]_g^{\mathcal{D}} &:= c^{\mathcal{D}} \\
[\![x^\tau]\!]_g^{\mathcal{D}} &:= g(x^\tau), \\
[\![t(s)]\!]_g^{\mathcal{D}} &:= [\![t]\!]_g^{\mathcal{D}}([\![s]\!]_g^{\mathcal{D}}), \\
[\![\lambda x^\sigma t]\!]_g^{\mathcal{D}} &:= \text{das } f \in \mathcal{D}_{\sigma\to\tau} \text{ mit } f(a) = [\![t]\!]_{g[x^\sigma/a]}^{\mathcal{D}} \text{ für alle } a \in D_\sigma,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Fall angenommen wurde, daß t den Typ τ hat.

Die Bedeutung der übrigen Ausdrücke ergibt sich dadurch aus der Bedeutung der Konstanten.

Bemerkung 7.17 Damit die obige Definition von $[\![t(s)]\!]_g^{\mathcal{D}}$ sinnvoll ist, muß die durch $f(a) = [\![t]\!]_{g[x:\sigma/a]}^{\mathcal{D}}$ definierte Funktion $f : D_\sigma \to D_\tau$ in der Teilmenge $D_{\sigma\to\tau} \subseteq \{\, g \mid g : D_\sigma \to D_\tau \,\}$ auch vorkommen!

Damit dieses Problem nicht stört, betrachtet man oft nur volle Typenstrukturen:

Definition 7.18 Eine *volle Typenstruktur* ist eine Typenstruktur $\mathcal{D}$, bei der für alle Typen σ und τ der Bereich aus *allen* totalen Funktionen (im Sinne der Mengenlehre) von D_σ nach D_τ besteht, d.h. $D_{\sigma\to\tau} = \{\, g \mid g : D_\sigma \to D_\tau \,\}$ ist.

Duch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke kann man leicht zeigen:

Proposition 7.19 Ist t ein Term vom Typ τ und g eine Belegung über der Typenstruktur $\mathcal{D}$, so ist $[\![t]\!]_g^{\mathcal{D}} \in D_\tau$.

Relationen $R \subseteq D_{\sigma_1} \times \cdots \times D_{\sigma_n}$ zwischen Objekten werden durch ihre charakteristischen Funktionen

$$\chi_R(\langle a_1 \ldots, a_n\rangle) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \langle a_1 \ldots, a_n\rangle \in R, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erfaßt und bilden keinen eigenen Bereich.

Definition 7.20 Sei $\mathcal{D}$ eine Typstruktur und τ ein Typ. Die *Stufe* eines Terms $t : \tau$ und eines Objekts $a \in D_\tau$ ist die Stufe $st(\tau)$ seines Typs, die induktiv definiert ist durch

$$\begin{aligned} st(\tau) &= 1, \qquad \text{für Grundtypen } \tau, \\ st(\sigma^*) &= st(\sigma), \\ st(\sigma \times \tau) &= \max\{st(\sigma), st(\tau)\}, \\ st(\sigma \to \tau) &= \max\{st(\sigma)+1, st(\tau)\}. \end{aligned}$$

Demnach sind insbesondere Individuen und Wahrheitswerte erststufige Objekte.

Beispiel 7.21 (a) Eigenschaften von Individuen und Relationen zwischen Individuen sind zweitstufige Objekte:

$$st(e \to t) = st((e \times \ldots \times e) \to t) = \max\{st(e)+1, st(t)\} = 2,$$

(b) Funktionen, die Individuen auf Individuen abbilden, sind zweitstufig:

$$st((e \times \ldots \times e) \to e) = \max\{\max\{st(e), \ldots, st(e)\}+1, st(e)\} = 2,$$

Die Definition ist so gemacht, daß man dieselbe Stufe erhält, egal ob man die Argumente als Paar oder nacheinander übergibt:

$$\begin{aligned} st(e \times e \to e) &= \max\{\max\{st(e), st(e)\}+1, 1\} = 2 \\ st(e \to (e \to e)) &= \max\{st(e)+1, \max\{st(e)+1, st(e)\}\} = 2. \end{aligned}$$

Zum Beispiel tun die beiden Funktionen

$$\lambda z : (e \times e).(\pi_1(z) + \pi_2(z)) \quad \text{und} \quad \lambda x : e.\lambda y : e.(x+y)$$

im wesentlichen dasselbe und sind deshalb von derselben Stufe. (Wenn man allerdings der zweiten Funktion nur das erste Argument x gibt, liefert sie eine Funktion, kein Individuum, als Wert.)

(c) Funktionen, die Funktionen als Argument nehmen oder als Wert ausgeben, heißen *Funktionale*. Funktionale wie das durch

$$map(f)([a_1, \ldots, a_n]) := [f(a_1), \ldots, f(a_n)]$$

definierte $map : (\sigma \to \tau) \to (\sigma^* \to \tau^*)$ haben mindestens dritte Stufe:

$$\begin{aligned} st((\sigma \to \tau) \to (\sigma^* \to \tau^*)) &= \max\{st(\sigma \to \tau)+1, st(\sigma^* \to \tau^*)\} \\ &= \max\{st(\sigma)+2, st(\tau)+1\} \end{aligned}$$

(d) Eigenschaften von Relationen und Funktionen haben mindestens Stufe 3, insbesondere die Quantoren $\exists^\sigma, \forall^\sigma : (\sigma \to t) \to t$, da

$$st((\sigma \to t) \to t) = \max\{\max\{st(\sigma)+1, 1\}+1, 1\} = st(\sigma)+2.$$

Um Tupel zu vermeiden, benutzt man statt mehrstelliger Funktionen f oft Funktionale f' höherer Stufe, die die Argumente von f „nacheinander“ erhalten, etwa zu $f : \sigma \times \tau \to \varrho$ das durch $f'(a)(b) := f(\langle a, b\rangle)$ definierte Funktional $f' : \sigma \to (\tau \to \varrho)$.

7.4 λ-Terme und Reduktion

Die Interpretation von $t(s)$ und $\lambda x : \sigma.r$ ist so gewählt, daß für jede Belegung g und Terme passender Typen gilt:

$$[\![(\lambda x : \sigma.r)(s)]\!]_g^{\mathcal{D}} = [\![r]\!]^{\mathcal{D}}_{g[x/[\![s]\!]_g^{\mathcal{D}}]} = [\![r[x/s]]\!]_g^{\mathcal{D}},$$

wenn man die Substitution $r[x/s]$ von Termen in Terme geeignet definiert.

Man möchte natürlich die Anwendung der durch $\lambda x : \sigma.r$ definierten Funktion auf das mir s bezeichnete Argument auch mit den Termen direkt ausrechnen können. Daher sollte die Gleichung

$$(\lambda x : \sigma.r)(s) = r[x/s]$$

bei jeder Interpretation gelten.

Bemerkung 7.22 Das Aussonderungsaxiom der Mengenlehre,

$$\forall v \forall \vec{y}\, \exists z\, \forall x (x \in z \leftrightarrow x \in v \wedge \varphi), \quad \text{für Formeln } \varphi(x, \vec{y}),$$

fordert die Existenz gewisser Mengen z, die man oft durch neue Terme, nämlich $\{\, x \mid x \in v \wedge \varphi(x, \vec{y})\,\}$, benennt; das entspricht einer Skolemfunktion.

In ähnlicher Weise kann man die λ-Terme $\lambda x^\sigma\, t^\tau$ als Skolemfunktionen für die sogenannten Axiome der *kombinatorischen Vollständigkeit*,

$$\forall \vec{y}\, \exists z\, \forall x\ z(x) = t, \quad \text{für Terme } t(x, \vec{y}),$$

verstehen. Sie besagen, daß für alle Parameter $\vec{y}$ jede „Kombination“ $t(x, \vec{y})$ von Anwendungen der $\vec{y}$ und x, die mit den Typen der Variablen verträglich ist, in Abhängigkeit von x betrachtet eine Funktion z aus dem Bereich $D_{\sigma\to\tau}$ darstellt.

Gleichungstheorie

Jede Interpretation der λ-Terme soll gewisse Gleichungen erfüllen, und aus der Gültigkeit gewisser Gleichungen folgt die Gültigkeit anderer Gleichungen. Umformungen von Termen, bei denen die Bedeutung sich nicht ändert, wollen wir natürlich rein syntaktisch von denen unterscheiden können, die die Bedeutung möglicherweise ändern.

Das führt zu folgendem Beweissystem von Axiomen und Schlußregeln, worin vorausgesetzt wird, daß die Typen der Terme stets „passen“, d.h. bei Anwendungstermen $t(s)$ eigentlich $t^{\sigma\to\tau}(s^\sigma)$ und bei Einsetzungen $t[x/s]$ eigentlich

$t^\tau[x^\sigma/s^\sigma]$ gemeint ist, für beliebige Typen σ, τ:

$$\frac{}{t \doteq t}\,(\text{refl}) \qquad \frac{r \doteq s, \quad s \doteq t}{r \doteq t}\,(\text{trans}) \qquad \frac{r \doteq s}{s \doteq r}\,(\text{sym})$$

$$\frac{r \doteq t, \quad s \doteq u}{r(s) \doteq t(u)}\,(\text{cong}_1) \qquad \frac{r \doteq s}{\lambda x^\sigma r \doteq \lambda x^\sigma s}\,(\text{cong}_2)$$

$$\frac{y \notin \mathit{frei}(t)}{\lambda x^\sigma t \doteq \lambda y^\sigma (t[x/y])}\,(\alpha) \qquad \frac{}{(\lambda x^\sigma t)(s) \doteq t[x/s]}\,(\beta) \qquad \frac{x \notin \mathit{frei}(t)}{t \doteq \lambda x^\sigma (t(x))}\,(\eta)$$

Die Einsetzung $t[x/s]$ ist (analog zu $\varphi[x/s]$ in der Prädikatenlogik) so zu definieren, daß gegebenenfalls gebundene Variablen in t umbenannt werden, damit keine freie Variable x^σ von s in den Wirkungsbereich eines λx^σ von t gerät.

Diese Regeln besagen, daß $\doteq$ durch eine Kongruenzrelation auf den Termen interpretiert werden muß, wobei nach (α) die Namen der gebundenen Variablen keine Rolle spielen, die Anwendung von λ-Termen so wie in (β) durch die definierenden Terme beschrieben funktioniert, und nach (η) aus einer Funktion durch Anwendung und Abstraktion keine andere Funktion entsteht.

Weitere Axiome sind nötig, um das Verhalten von Konstanten $c : \tau$ zu erfassen.

Bemerkung 7.23 Die Existenz *rekursiver Funktionen* kann man durch Axiome der Form

$$\forall \vec{y}\, \exists z\, \forall x\ z(x) \doteq t \quad \text{für Terme } t(x, \vec{y}, z)$$

sichern, wobei z die gewünschte rekursiven Funktion bezeichnet, etwa in $z(x) \doteq x + z(x-1)$. Aber der λ-Term $\lambda x^\sigma t^\tau$ enthält noch z frei und beschreibt daher keine (von den Parametern $\vec{y}$ abhängende) Lösung der Gleichung

$$\forall x^\sigma\ z(x) \doteq t^\tau(x, \vec{y}, z)$$

in z. Eine solche Lösung kann man aus dem Term $\lambda z^{\sigma \to \tau} \lambda x^\sigma t$ bekommen, wenn es ein Element $Y : (\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \tau)$ gibt mit der Eigenschaft

$$Y(f) \doteq f(Y(f)), \tag{27}$$

denn dann ist $z := Y(\lambda z \lambda x t)$ eine Lösung:

$$\begin{aligned} Y(\lambda z \lambda x t)(x) \quad &\doteq_{27} \quad (\lambda z \lambda x t)(Y(\lambda z \lambda x t))(x) \\ &\doteq_\beta \quad (\lambda x t)[z/Y(\lambda z \lambda x t)](x) \\ &\doteq_\beta \quad t[z/Y(\lambda z \lambda x t)]. \end{aligned}$$

Wenn man auch rekursiv definierte Funktionen braucht, nimmt man daher statt der obigen Existenzaxiome neue Konstante $Y : (\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \tau)$ und dafür die Gleichungen (27) zu den angegebenen Regeln hinzu. Für die Interpretation muß man dann Typstrukturen $\mathcal{D}$ mit passenden Elementen $Y^{\mathcal{D}}$, sogenannten *Fixpunktoperatoren*, nehmen. Lösungen z von $z = f(z)$ sind *Fixpunkte* von f, und $Y(f)$ ist ja eine solche Lösung.

Reduktionstheorie

Die Gleichungstheorie legt fest, welche Terme bei allen Interpretationen und Belegungen denselben Wert haben. Die Anwendung einer definierbaren Funktion auf ein Argument wird durch die Gleichung (β) beschrieben. Wenn man sie von links nach rechts liest, kann man sie als eine *Termvereinfachung* oder einen Schritt zur Berechnung des *syntaktischen Funktionswerts* verstehen – eines Terms s, für den $t \doteq s$ beweisbar ist und der seinerseits nicht weiter vereinfacht werden kann.

Um einen Begriff von Termvereinfachung, kurz $s \to t$, zu bekommen, bei der die semantischen Werte erhalten bleiben, also $[\![s]\!]^{\mathcal{D}}_g = [\![t]\!]^{\mathcal{D}}_g$ gilt, muß man die Gleichungen orientieren, sodaß man sie nur „in *einer* Richtung“ anwenden darf. Andernfalls würde z.B. wegen der Regel (sym) und der Regel (α) zur gebundenen Umbennenung die Vereinfachung nicht enden.

Daher betrachtet man für die Zwecke der Vereinfachung oder *Reduktion* zwei Terme, die durch gebundene Umbennungen in einander übergehen, als identisch.

Definition 7.24 Für die folgenden Reduktionsregeln sei wieder vorausgesetzt, daß die Typen der Teilterme zu einander „passen“:

$$\frac{r \to t, \quad s \to u}{r(s) \to t(u)}\,(\mathrm{cong}_1) \qquad \frac{r \to s}{\lambda x^\sigma r \to \lambda x^\sigma s}\,(\mathrm{cong}_2)$$

$$\frac{}{(\lambda x^\sigma t)(s) \to t[x/s]}\,(\beta) \qquad \frac{x \notin \mathit{frei}(t)}{\lambda x^\sigma (t(x)) \to t}\,(\eta)$$

Anwendungen der Reduktionsregeln (β) und (η) schreibt man oft als $s \to_\beta t$ beziehungsweise $s \to_\eta t$. Mit $s \to^* t$ ist gemeint, daß man von s mit endlich vielen Anwendungen der Reduktionsregeln (und gebundener Umbennenung) zu t kommen kann.

Durch Induktion über die Anzahl der Schritte in $s \to^* t$ sieht man: (i) wenn s den Typ σ hat, so auch t, und (ii) wenn t einen Teilterm r vom Typ ϱ hat, so auch s.

Die *Redexe* eines Terms sind die Teilterme, auf die die jeweiligen Reduktionsregeln angewendet werden können: ein *β-Redex von r* ist ein Teilterm von r der Form $(\lambda x^\sigma t)(s)$, ein *η-Redex* ein Teilterm der Form $\lambda x^\sigma(t(x))$ mit $x \notin \mathit{frei}(t)$.

Durch Anwenden der Reduktionsregeln können neue Redexe entstehen, wie in

$$\begin{array}{rcl} s & \equiv & (\lambda x^{\sigma\to\sigma}[z^{\sigma\to(\sigma\to\tau)}(x(y))(x(y))])(\lambda v^\sigma.v) \\ & \to_\beta & [z^{\sigma\to(\sigma\to\tau)}(x(y))(x(y))][x/\lambda v.v] \\ & \equiv & z^{\sigma\to(\sigma\to\tau)}((\lambda v.v)(y))((\lambda v.v)(y)) \\ & \equiv & t, \end{array}$$

wo der Ausgangsterm s *einen* β-Redex enthält und der durch die Reduktion entstandene Term t *zwei* β-Redexe. Daher ist das folgende Ergebnis nicht selbstverständlich, nach dem man durch wiederholtes Anwenden der Reduktionsregeln stets einen Term ohne Redexe erreichen kann.

Definition 7.25 Der Term r ist *in β-Normalform* (bzw.: β, η-Normalform), wenn er keinen β-Redex (bzw.: keinen β- und keinen η-Redex) enthält.

Satz 7.26 (Starke Normalisierbarkeit) Im einfach getypten λ-Kalkül ist jede Reduktionsfolge endlich.

Auf den Beweis müssen wir hier verzichten; man findet einen Beweis im Buch von Hindley und Seldin [6]. Im Unterschied zur (schwachen) Normalisierbarkeit wird hier behauptet, daß *jede* Reduktionsfolge terminiert, unabhängig von der Reihenfolge der Reduktionsanwendungen. (In die Auswertung bei Programmiersprachen ist stets eine bestimmte Reihenfolge eingebaut.)

Bemerkung 7.27 Wenn man λ-Terme *ohne* Typen betrachtet, gilt der Satz von der starken Normalisierbarkeit nicht: es gibt Terme, von denen eine unendliche Reduktionsfolge ausgeht. Deutlichkeitshalber schreiben wir hierzu $(\lambda x.t)$ statt λxt, sodaß der Wirkunksbereich der λ-Bindung klar wird. Für $t := (\lambda x.x(x))$ ist dann nach einem Reduktionsschritt

$$t(t) \;\equiv\; (\lambda x.x(x))(t) \;\to_\beta\; x(x)[x/t] \;\equiv t(t),$$

so daß beliebig viele β-Reduktionsschritte machen kann, ohne zu einem anderen, z.B. einem einfacheren Term zu kommen.

Beachte, daß der Term $t = \lambda x(x(x))$ durch keine Erweiterung um Typen zu einem Term des getypten λ-Kalküls wird: dazu müßte die Variable x einen Typ σ haben, aber $x^\sigma(x^\sigma)$ ist kein erlaubter Term des getypten λ-Kalküls. (Der Term $x(x)$ ist analog zur Formel $x \in x$ in der Russell'schen Antinomie.)

8 Montague-Semantik

Richard Montague hat in seiner Arbeit *The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English* [7] eine Grammatik für ein Fragment des Englischen mit einer Semantik in Typstrukturen angegeben. Dazu werden Ausdrücke der natürlichen Sprache in λ-Terme übersetzt und diese dann in Typstrukturen $\mathcal{D}$ ausgewertet. Selbstverständlich geht es hierbei „nur“ um die Funktionsweise der Interpretation natürlichsprachlicher Ausdrücke, nicht um die konkrete Interpretation im normalen Sprachgebrauch.

8.1 Übersetzung natürlicher Sprache in λ-Terme

Bevor wir die Grundideen dieser Semantik darstellen, machen wir uns einige Unterschiede zwischen natürlichen und formalen Sprachen bewußt, die einer „Übersetzung“ natürlicher in formale Sprachen im Wege stehen.

Probleme bei der Übersetzung

(a) Lexikalische Mehrdeutigkeit: viele Wörter der natürlichen Sprache haben verschiedene Bedeutungen, von denen wir die im jeweiligen Kontext geeignete in einer Weise auswählen, die zum Teil unbewußt ist und heute technisch noch nicht vollständig nachvollzogen werden kann. In einer logischen Sprache sollten dafür verschiedene Konstanten verwendet werden.

Beispiel: *Soll man sein Geld auf der Bank liegen lassen?*

(b) Elliptische Konstruktionen: um die Wiederholung von Wörtern zu vermeiden, werden in der natürlichen Sprache viele Abkürzungsmechanismen verwendet, so daß die syntaktische Form der Ausdrücke stark von der logisch erwarteten Form abweicht.

Beispiel: *Emil spricht mit seinen Kollegen, aber Karl nicht. Sabine hat mehr Probleme gelöst als wir erwartet hatten.*

(c) Pronomina und andere Pro-Formen der natürlichen Sprache bedeuten bei verschiedenen Vorkommen meist etwas anderes und müssen relativ zum Kontext aufgelöst werden; in einer logischen Sprache sollten verschieden zu interpretierende Vorkommen z.B. durch verschiedene Variablen dargestellt werden und die Auflösung durch eine λ-Bindung der jeweiligen Variablen und Anwendung des λ-Terms auf den Bezugsausdruck dargestellt werden.

Beispiel: *(Sein$_i$ Freund)$_j$ hat ihm$_i$ (ein Buch)$_k$ geliehen, aber er$_i$ hat es$_k$ ihm$_j$ noch nicht zurückgegeben.*

(d) Koordinatiospartikel verbinden in der natürlichen Sprache nicht nur Sätze, sondern auch Ausdrücke ganz anderer Art: Nominal-, Verbal-, Adjektiv-, Adverbialphrasen, außerdem einzelne Wörter wie Nomen, Verben, usw.

Diese Koordinierungen müssen(?) stets auf Koordinierungen von Formeln der logischen Sprache abgebildet werden.

Beispiel: *Ich unterhalte mich (weder mit Fritz noch mit Erna) (oft oder mit Begeisterung).*

(e) Quantoren treten in natürlichen Sprachen in Nominalphrasen auf und lassen (ohne Intonation oder semantische Analyse) ihren Wirkungsbereich nicht eindeutig erkennen; in logischen Sprachen steht ein Quantor vor der Formel, die ihr Wirkungsbereich ist.

Beispiel: *Gibt es in der Natur (einen Wirkstoff) gegen (jede Krankheit)?*

(f) Der Wirkungsbereich von Adverbien und anderen Partikeln hängt stark von der Intonation und Pausenstruktur ab, die in der Schriftsprache nicht wiedergegeben werden und nicht rekonstruiert werden können:

Beipiel: *Homer schrieb (nur zwei) Epen. – Homer schrieb nur (zwei Epen). Sie versprach (nicht (zu singen)). – Sie (versprach nicht) (zu singen).*

Viele weitere Phänomene der natürlichen Sprache haben keine direkte Entsprechung in logischen Sprachen und bereiten ebenfalls für die Übersetzung Probleme, z.B. Plural, Infinitive, Verben mit Satzkomplementen, metasprachliche Ausdrucksweisen.

Prädikation als Funktionsanwendung

Nach der klassischen Auffassung wird in einer Aussage *etwas über/von etwas ausgesagt.* Aber was der Begriff der *Prädikation*, des „x von y aussagen“, bedeutet, ist keineswegs offensichtlich.

Beispiel 8.1 Was wird in der Aussage

An Samstagen arbeitet Emil nicht.

worüber ausgesagt?

(a) über eine Person *Emil*, daß sie *an Samstagen nicht arbeite*,

(b) über den *Samstag*, den letzten Tag der Woche, *daß Emil dann nie arbeite*,

(c) über die Tätigkeit des *Arbeitens*, daß *Emil sie an Samstagen nicht ausübe*,

(d) über die Aussage *An Samstagen arbeitet Emil*, das sie *nicht wahr sei*,

oder etwa gar über die Negation *nicht*, daß *An Samstagen arbeitet Emil* darauf zutreffe?

In der Prädikatenlogik versteht man eine atomare Aussage $R(s,t)$ so, daß das Prädikat R *über* oder *von* den Objekten s und t ausgesagt wird: Eigenschaften und Beziehungen werden von (Tupeln von) Objekten ausgesagt.

Dieser Begriff der Prädikation kann durch folgende Funktionsanwendung interpretiert werden: die Funktion $R : e \times e \to t$ wird auf das Paar $\langle s,t\rangle : e \times e$ von Objekten angewendet und liefert einen Wahrheitswert. Hierbei verstehen wir R als die Funktion $\lambda z^{e\times e\to t}.R(z)$ und $R(s,t)$ als das Ergebnis der Funktionsanwendung

$$(\lambda z.R(z))(\langle s,t\rangle) \to_\beta R(\langle s,t\rangle).$$

Wir können aber $R(s,t)$ auch als Aussage über R verstehen: dazu bilden wir aus $R(\langle s,t\rangle)$ durch *Abstraktion von* R die Funktion

$$\lambda X^{e\times e\to t}.X(\langle s,t\rangle)$$

und wenden diese auf R an:

$$(\lambda X^{e\times e\to t}.X(\langle s,t\rangle))(R) \to_\beta R(\langle s,t\rangle).$$

Die Sprache L_{Typ} der Typentheorie hat also gegenüber der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe den Vorteil, daß man die Formeln *als Ergebnisse* von Ausdrucksvereinfachungen behandeln kann. Jeden zusammengesetzten Ausdruck können wir auf unterschiedliche Weise in Funktion und Argument zerlegen und so als verschiedene Prädikationen auffassen. Wir werden unten sehen, wie uns das bei der Angabe von Übersetzungsregeln hilft.

8.2 Die syntaktischen Kategorien der Grammatik

In der sogenannten *Kategorialgrammatik* von K. Ajdukiewicz [1], auf der die Montague-Grammatik aufbaut, werden Ausdrücke als Zeichenreihen verstanden und durch die zweistellige Verkettung aufgebaut. Die syntaktischen Kategorien für zusammengesetzte Ausdrücke, die keine abgeschlossenen Sätze sind, werden durch die Angabe der Kategorie beschrieben, die man ergänzen kann: der Kategorienname A/B steht für die Kategorie der Ausdrücke, die bei der Ergänzung um einen Ausdruck der Kategorie B einen Ausdruck der Kategorie A ergeben.

Ist Σ ein Alphabet und setzt man die Wortverkettung $\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ durch

$$V \cdot W := \{\, v \cdot w \mid v \in V, w \in W \,\}$$

auf Wortmengen $V, W \subseteq \Sigma^*$ fort, so ist

$$A/B := \{\, v \in \Sigma^* \mid \forall b \in B\ v \cdot b \in A \,\}.$$

Dann gilt bei dieser Bezeichnungskonvention der Kategorien die *Kürzungsregel*

$$A/B \cdot B \subseteq A$$

wie man leicht nachrechnen kann. Während in der Kategorialgrammatik auch Kategorien $B\backslash A := \{\, v \in \Sigma^* \mid \forall b \in B\ b \cdot v \in A \,\}$ betrachtet werden, verzichtet man in der Montague-Grammatik auf die Unterscheidung, ob die Ergänzung durch B-Ausdrücke rechts oder links erfolgt.

Definition 8.2 Die *syntaktischen Kategorien* werden durch folgende Grammatik erzeugt:

$$
\begin{array}{rcll}
A, B & := & e & \text{(Entitätenbezeichner)} \\
 & \mid & t & \text{(Aussagen)} \\
 & \mid & A/B & \text{(A-Ausdrücke, in denen ein B-Ausdruck fehlt)} \\
 & \mid & A/\!\!/B & \text{(A-Ausdrücke, in denen ein B-Ausdruck fehlt)}
\end{array}
$$

Jeder syntaktischen Kategorien wird später ein Typ der Sprache L_{Typ} zugeordnet, wobei A/B und $A/\!\!/B$ denselben Funktionstyp erhalten. Die Aufspaltung in zwei syntaktische Kategorien dient dazu, Unterschiede im syntaktischen Verhalten, denen kein logischer Unterschied entspricht, wiederzugeben.

R. Montague [7] verwendet in seiner Grammatik folgende syntaktische Kategorien für ein Fragment des Englischen:[8]

Kategorie		Informelle Bezeichnung	Basisausdruck
	e	Eigennamen	John, he$_n$
	t	Satz	–
CN :=	t//e	Gemeinname	man
IV :=	t/e	Verbalphrase	walks
T :=	t/IV	Nominalphrase (3.sg), Term	–
TV :=	IV/T	Transitives Verb	find, love
IAV :=	IV/IV	VP-Adverb	slowly
	t/t	Satzadverb	necessarily
	IAV/T	Präposition	in
	IV/t	Verb mit Satzkomplement	believe
	IV//IV	Verb mit Infinitivkomplement	try
DET :=	T/CN	Determinator	every, a, the

Tabelle 1: Die syntaktischen Kategorien der PTQ-Grammatik

8.3 Übersetzung der extensionalen Teilsprache

Um eine Übersetzung von natürlichsprachlichen Ausdrücken in die Sprache der Typentheorie zu definieren, betrachten wir zuerst nur solche Aussagen, die wir durch eine *extensionale* Interpreation der darin vorkommenden Verben und Bezeichnungen verstehen können, d.h. es soll nur auf die bezeichneten Individuen

[8] Wir übernehmen gewisse Vereinfachungen aus dem Lehrbuch von Dowty u.a. [5].

und die Tupel von Individuen ankommen, die im Umfang der verwendeten Verben und Nomen vorkommen.[9]

8.3.1 Übersetzung der syntaktischen Kategorien

Den syntaktischen Kategorien A werden Typen A' von L_{Typ} zugeordnet; alle Ausdrücke der Kategorie A werden später in λ-Terme vom Typ A' übersetzt.

Definition 8.3 Jeder syntaktischen Kategorie A wird durch

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl} e' & := & e & (A/B)' & := & (B' \to A') \\ t' & := & t & (A/\!\!/B)' & := & (B' \to A'). \end{array}$$

ein Typ A' von L_{Typ} zugeordnet.

Ignorieren wir die (intensionalen) Verben mit Satzkomplement, so erhalten wir folgende Typen und entsprechende Objekte:

Kategorie A		Typ A' von L_{Typ}	Objekt vom Typ A'
	e	e	Individuum
	t	t	Wahrheitswert
CN :=	t//e	$e \to t$	Individueneigenschaft
IV :=	t/e	$e \to t$	Individueneigenschaft
T :=	t/IV	$(e \to t) \to t$	Eigenschaft von Individueneigenschaften
TV :=	IV/T		
IAV :=	IV/IV	$(e \to t) \to (e \to t)$	Modifikator von Individueneigenschaften
	t/t	$t \to t$	Eigenschaft von Wahrheitswerten
	IAV/T		
DET :=	T/CN	$(e \to t) \to ((e \to t) \to t)$	

8.3.2 Basisausdrücke und ihre Übersetzung

Um Ausdrücke der Kategorie A in λ-Terme des Typs A' zu übersetzen, werden zuerst den Wörtern (d.h. den unzusammengesetzten Ausdrücken) der Kategorie A (evtl. zusammengesetzte) Terme des entsprechenden Typs zugeordnet. In den meisten Fällen sind dies Konstante; aber nicht alle syntaktischen Kategorien der PTQ-Grammatik enthalten Basisausdrücke. Wir legen uns für die extensionale Teilsprache auf folgende Basisausdrücke fest:

[9] Dadurch werden z.B. intensionale Verben wie *believe* ausgeschlossen, bei denen die Wahrheit von Aussagen nicht vom Wahrheitswert des Komplementsatzes abhängt, wie in *Plato believed that ideas exist in reality.*

Definition 8.4 (Basisausdrücke einer Kategorie) Die syntaktischen Kategorien enthalten folgende Basisausdrücke:

(a) *man*, *woman*, *book* sind von der Kategorie CN (Gemeinnamen),

(b) *John*, *Mary*, he_n ($n \in \mathbb{N}$), sind von der Kategorie e (Individuennamen)[10]

(c) *walk*, *talk*, sind von der Kategorie IV (intransitive Verben)

(d) *find*, *see*, *read*, sind von der Kategorie TV (transitive Verben),

Wir schreiben oft $w : A$ oder w^A statt „w hat die Kategorie A“.

Definition 8.5 (Übersetzung der Basisausdrücke) Jedem Wort w der Kategorien A wird (in injektiver Weise) eine Konstante w' vom Typ A' zugeordnet, außer den Pronomina $he_n : e$, denen die Variablen $x_n : e$ zugeordnet werden, und den Quantoren, die wie folgt übersetzt werden:

$$\begin{array}{rcl}
(every^{DET})' & := & \lambda P^{e\to t}\lambda Q^{e\to t}\forall x^e(P(x) \to Q(x)) \\
(a^{DET})' & := & \lambda P^{e\to t}\lambda Q^{e\to t}\exists x^e(P(x) \wedge Q(x)) \\
(the^{DET})' & := & \lambda P^{e\to t}\lambda Q^{e\to t}\exists x^e((\forall y^e(P(y) \leftrightarrow x \doteq y) \wedge Q(x)).
\end{array}$$

Die Übersezung von α^{DET} hat den richtigen Typ $DET' = (CN' \to T') = (e \to t) \to ((e \to t) \to t)$. Für Basisausdrücke anderer Kategorien erhalten wir z.B. folgende Übersetzungen:

$$\begin{array}{rcl}
(man^{CN})' & := & man' : CN' = man' : (e \to t), \\
(walk^{IV})' & := & walk' : IV' = walk' : (e \to t), \\
(John^{e})' & := & John' : e. \\
(he_n^{e})' & := & x_n : e.
\end{array}$$

(Es ist klar, daß die Übersetzung des bestimmten Artikels nicht besonders gut funktioniert, und daß auch der unbestimmte Artikel genau genommen nicht wie ein Existenzquantor behandelt werden sollte.)

8.3.3 Bildung und Übersetzung zusammengesetzter Ausdrücke

Die Bildung komplexer Ausdrücke geben wir durch numerierte Regeln der folgenden Form an:

$$\text{(S Nr.)}\ \frac{\alpha_1 : A_1,\ \ldots, \alpha_k : A_k}{\alpha : A}$$

[10] Ich weiche hier von Montague, bei dem diese Ausdrücke die Kategorie T haben, ab, damit die Übersetzung uniformer wird. Das wird durch die Syntaxregel (S 1) kompensiert, mit der Ausdrücke der Kategorie e in solche der Kategorie T umgewandelt werden können (entsprechend den traditionellen Regeln $NP \to EN$ und $NP \to Pron$).

Diese Regel besagt: ist α_1 ein Ausdruck der Kategorie A_1 usw., so ist der (aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ gebildete) Ausdruck α von der Kategorie A.

Die Übersetzung eines zusammengesetzten Ausdrucks wird durch entsprechende Regeln

$$\text{(T Nr.)}\ \frac{\alpha_1' : A_1',\ \ldots, \alpha_k' : A_k'}{\alpha' : A'}$$

angegeben, die angeben, wie die Übersetzung der Zusammensetzung aus den Übersetzungen der Teilausdrücke gebildet wird.

Definition 8.6 Die Bildung und Übersetzung zusammengesetzter Ausdrücke erfolgt nach den Regeln aus Tabelle 2.

(S 1) $\dfrac{\alpha : e}{\alpha : T}$	(T 1) $\dfrac{\alpha' : e}{\lambda P^{e\to t}[P(\alpha')] : (e \to t) \to t}$
(S 2) $\dfrac{\delta : DET, \quad \xi : CN}{\delta\ \xi : T}$	(T 2) $\dfrac{\delta' : (CN' \to T'), \quad \xi' : CN'}{\delta'(\xi') : T'}$
(S 3_n) $\dfrac{\xi : CN, \quad \varphi : t}{\xi\ \textit{such that}\ \varphi[he_n/he] : CN}$	(T 3_n) $\dfrac{\xi' : CN', \quad \varphi' : t}{\lambda x_n^e(\xi'(x_n) \wedge \varphi') : CN'}$
(S 4) $\dfrac{\alpha : T, \quad \delta : IV}{\alpha\ \delta^{3.sg}\ : t}$	(T 4) $\dfrac{\alpha' : T', \quad \delta' : IV'}{\alpha'(\delta') : t}$
(S 5) $\dfrac{\delta : TV, \quad \beta : T}{\delta\ \beta^{acc}\ : IV}$	(T 5) $\dfrac{\delta' : (T' \to IV'), \quad \beta' : T'}{\delta'(\beta') : IV'}$
(S 11a) $\dfrac{\varphi : t, \quad \psi : t}{\varphi \text{ and } \psi : t}$	(T 11a) $\dfrac{\varphi' : t, \quad \psi' : t}{(\varphi' \wedge \psi') : t}$
(S 11b) $\dfrac{\varphi : t, \quad \psi : t}{\varphi \text{ or } \psi : t}$	(T 11b) $\dfrac{\varphi' : t, \quad \psi' : t}{(\varphi' \vee \psi') : t}$
(S 12a) $\dfrac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ and } \gamma : IV}$	(T 12a) $\dfrac{\delta' : e \to t, \quad \gamma' : e \to t}{\lambda x^e(\delta'(x) \wedge \gamma'(x)) : e \to t}$
(S 12b) $\dfrac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ or } \gamma : IV}$	(T 12b) $\dfrac{\delta' : e \to t, \quad \gamma' : e \to t}{\lambda x^e(\delta'(x) \vee \gamma'(x)) : e \to t}$
(S 13) $\dfrac{\alpha : T, \quad \beta : T}{\alpha \text{ or } \beta\ : T}$	(T 13) $\dfrac{\alpha' : T', \quad \beta' : T'}{\lambda P^{e\to t}(\alpha'(P) \vee \beta'(P)) : T'}$
(S 14_n) $\dfrac{\alpha : T, \quad \varphi : t}{\varphi[he_n/\alpha] : t}$	(T 14_n) $\dfrac{\alpha' : T', \quad \varphi' : t}{\alpha'(\lambda x_n^e.\varphi') : t}$

Tabelle 2: Syntax- und Übersetzungsregeln der extensionalen Teilsprache

Darin werden zwei Varianten der Ersetzung $\alpha[x/\beta]$ benutzt:

(a) Die Ersetzung $\varphi[he_n/\alpha]$ in (S 14_n) wie folgt definiert: falls $\alpha \equiv he_k$ ist, werden alle he_n in φ durch he_k (im jeweils gleichen Kasus) ersetzt; andernfalls wird das erste Vorkommen von he_n durch α und die übrigen durch *he* (bzw. *she*, *it*) ersetzt, wobei der Kasus vom jeweiligen Vorkommen von he_n und das Genus vom ersten Basisausdruck der Kategorie CN oder T in α übernommen wird.

(b) Die Ersetzung $\varphi[he_n/he]$ in (S 3) ist etwas anders: alle Vorkommen von he_n in φ sollen durch *he* bzw. *she*,*it* ersetzt werden, wobei das Genus sich nach dem Genus des ersten Basisausdrucks der Kategorie CN in ξ richtet.

Beachte, daß die Regel (S 1) die Basisausdrücke $\alpha : e$ zu „zusammengesetzten" Ausdrücken $\alpha : T$ macht, deren Übersetzung keine Konstante des Typs T' zu sein braucht. In den übrigen Syntaxregeln werden keine Ausdrücke der Kategorie e mehr benutzt.

Da die Übersetzung eines Ausdrucks von seinem syntaktischen Aufbau abhängt, geben wir im Folgenden in den zu übersetzenden Ausdrücken die Teilausdrücke durch Hilfsklammern und ihre Kategorien durch obere Indizes bei der schließenden Klammer an. (Bei den Übersetzungen wird $=_n$ für Umformungen nach der Übersetzungsregel (T n) und $\to_\beta$ für solche nach der β-Reduktionsregel geschrieben.)

Übersetzung von Personalpronomen und Eigennamen

Beispiel 8.7 Einfache Terme, d.h. als Terme aufgefaßte Pronomen und Eigennamen, werden wie folgt übersetzt: bei Pronomen $he_n : T$ mit (T 1)

$$\begin{aligned} ((he_n^e)^T)' &=_1 \lambda P^{e\to t}[P((he_n^e)')] : (e \to t) \to t \\ &= \lambda P^{e\to t}[P(x_n^e)] : (e \to t) \to t. \end{aligned}$$

Analog werden als Terme aufgefaßte Eigennamen wie *John* : T übersetzt:

$$\begin{aligned} ((John^e)^T)' &=_1 \lambda P^{e\to t}[P((John^e)')] : (e \to t) \to t \\ &= \lambda P^{e\to t}[P(John'^e)] : (e \to t) \to t. \end{aligned}$$

In einer Typstruktur $\mathcal{D}$ ist der Wert $[\![\lambda P[P(John')]]\!]^{\mathcal{D}} \in D_{(e\to t)\to t}$ dieses Terms kein Individuum, sondern *die charakteristische Funktion der Menge aller Eigenschaften des Individuums* $[\![\mathrm{John}']\!]^{\mathcal{D}} \in D_e$.

Das sieht komplizierter aus als nötig; der Grund, es so zu machen, besteht darin, daß die Übersetzung dann nach demselben Schema verläuft wie bei koordinierten Termen wie *John or Mary* und quantifizierten Termen wie *every man* (s.u.).

Übersetzung atomarer Aussagen mit intransitivem Verb

Beispiel 8.8 Einfache Aussagen werden wie folgt übersetzt.

$$\begin{aligned}(((John^e)^T\ walk^{IV}s)^t)' &=_4 ((John^e)^T)'((walk^{IV})') : t\\ &=_1 \lambda P^{e\to t}[P(John'^{\,e})](walk'^{\,e\to t}) : t\end{aligned}$$

Mit einer β-Reduktion kann der rechte Ausdruck vereinfacht werden zu

$$walk'^{e\to t}(John'^{\,e}) : t,$$

ohne daß sich sein Wert bei einer Belegung g über einer Struktur $\mathcal{D}$ ändert.

Obwohl die Kategorie der Terme nur Nominalphrasen der dritten Person im Singular enthält, enthalten die Ausdrücke der Kategorie IV nicht die Vollformen, sondern die Infinitive (bzw. Stammformen) der darin vorkommenden Verben. Deshalb hat die Morphologie der Vollform des Verbs keinen Einfluß auf das Übersetzungsergebnis.[11]

Beispiel 8.9 Aussagen mit koordinierten Eigennamen werden mit (T 4) und (T 13) und den obigen Übersetzungen von Termen übersetzt wie bei

$$\begin{aligned}&(((John\ or\ Mary)^T\ walk^{IV}s)^t)'\\ &=_4 ((John^T\ or\ Mary^T)^T)'((walk^{IV})')\\ &=_{13} \lambda P[(John^T)'(P) \vee (Mary^T)'(P)]((walk^{IV})') : t\\ &= \lambda P[\lambda Q[Q(John'^{\,e})](P) \vee \lambda Q[Q(Mary'^{\,e})](P)](walk'^{\,e\to t}) : t.\end{aligned}$$

Da es auf die Namen der gebundenen Variablen nicht ankommt, wurden bei der Übersetzung der Eigennamen $John^T$ und $Mary^T$ der Lesbarkeit halber neue Prädikatsvariable Q statt P benutzt.

Durch Anwendungen von β-Reduktionen wird kann dieser Ausdruck weiter vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned}&\lambda P[\lambda Q[Q(John'^{\,e})](P) \vee \lambda Q[Q(Mary'^{\,e})](P)](walk'^{\,e\to t}) : t\\ &\to_\beta \lambda P[P(John') \vee P(Mary')](walk'^{\,e\to t}) : t\\ &\to_\beta [walk^{e\to t}(John'^{\,e}) \vee walk^{e\to t}(Mary'^{\,e})] : t,\end{aligned}$$

wieder ohne daß sich der Wert bei einer Belegung über einer Typstruktur $\mathcal{D}$ ändert. Die entstandene Formel ist die, die man als Ergebnis erwartet haben sollte.

[11] Die Syntaxanalyse des gesamten Ausdrucks sollte also eine morphologische Analyse umfassen. Die Morphologie des Numerus und der Person müßte bei der Übersetzung eines größeren Sprachfragments aber stärker berücksichtigt werden.

Mit der Regel (S 12) können in ähnlicher Weise Verbalphrasen koordiniert werden und z.B. den Satz *John walks and talks* aufbauen. Die Übersetzung dieses Satzes und die von *John walks and John talks* sind äquivalente λ-Terme. Diese Übersetzungen machen sozusagen die in der natürlichen Sprache erlaubten "Abkürzungen“ von Aussagen rückgängig: die abkürzende Koordination von Termen bzw. Verbalphrasen wird „wieder“ zu einer boole'schen Kombination von Formeln.

Beispiel 8.10 Eine Aussage mit quantifiziertem Subjektterm wird mit (T 4) und (T 2) übersetzt:

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{(((every\ woman)^T\ talk^{IV}s)^t)'} \\ =_4 & ((every^{DET}\ woman^{CN})^T)'((talk^{IV})') : t \\ =_2 & (every^{DET})'((woman^{CN})')(talk'^{\,e\to t}) : t \\ = & (every^{DET})'(woman'^{\,e\to t})(talk'^{\,e\to t}) : t \\ = & \lambda P^{e\to t}\lambda Q^{e\to t}[\forall x^e(P(x) \to Q(x))](woman'^{\,e\to t})(talk'^{\,e\to t}) : t \end{array}$$

Mit β-Reduktionen kann man das vereinfachen zu der erwarteten Formel:

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\lambda P^{e\to t}\lambda Q^{e\to t}[\forall x^e(P(x) \to Q(x))](woman'^{\,e\to t})(talk'^{\,e\to t}) : t} \\ \to_\beta & \lambda Q^{e\to t}[\forall x^e(woman'^{\,e\to t}(x) \to Q(x))](talk'^{\,e\to t}) : t \\ \to_\beta & \forall x^e(woman'^{\,e\to t}(x) \to talk'^{\,e\to t}(x)) : t \end{array}$$

Übersetzung von Relativsätzen

Die Beispielgrammatik von Montague vermeidet zwar Relativpronomina, erlaubt aber mit (S 3), eine unnatürliche Form von Relativsätzen zu konstruieren: statt *Every man who walks talks* kann nur *Every man such that he walks talks* erzeugt werden. (Entsprechend für Relativpronomen in anderen Kasus, wenn man ein transitives Verb im Relativsatz hat.)

Im Folgenden berücksichtigen wir die Verbmorphologie nicht mehr und schreiben z.B. statt $talk^{IV}s$ einfach $talks^{IV}$. Außerdem wird die syntaktische Analyse nur soweit angegeben, wie sie für den jeweiligen Übersetzungsschritt wichtig ist, d.h. die Analyse der Teilausdrücke wird erst bei deren Übersetzung dargestellt.

Beispiel 8.11 Relativsätze werden mit (T 3) übersetzt:

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{((Every\ man\ such\ that\ he\ walks)^T talks^{IV})^t)'} \\ =_4 & ((Every\ man\ such\ that\ he\ walks)^T)'((talks^{IV})') : t \\ = & ((Every^{DET}\ (man\ such\ that\ he\ walks)^{CN})^T)'(talks'^{\,e\to t}) : t \\ =_2 & (Every^{DET})'(((man\ such\ that\ he\ walks)^{CN})')(talks'^{\,e\to t}) : t \\ = & (Every^{DET})'(((man^{CN}\ such\ that\ (he_n^T\ walks^{IV})^t[he_n/he])^{CN})')(talks'^{\,e\to t}) : t \\ =_3 & (Every^{DET})'(\lambda x_n((man^{CN})'(x_n) \wedge ((he_n^T\ walks^{IV})^t)'))(talks'^{\,e\to t}) : t \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
=_4 & (Every^{DET})'(\lambda x_n(man'^{e\to t}(x_n) \wedge ((he^T_n)'((walks^{IV})'))))(talks'^{e\to t}) : t \\
= & (Every^{DET})'(\lambda x_n(man'^{e\to t}(x_n) \wedge \lambda P[P(x_n)](walks'^{e\to t})))(talks'^{e\to t}) : t \\
\to_\beta & \lambda P\lambda Q\forall x_k(P(x_k) \to Q(x_k))(\lambda x_n(man'^{e\to t}(x_n) \wedge walks'^{e\to t}(x_n)))(talks'^{e\to t}) : t \\
\to_\beta & \lambda Q\forall x_k(\lambda x_n(man'^{e\to t}(x_n) \wedge walks'^{e\to t}(x_n))(x_k) \to Q(x_k))(talks'^{e\to t}) : t \\
\to_\beta & \lambda Q\forall x_k((man'^{e\to t}(x_k) \wedge walks'^{e\to t}(x_k)) \to Q(x_k))(talks'^{e\to t}) : t \\
\to_\beta & \forall x_k((man'^{e\to t}(x_k) \wedge walks'^{e\to t}(x_k)) \to talks'^{e\to t}(x_k)) : t
\end{array}$$

Auflösung anaphorischer Personalpronomen

Anaphorische Bezüge von Personalpronomina werden mit der Regel (S 14) behandelt. Dabei gibt es zwei Analysen: eine, bei der das Pronomen auf ein Bezugsnomen im gleichen Satz bezogen (und dadurch „gebunden“) wird, und eine andere, bei der es „frei“ bleibt und auf Nomen in vorangegangenen Sätzen bezogen werden kann.

Beispiel 8.12 (a) Die Aussage *A woman walks and she talks* wird mit (S 14) aufgebaut. Dann wird sie mit (T 14) übersetzt und die Koordination der Teilformeln mit (T 11a):

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{((A\ woman\ walks\ and\ she\ talks)^t)'} \\
= & (((he_n\ walks\ and\ he_n\ talks)^t[he_n/(a\ woman)^T])^t)' \\
=_{14} & ((a\ woman)^T)'(\lambda x_n.((he_n\ walks\ and\ he_n\ talks)^t)') \\
= & ((a\ woman)^T)'(\lambda x_n.(((he_n\ walks)^t\ and\ (he_n\ talks)^t)^t)') \\
=_{11} & ((a\ woman)^T)'(\lambda x_n.(((he^T_n\ walks^{IV})^t)' \wedge ((he^T_n\ talks^{IV})^t)') \\
=_4 & ((a\ woman)^T)'(\lambda x_n.(((he^e_n)^T)'((walks^{IV})') \wedge ((he^e_n)^T)'((talks^{IV})'))) \\
= & ((a^{DET}\ woman^{CN})^T)'(\lambda x_n.(\lambda P[P(x_n)](walks') \wedge \lambda P[P(x_n)](talks'))) \\
=_2 & (a^{DET})'(woman^{CN})'(\lambda x_n.(\lambda P[P(x_n)](walks') \wedge \lambda P[P(x_n)](talks'))) \\
= & \lambda P\lambda Q\exists x(P(x) \wedge Q(x))(woman')(\lambda x_n(\lambda P[P(x_n)](walks') \wedge \lambda P[P(x_n)](talks'))) \\
\to_\beta & \lambda P\lambda Q\exists x(P(x) \wedge Q(x))(woman')(\lambda x_n(walks'(x_n) \wedge talks'(x_n))) \\
\to_\beta & \exists x(woman'(x) \wedge \lambda x_n(walks'(x_n) \wedge talks'(x_n))(x)) \\
\to_\beta & \exists x(woman'(x) \wedge (walks'(x) \wedge talks'(x)))
\end{array}$$

(b) Wenn wir Personalpronomen ohne Indizes auch als Basisausdrücke der Kategorie e erlauben, erhalten wir die zweite Lesart durch

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{((A\ woman\ walks\ and\ she\ talks)^t)'} \\
= & (((A\ woman\ walks)^t\ and\ (she\ talks)^t)^t)' \\
=_{11} & ((A\ woman\ walks)^t)' \wedge (((she^e)^T\ talks^{IV})^t)' \\
=_4 & ((A\ woman\ walks)^t)' \wedge ((she^e)^T)'((talks^{IV})') \\
=_{\beta,4} & \lambda P\lambda Q\exists x(P(x) \wedge Q(x))(woman')(walk') \wedge \lambda P[P(she')](talk') \\
\to_\beta & \exists x[woman'(x) \wedge walk'(x)] \wedge talk'(she')
\end{array}$$

Personalpronomen ohne Index werden hier wie spezielle Individuenkonstanten behandelt; für Personalpronomen im Plural muß man dann aber spezielle *Mengen* von Individuen als Werte dieser Konstanten vorsehen.

Wenn man das nicht will, sollte man Aussagen mit Personalpronomen erst durch Indizierung der Personlapronomen in Ausdrücke des Sprachfragments umwandeln; dann würde die Übersetzung eine Formel wie

$$\exists x[woman'(x) \wedge walk'(x)] \wedge talk'(x_n)$$

ergeben.

Übersetzung atomarer Aussagen mit transitivem Verb

Transitive Verben, auch extensionale, werden bei Montague erst in der intensionalen Teilsprache behandelt. Montague behandelt das Subjekt transitiver Verben stets extensional, die Objekte grundsätzlich intensional (s.u.); der Fall extensional gemeinter Objekte wird dann auf den intensionalen Fall zurückgeführt.

Wir vermeiden hier den Umweg über Verben mit intensionalem Objekt. Es läßt sich aber ein Problem nicht umgehen: intuitiv sollte einem zweistelligen (extensionalem) Verb wie $love^{(t/T)/T}$ eine Konstante $love'^{\,e\to(e\to t)}$ zugeordnet werden und dann sollte die Aussage $(John^T\ (loves^{(t/T)/T}\ Mary^T)^{t/T})^t$ in den Term $(John^T)'(\lambda x^e[love'^{\,e\to(e\to t)}(Mary'^{\,e})(x^e)])$ übersetzt werden. Die bisherigen Übersetzungsregeln würden dann mit β-Reduktionen zum gewünschten Ergebnis $love'^{\,e\to(e\to t)}(Mary'^{\,e})(John'^{\,e}) : t$ führen.

Das Problem hierbei ist, daß Montagues Kategorie $TV := (t/e)/T$ nicht zu unserer Kategorisierung $love^{(t/T)/T}$ paßt, andererseits aber die Übersetzung

$$((loves^{(t/T)/T}\ Mary^T)^{t/T})' = \lambda x^e[love'^{\,e\to(e\to t)}(Mary'^{\,e})(x^e)]$$

naheliegt, bei der der Ergebnisterm r den Typ $(t/e)'$ statt $(t/T)'$ hat. Wir verpacken r daher zu $\lambda P^{T'}[P(r)] : T' \to t$ und gleichen das durch eine zusätzliche Funktionsanwendung bei der Übersetzung der Satzregel (T 4) wieder aus.

Wir setzen $IV := t/T$, nicht t/e, lassen aber $TV := IV/T$ und kategorisieren bitransitive Verben durch $BTV := TV/T$. Extensionale Verben mit Term-Komplementen werden mit Hilfe von Konstanten vom Typ $e \to t$ bzw. $e \to (e \to t)$ oder $e \to (e \to (e \to t))$ nun wie folgt übersetzt:

$$\begin{array}{rcl}
(walk^{IV})' & := & \lambda P^{T'}[P(walk'^{\,e\to t})] : IV', \\
(love^{TV})' & := & \lambda Q^{T'}\lambda P^{T'}[P(\lambda x^e[Q(\lambda y^e(love'^{\,e\to(e\to t)}(y)(x)))])] : TV', \\
(give^{BTV})' & := & \lambda R^{T'}\lambda Q^{T'}\lambda P^{T'} \\
 & & [P(\lambda x^e[Q(\lambda y^e[R(\lambda z^e(give'^{\,e\to(e\to(e\to t))}(z)(y)(x)))])])] : BTV'.
\end{array}$$

Zur Übersetzung von Aussagen muß jetzt die Übersetzung des Verbs auf die

Übersetzung der Terme angewendet werden, weshalb auch (T 4) geändert wird:

$$\text{(S 4)}\ \frac{\alpha : T, \quad \delta : IV}{\alpha\ \delta^{3.sg}\ : t} \qquad \text{(T 4')}\ \frac{\alpha' : T', \qquad \delta' : IV'}{\delta'(\alpha') : t}$$

$$\text{(S 5)}\ \frac{\delta : TV, \quad \beta : T}{\delta\ \beta^{acc}\ : IV} \qquad \text{(T 5)}\ \frac{\delta' : (T' \to IV'), \quad \beta' : T'}{\delta'(\beta') : IV'}$$

In den Regeln (T 12a) und (T 12b) müssen die Typen an die geänderte Definition der Kategorie IV angepaßt werden:

$$\text{(S 12a)}\ \frac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ and } \gamma : IV} \qquad \text{(T 12a')}\ \frac{\delta' : T' \to t, \quad \gamma' : T' \to t}{\lambda P^{T'}(\delta'(P) \wedge \gamma'(P)) : T' \to t}$$

$$\text{(S 12b)}\ \frac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ or } \gamma : IV} \qquad \text{(T 12b')}\ \frac{\delta' : T' \to t, \quad \gamma' : T' \to t}{\lambda P^{T'}(\delta'(P) \vee \gamma'(P)) : T' \to t}$$

Beispiel 8.13 Die Übersetzung einer Aussage mit intransitivem Verb ist

$$\begin{aligned}
((John\ walks)^t)' &= ((John^T\ walk^{IV}s)^t)' \\
&=_{4'} (walk^{IV})'((John^T)') \\
&= \lambda P^{T'}[P(walk'^{\,e\to t})]((John^T)') \\
&=_\beta (John^T)'(walk'^{\,e\to t}) \\
&=_\beta walk'^{\,e\to t}(John'^{\,e}),
\end{aligned}$$

was sich von der früheren Übersetzung nur durch die zusätzliche Funktionsanwendung unterscheidet. Für transitive Verben wird die zusätzliche Regel (T 5) benutzt:

$$\begin{aligned}
&((John\ loves\ Mary)^t)' \\
&= ((John^T\ (loves\ Mary)^{IV})^t)' \\
&=_{4'} ((love^{TV}s\ Mary^T)^{IV})'((John^T)') \\
&=_5 (love^{TV})'((Mary^T)')((John^T)') \\
&=_\beta (John^T)'(\lambda x^e[(Mary^T)'(\lambda y^e(love'^{\,e\to(e\to t)}(y)(x)))]) \\
&=_\beta (John^T)'(\lambda x^e[\lambda y^e(love'^{\,e\to(e\to t)}(y)(x))(Mary'^{\,e})]) \\
&=_\beta (John^T)'(\lambda x^e[love'^{\,e\to(e\to t)}(Mary'^{\,e})(x)]) \\
&=_\beta \lambda x^e[love'^{\,e\to(e\to t)}(Mary'^{\,e})(x)](John'^{\,e}) \\
&=_\beta love'^{\,e\to(e\to t)}(Mary'^{\,e})(John'^{\,e})
\end{aligned}$$

Beispiele mit zusammengesetzten Termen werden im Folgenden noch behandelt.

Was ist der Wirkungsbereich von Quantoren?

Da in Aussagen der natürlichen Sprache die Quantoren stets Teilausdrücke der Terme sind, insbesondere also Teilausdrücke von Basisaussagen, ist der Wirkungsbereich eines Quantors nicht eindeutig bestimmt; daher ist die Aussage im allgemeinen mehrdeutig, wie schon das Beispiel 8.12 zur Auflösung von Pronomenbezügen gezeigt hat.

Auch eine Aussage, die mehrere quantifizierte Terme enthält, kann verschiedene Lesarten haben, je nachdem, welcher Quantor im Wirkungsbereich eines anderen liegt. Wir betrachten das an einer einfachen Aussage mit transitivem Verb, dessen Komplemente quantifizierte Terme sind, etwa *Every man loves a woman*:

Beispiel 8.14 Einmal kann man wie oben zuerst aus dem Objektterm und dem Verb einen Ausdruck der Kategorie IV bilden. Dann hat *a women* den engeren Wirkungsbereich:

$$
\begin{aligned}
&(((Every\ man)^T\ (loves\ a\ woman)^{IV})^t)' \\
&=_{4'}\quad (((love^{TV}s\ (a\ woman)^T)^{IV})'(((every\ man)^T)') \\
&=_5\quad (love^{TV})'(((a\ woman)^T)')(((every\ man)^T)') \\
&=_\beta\quad ((every\ man)^T)'(\lambda x^e[((a\ woman)^T)'(\lambda y^e(love'^{\,e\to(e\to t)}(y)(x)))]) \\
&=_\beta\quad ((every\ man)^T)'(\lambda x^e[\lambda P[\exists y^e(woman'(y)\wedge P(y))](\lambda y^e(love'^{\,e\to(e\to t)}(y)(x)))]) \\
&=_\beta\quad ((every\ man)^T)'(\lambda x^e[\exists y^e(woman'(y)\wedge(\lambda y^e(love'^{\,e\to(e\to t)}(y)(x)))(y))]) \\
&=_\beta\quad ((every\ man)^T)'(\lambda x^e[\exists y^e(woman'(y)\wedge(love'^{\,e\to(e\to t)}(y)(x)))]) \\
&=_\beta\quad \lambda P\forall x^e(man'(x)\to P(x))(\lambda x^e[\exists y^e(woman'(y)\wedge(love'^{\,e\to(e\to t)}(y)(x)))]) \\
&=_\beta\quad \forall x^e(man'(x)\to\exists y^e(woman'(y)\wedge(love'^{\,e\to(e\to t)}(y)(x))))
\end{aligned}
$$

Andererseits kann man mit (S 14) die Terme für Variable eines Satzes einsetzen. Wenn man dabei *every woman* zuletzt einsetzt, erhält der entsprechende Quantor den weitesten Wirkungsbereich:

$$
\begin{aligned}
&(((Every\ man)^T\ (loves^{TV}\ (a\ woman)^T)^{IV})^t)' \\
&=\quad ((he_n\ (loves^{TV}\ he_k)^{IV})[he_n/(Every\ man)^T][he_k/(a\ woman)^T])' \\
&=_{14}\quad ((a\ woman)^T)'(\lambda x_k((he_n\ (loves^{TV}\ he_k)^{IV})[he_n/(Every\ man)^T])') \\
&=_{14}\quad ((a\ woman)^T)'(\lambda x_k(((Every\ man)^T)'(\lambda x_n(((he_n^T\ (loves^{TV}\ he_k^T)^{IV})^t)')))) \\
&=_{\_}\quad ((a\ woman)^T)'(\lambda x_k(((Every\ man)^T)'(\lambda x_n(loves'^{\,e\to(e\to t)}(x_k)(x_n))))) \\
&=\quad ((a\ woman)^T)'(\lambda x_k(\forall x_n(man'(x_n)\to(loves'^{\,e\to(e\to t)}(x_k)(x_n))))) \\
&=\quad \exists x_k(woman'(x_k)\wedge(\forall x_n(man'(x_n)\to(loves'^{\,e\to(e\to t)}(x_k)(x_n))))).
\end{aligned}
$$

Dieses Herauslösen der Terme aus den Argumentstellen der Verben und das Binden der jeweiligen Stelle kann man kurz durch die Indizierung, die in der Linguistik üblich ist, wiedergeben:

$$((Every\ man)^T\ (loves^{TV}\ (a\ woman)^T)^{IV})$$

$$\mapsto \quad (a\ woman)_k\ (every\ man)_n\ (x_n\ loves\ x_k)$$

Man beachte, daß das Ergebnis der Übersetzung dasselbe ist, wenn man den Term an der Subjektstelle nicht extrahiert, d.h. bei

$$\begin{aligned} &((Every\ man)^T\ (loves^{TV}\ (a\ woman)^T)^{IV}) \\ &\quad \mapsto \quad (a\ woman)_k\ ((every\ man)\ loves\ x_k) \end{aligned}$$

Setzt man *every man* zuletzt in $(he_n^T\ (loves'^{TV}\ he_k^T))$ ein, so erhält man die oben angegebene Übersetzung, bei der *a woman* den engeren Wirkungsbereich hat.

Beachte, daß auch bei zusammengesetzten Aussagen durch die Anwendung von (S 14) jeder quantifizierte Term so behandelt werden kann, daß sein Wirkungsbereich maximal ist. Das ist aber nicht zulässig, da durch

$$\begin{aligned} &(If\ (every\ man\ talks),\ then\ (John\ talks)) \\ &\quad \mapsto \quad (every\ man)_n\ (if\ (he_n\ walks),\ then\ (John\ talks)) \end{aligned}$$

sicher keine zum Ausgangssatz gleichbedeutende Aussage entsteht. Man muß also die Verwendung von (S 14) geeignet einschränken.

Koordinierung von Nominal- und Verbalphrasen

Wie verhält sich die geänderte Übersetzung zur ursprünglichen, wenn man eine koordinierte Verbalphrase mit einer koordinierten Nominalphrase kombiniert?

Sei dazu $CV(\delta_1^{IV},\ldots,\delta_k^{IV})^{IV}$ eine mit den Regeln (S 12a) und (S 12b) aufgebaute *und/oder*-Koordinierung von Verbalphrasen und $CT(\alpha_1^T,\ldots,\alpha_n^T)^T$ eine mit (S 13) und einer zusätzlichen *und*-Regel (S 13b) aufgebaute *und/oder*-Kombination von Nominalphrasen; die nötige Pluralmorphologie werde ignoriert. Falls die α_i^T Eigennamen oder Pronomina und die δ_j^{IV} intransitive Verben sind, so ist bei der geänderten Übersetzung $(\alpha_i^T)' = \lambda R^{e\to t}[R(\alpha_i'^e)]$ und $(\delta_j^{IV})' = \lambda P^{T'}[P(\delta_j'^{e\to t})]$ für passende Konstanten $\alpha_i'^e, \delta_j'^{e\to t}$, und der entsprechende Satz hat die Übersetzung:

$$\begin{aligned} &((CT(\alpha_1^T,\ldots,\alpha_n^T)^T\ CV(\delta_1^{IV},\ldots,\delta_k^{IV})^{IV})^t)' \\ &\quad =_{4'} \quad (CV(\delta_1^{IV},\ldots,\delta_k^{IV})^{IV})'((CT(\alpha_1^T,\ldots,\alpha_n^T)^T)') \\ &\quad =_{12'} \quad \lambda P^{T'}[CV(\delta_1'(P)^t,\ldots,\delta_k'(P)^t)]((CT(\alpha_1^T,\ldots,\alpha_n^T)^T)') \\ &\quad =_{13} \quad \lambda P^{T'}[CV(\delta_1'(P)^t,\ldots,\delta_k'(P)^t)](\lambda Q^{e\to t}(CT((\alpha_1^T)'(Q)^t,\ldots,(\alpha_n^T)'(Q)^t))^t) \\ &\quad =_{\beta} \quad \lambda P^{T'}[CV(\delta_1'(P)^t,\ldots,\delta_k'(P)^t)](\lambda Q^{e\to t}(CT(Q(\alpha_1'^e),\ldots,Q(\alpha_n'^e)))) \\ &\quad =_{\beta} \quad \lambda P^{T'}[CV(P(\delta_1'^{e\to t}),\ldots,P(\delta_k'^{e\to t}))](\lambda Q^{e\to t}(CT(Q(\alpha_1'^e),\ldots,Q(\alpha_n'^e)))) \\ &\quad =_{\beta} \quad CV(CT(\delta_1'(\alpha_1'^e),\ldots,\delta_1'(\alpha_n'^e)),\ldots,CT(\delta_k'(\alpha_1'^e),\ldots,\delta_k'(\alpha_n'^e))). \end{aligned}$$

Wir erhalten also z.B.

$$\begin{aligned} &((John\ or\ Mary)^T\ (walks\ and\ talks)^{IV})' \\ &\quad = \quad (walk'(John') \lor walk'(Mary')) \land (talk'(John') \lor talk'(Mary')) \end{aligned}$$

Die Übersetzung ist aber keine korrekte Lesart des Eingangssatzes. Bei der ursprünglichen Version mit $IV := t/e$ wäre die Übersetzung dagegen

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{((CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T\ CV(\delta_1^{IV}, \ldots, \delta_k^{IV})^{IV})^t)'} \\
=_4 & (CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T)'((CV(\delta_1^{IV}, \ldots, \delta_k^{IV})^{IV})') \\
=_{12} & (CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T)'(\lambda x^e[CV(\delta_1'(x)^t, \ldots, \delta_k'(x)^t)]) \\
=_{13} & \lambda Q^{e\to t}[CT((\alpha_1^T)'(Q)^t, \ldots, (\alpha_n^T)'(Q)^t)^t](\lambda x^e[CV(\delta_1'(x)^t, \ldots, \delta_k'(x)^t)]) \\
= & \lambda Q^{e\to t}[CT(Q(\alpha_1'^e), \ldots, Q(\alpha_n'^e))](\lambda x^e[CV(\delta_1'(x)^t, \ldots, \delta_k'(x)^t)]) \\
=_\beta & CT(CV(\delta_1'(\alpha_1'^e), \ldots, \delta_k'(\alpha_1'^e)), \ldots, CV(\delta_1'(\alpha_n'^e), \ldots, \delta_k'(\alpha_n'^e))).
\end{array}$$

Für das Beispiel ergibt sich also die korrekte Lesart

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{((\textit{John or Mary})^T\ (\textit{walks and talks})^{IV})'} \\
= & (\textit{walk}'(\textit{John}') \wedge \textit{talk}'(\textit{John}')) \vee (\textit{walk}'(\textit{Mary}') \wedge \textit{talk}'(\textit{Mary}')).
\end{array}$$

Ob allerdings auch bei anderen Kombinationen, insbesondere bei solchen wie *neither John nor Mary*, in denen eine Negation steckt, stets die Übersetzungsregel (T 4) besser ist als (T 4'), ist nicht klar; außerdem werden koordinierte Terme in Objektposition bei Montague wieder anders behandelt.

Für den Fall von koordinierten Nominalphrasen im Plural braucht man m.E. sowieso Übersetzungsregeln, die sowohl die Struktur der Terme wie der koordinierten Verbalphrase berücksichtigen; (T 12) ist dafür zu grob.

Dieselbe Übersetzung, die man bei den Regeln von Montague direkt bekommt, erhalten wir bei der geänderten Übersetzung mit Hilfe von (S 14):

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{((CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T\ CV(\delta_1^{IV}, \ldots, \delta_k^{IV})^{IV})^t)'} \\
= & (((he_n^T\ CV(\delta_1^{IV}, \ldots, \delta_k^{IV})^{IV})[he_n/CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T])^t)' \\
=_{14} & (CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T)'(\lambda x_n((he_n^T\ CV(\delta_1^{IV}, \ldots, \delta_k^{IV})^{IV})^t)') \\
=_{4'} & (CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T)'(\lambda x_n((CV(\delta_1^{IV}, \ldots, \delta_k^{IV})^{IV})'((he_n^T)'))) \\
=_{12'} & (CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T)'(\lambda x_n(\lambda P^{T'}[CV(\delta_1'(P)^t, \ldots, \delta_k'(P)^t)]((he_n^T)'))) \\
=_\beta & (CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T)'(\lambda x_n(\lambda P^{T'}[CV(P(\delta_1'^{e\to t}), \ldots, P(\delta_k'^{e\to t}))]((he_n^T)'))) \\
=_\beta & (CT(\alpha_1^T, \ldots, \alpha_n^T)^T)'(\lambda x_n[CV(\delta_1'^{e\to t}(x_n), \ldots, \delta_k'^{e\to t}(x_n))]) \\
=_{13} & \lambda Q^{e\to t}[CT(Q(\alpha'^e_1), \ldots, Q(\alpha'^e_n))^t](\lambda x_n[CV(\delta_1'^{e\to t}(x_n), \ldots, \delta_k'^{e\to t}(x_n))]) \\
=_\beta & CT(CV(\delta_1'(\alpha'^e_1), \ldots, \delta_k'(\alpha'^e_1)), \ldots, CV(\delta_1'(\alpha'^e_n), \ldots, \delta_k'(\alpha'^e_n)))
\end{array}$$

Wie bei Sätzen mit mehreren quantifizierten Termen ist auch bei Sätzen mit mehreren koordinierten Termen nicht eindeutig, welcher Term im Wirkungsbereich des anderen liegt. Mit Hilfe von (S 14) kann man jedem gewünschten koordinierten Term den weitesten Wirkungsbereich geben. Auch hier ist aber die Verwendung von (S 14) einzuschränken, um falsche Übersetzungen, wie z.B. die durch

$$(\textit{May believes that John or Paul lies})'$$

$$\begin{aligned}
&\mapsto ((\textit{Mary believes that } (he_n \textit{ lies}))[he_n/(\textit{John or Paul})^T])' \\
&= ((\textit{John or Paul})^T)'(\lambda x_n^e(\textit{Mary believes that } (he_n \textit{ lies}))')
\end{aligned}$$

entstehende, auszuschließen.

Zumindest für das extensionale Fragment scheint es sinnvoller, mit $IV := t/T$ die Subjekt- und Objektterme gleich zu behandeln. Man muß sonst bei zusammengesetzten Ausdrücken systematisch nach der Anzahl der Termargumente unterscheiden, nicht nur bei den Verben.

Bemerkung 8.15 Es ist sicher nicht so, daß alle Verben ihr Subjekt extensional behandeln: mindestens bei Verben mit Subjekt*sätzen* muß man das Subjekt intensional auffassen, etwa bei *Daß dies komplizierter ist, erstaunt niemanden.* Aber auch im Passiv, wo das Subjekt des aktivischen Verbs fehlt, wird die formale Subjektstelle das im Aktiv intensional behandelte Objekt – es sollte also auch als Passiv-Subjekt intensional behandelt werden. Schließlich gibt es Fälle wie *Ein Einhorn existiert gar nicht*, bei denen die Subjektstelle auch im Aktiv nicht so wie bei Montague behandelt werden kann.

8.4 Übersetzung der intensionalen Teilsprache

G. Frege hat zwischen der *Bedeutung* und dem *Sinn* eines Ausdrucks unterschieden und festgestellt, daß für die Bedeutung von Aussagen, d.h. für ihren Wahrheitswert, in manchen Fällen nicht die Bedeutung, sondern der Sinn gewisser Teilausdrücke wesentlich ist. Der *Sinn* einer Aussage ist der in ihr ausgedrückte „Gedanke“. R. Carnap hat diesen Unterschied formal durch die Unterscheidung zwischen Extension und Intension präzisiert.

Unter der *Extension* eines Begriffs wird die Gesamtheit der Objekte verstanden, die „unter diesen Begriff fallen“. In der Mengenlehre wird *x fällt unter den Begriff y* durch $x \in y$ interpretiert; das „Extensionalitätsaxiom“ fordert dann, daß kein Unterschied zwischen einem Begriff und seinem Umfang besteht.

So kann man vorgehen, wenn die Objekte zeitlos und daher unveränderlich sind. Die Begriffe der natürlichen Sprache betreffen aber eine Wirklichkeit, die sich in vielen Einzelheiten ständig ändert. Die Objekte ändern „sich“ mit der Zeit und den äußeren Umständen wie Ort, Temperatur, Druck. Ebenso variieren die Begriffsumfänge stark mit der Zeit oder der Situation, in der die Begriffe verwendet werden. Unter „intensionalen“ Phänomenen der Sprache wird meist alles verstanden, was keine extensionale Behandlung erlaubt.

Definition 8.16 Ein *Kontext* ist ein Ausdruck $\gamma(x)$ mit einer genau einmal frei vorkommenden Variablen x. Der Kontext $\gamma(x)$ ist *bezüglich der Auswertung* $[\![\cdot]\!]^{\cdot}_{\cdot}$ *intensional*, wenn das Substitutionslemma für diesen Kontext $\gamma(x)$ nicht gilt, d.h. wenn

$$[\![\gamma(x/\alpha)]\!]_g^{\mathcal{D}} \neq [\![\gamma]\!]^{\mathcal{D}}_{g[x/[\![\alpha]\!]_g^{\mathcal{D}}]}$$

für mindestens einen Ausdruck α und eine Belegung g über einer Struktur $\mathcal{D}$.

Beispiel 8.17 Intensionale Kontexte sind der Wirkungsbereich von Modaloperatoren wie *notwendigerweise* oder der Komplementsatz von Verben wie *glauben, daß*:

Notwendigerweise ist $2+2=4$	*Notwendigerweise kocht Wasser bei 100° C*
Emil glaubt, daß 2+2 = 4 ist	*Emil glaubt, daß Maria ihn liebt*

Auch wenn jeweils beide Komplementsätze wahr sind, kann es sein, daß nur einer notwendigerweise wahr ist bzw. daß Emil nur einen von ihnen glaubt.

Wenn also $[\![\cdot]\!]^{\cdot}_{\cdot}$ für Aussagen φ ein Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{D}}_{g} \in D_t = \{0,1\}$ ist, sind *notwendigerweise* x und *Emil glaubt, daß* x für $[\![\cdot]\!]^{\cdot}_{\cdot}$ intensionale Kontexte. Insbesondere kann man zwei gleichwertige Aussagen φ und φ' in intensionalen Kontexten $\gamma(x)$ nicht ohne weiteres durch einander ersetzen: die Wahrheitswerte der Gesamtaussagen $\gamma(x/\varphi)$ und $\gamma(x/\varphi')$ könnten verschieden sein; das gilt sogar dann, wenn φ und ψ logisch äquivalent sind, also bei allen Interpretationen und Belegungen denselben Wert haben.

8.4.1 Intensionale Logik

Um intensionale Phänomene der natürlichen Sprache behandeln zu können, müssen wir zuerst die Auswertung der λ-Terme ändern, damit z.B. die Werte der Terme vom Typ t nicht einfach Wahrheitswerte, sondern *situationsabhängige* Wahrheitswerte, also kompliziertere Objekte, werden.

Dazu führen einen neuen Basistyp s für *Situationen* ein und ändern den Termaufbau wie folgt:

Definition 8.18 *Grundtypen* ι und *Typen* σ, τ der intensionalen Logik sind

$$\begin{array}{rcll}
\iota & := & e & \text{(Individuen)} \\
 & | & t & \text{(Wahrheitswerte)} \\
 & | & s & \text{(Situationen)} \\
\sigma, \tau & := & \iota & \text{(Grundtypen)} \\
 & | & (s \to \tau) & \text{(Intensionen vom Typ } \tau) \\
 & | & (\sigma \to \tau) & \text{(Funktionen)}
\end{array}$$

Terme $t : \tau$ *vom Typ* τ sind, wenn die Teilterme von den durch Indizes angegeben

Typen sind, die folgenden:

$$\begin{array}{rcll} t:\tau & := & x^\tau : \tau & \text{(Variable)} \\ & | & c^\tau : \tau & \text{(Konstante)} \\ & | & \lambda x^\sigma\, t^\tau : (\sigma \to \tau) & \text{(Funktionsterme)} \\ & | & t^{\sigma\to\tau}(s^\sigma) : \tau & \text{(Anwendungsterme)} \\ & | & {}^\wedge t^\tau : (s \to \tau) & \\ & | & {}^\vee t^{s\to\tau} : \tau & \\ & | & \neg\varphi^t : t & \text{(Formeln)} \\ & | & (\varphi^t \wedge \psi^t) : t & \\ & | & \forall x^\sigma \varphi^t : t & \\ & | & \Box\varphi^t : t & \end{array}$$

Weitere Formeln werden stillschweigend als Abkürzung entsprechender definierender Formeln eingeführt, z.B. $(\varphi \vee \psi) := \neg(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi) := (\neg\varphi \vee \psi)$, $\exists x^\sigma \varphi := \neg\forall x^\sigma \neg\varphi$, $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$.

Definition 8.19 Eine (volle) *Typstruktur der intensionalen Logik* ist eine (volle) Typstruktur $\mathcal{D} = (D_\tau, c^\mathcal{D})_{\tau\in Typ}$ aus Bereichen D_τ mit $D_{\sigma\to\tau} \subseteq D_\sigma \to D_\tau$ (bzw. $= D_\sigma \to D_\tau$), Intensionen(!) $c^\mathcal{D} \in D_{s\to\tau}$ für jede nicht-logische Konstante c vom Typ τ. Die logischen Konstanten $\neg$, $\wedge$, $\exists$ werden wie bisher interpretiert.

Jedes $i \in D_s$ heißt *Situation* oder *mögliche Welt*, oder schlicht ein *Index*. Eine *Proposition* ist ein Element von $D_{s\to t}$, d.h. ein *situationsabhängiger Wahrheitswert*. Ein *Individuenkonzept* ist ein Element von $D_{s\to e}$, d.h. ein *situationsabhängiges Individuum*.

Definition 8.20 Eine *Belegung* g über der Typstruktur $\mathcal{D}$ ordnet jeder Variablen $x : \tau$ ein Element $g(x^\tau) \in D_\tau$ zu. Der *Wert des Terms* $t : \tau$ *in der Situation* $i \in D_s$ wird rekursiv definiert durch:

$$\begin{array}{rcl} [\![c^\tau]\!]^\mathcal{D}_{g,i} & := & (c^\tau)^\mathcal{D}(i) \in D_\tau, \text{für nicht-logische Konstante}, \\ [\![x^\tau]\!]^\mathcal{D}_{g,i} & := & g(x) \in D_\tau, \\ [\![t^{\sigma\to\tau}(s^\sigma)]\!]^\mathcal{D}_{g,i} & := & [\![t^{\sigma\to\tau}]\!]^\mathcal{D}_{g,i}([\![s^\sigma]\!]^\mathcal{D}_{g,i}), \\ [\![\lambda x^\sigma t^\tau]\!]^\mathcal{D}_{g,i} & := & \text{das } f \in D_{\sigma\to\tau} \text{ mit } f(a) = [\![t^\tau]\!]^\mathcal{D}_{g[x/a],i} \text{ für alle } a \in D_\sigma, \\ [\![{}^\wedge t^\tau]\!]^\mathcal{D}_{g,i} & := & \text{das } f \in D_{s\to\tau} \text{ mit } f(j) = [\![t^\tau]\!]^\mathcal{D}_{g,j} \text{ für alle } j \in D_s, \\ [\![{}^\vee t^{s\to\tau}]\!]^\mathcal{D}_{g,i} & := & [\![t^{s\to\tau}]\!]^\mathcal{D}_{g,i}(i) \in D_\tau \\ [\![\Box\varphi^t]\!]^\mathcal{D}_{g,i} & := & \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^\mathcal{D}_{g,j} = 1 \text{ für alle } j \in D_s, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{array}$$

Die logischen Konstanten $\neg^{(t\to t)}$, $\wedge^{t\to(t\to t)}$ und $\exists^\tau : (\tau \to t) \to t$ werden wie bisher interpretiert, ebenso die Identität $\doteq^\tau : \tau \to \tau \to t$.

Die *Intension* $\{\!|\, t^\tau \,|\!\}^\mathcal{D}_{g,i}$ (bzw. die *Extension*) von $t : \tau$ bei der Belegung g in der Situation $i \in D_s$ ist $[\![{}^\wedge t]\!]^\mathcal{D}_{g,i} \in D_{s\to\tau}$ (bzw. der Wert $[\![t]\!]^\mathcal{D}_{g,i} \in D_\tau$).

Da die Intension $\{\!|\, t \,|\!\}^{\mathcal{D}}_{g,i}$ gar nicht von i abhängt, schreiben wir oft nur $\{\!|\, t \,|\!\}^{\mathcal{D}}_{g}$. In jeder Situtation erhält man die Bedeutung eines Ausdrucks aus seinem Sinn:

$$[\![t^\tau]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} = [\![{}^\vee({}^\wedge t)^{s\to\tau}]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} = \{\!|\, t \,|\!\}^{\mathcal{D}}_{g,i}(i).$$

Umgekehrt erhält man den Sinn des Ausdrucks aus dem Wertverlauf seiner Bedeutungen in allen Situationen:

$$\{\!|\, t^\tau \,|\!\}^{\mathcal{D}}_{g,i} = \lambda j \in D_s.\ [\![t^\tau]\!]^{\mathcal{D}}_{g,j},$$

wenn man einmal λ für die metasprachliche Abstraktion benutzt. Für $t : \tau$ kann man ${}^\wedge t$ als *der Sinn von t* lesen, da

$$[\![{}^\wedge t^\tau]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} \quad = \quad \{\!|\, t \,|\!\}^{\mathcal{D}}_{g} \in D_{s\to\tau}.$$

Für $t : s \to \tau$ kann man ${}^\vee t$ als *die Bedeutung von t in der gegenwärtigen Situation* lesen, da

$$[\![{}^\vee t^{s\to\tau}]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} \quad = \quad [\![t]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i}(i) \in D_\tau.$$

8.4.2 Aufbau und Übersetzung der intensionalen Teilsprache

Das intensionale Fragment der natürlichen Sprache, das die Grammatik von Montague erfaßt, erweitert das extensionale Fragment hauptsächlich um (i) Modaloperatoren, (ii) Verben mit Komplementsätzen, (iii) Verben mit intensional zu interpretierenden Objekten, (iv) Adverbien, (v) Tempusformen.[12]

Die Grundidee ist einfach: falls ein Teilausdruck β^B eines Ausdrucks in einem intensionalem Kontext $\alpha^A(x^B)$ steht, wird bei der Übersetzung von $\alpha^A(x^B/\beta^B)$ der Teilausdruck β^B nicht in $(\beta^B)'$ übersetzt, sondern in ${}^\wedge(\beta^B)'$. Dadurch wird sichergestellt, daß bei der Auswertung von $\alpha^A(x^B/\beta^B)$ in einer Situation i nicht die Bedeutung $[\![(\beta^B)']\!]_{g,i}$, sondern der Sinn $\{\!|\,(\beta^B)'\,|\!\}_g$ von β benutzt wird, der von der Situation i unabhängig ist.

In der natürlichen Sprache kommen intensionale Kontexte manchmal in einander geschachtelt vor, etwa in

Maria glaubt, daß Emil zwar glaubt, sie zu lieben,
es aber in Wirklichkeit nicht tut.
$\simeq$ *Maria glaubt, Emil liebe Maria nicht, und*
Maria glaubt, Emil glaube, Emil liebe Maria.

Um solche Fälle behandeln zu können, ist es nützlich, daß wir in der logischen Sprache den Übergang zur Intension durch ${}^\wedge t$ iterieren können.

[12]Manche Phänomene, die man im extensionalen Teil erwarten könnte, z.B. die (extensionalen) mehrstelligen Verben, freie Präpositionalphrasen, und das Tempus von Aussagen, behandelt Montague erst in der intensionalen Teilsprache, da dies mit denselben technischen Mitteln geht, die er zur Behandlung intensionaler Phänomene braucht.

Bemerkung 8.21 Die syntaktische Form der natürlichsprachlichen Ausdrücke macht keineswegs deutlich, welche Kontexte intensional und welche extensional zu lesen sind. Ein Problem, das auch die Montague-Grammatik nicht löst, besteht darin, daß dasselbe Vorkommen eines Teilausdruck sowohl in einer extensionalen wie intensionalen Position stehen kann, etwa das prädikativ gebrauchte *Narr* in *Wer glaubt, er sei kein Narr, irrt sich.* Hier behauptet der Sprecher ja, daß diejenigen, die glauben, keine Narren zu sein, das Prädikat *ein Narr sein* falsch interpretieren, insbesondere anders als der Sprecher. Man muß das Wort *Narr* also in zwei verschiedenen „Situationen“ auswerten, je nachdem, wem es in den Mund gelegt wird.

8.4.3 Übersetzung der syntaktischen Kategorien

Wir kehren zur Version von Montague zurück und behandeln die Subjektstelle anders als die Objektstellen von Verben, d.h. benutzen wieder die Kategorie $IV := t/e$.

Definition 8.22 Jeder syntaktischen Kategorie A wird durch

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
e' & := & e & (A/B)' & := & ((s \to B') \to A') \\
t' & := & t & (A/\!\!/B)' & := & ((s \to B') \to A'). \\
CN' & := & (e \to t) & IV' & := & (e \to t)
\end{array}$$

ein Typ A' von L_{Typ} zugeordnet.

Im Unterschied zum extensionalen Fragment werden hier aber die Argumentkategorien B von Kategorien der Form A/B und $A/\!\!/B$ in intensionale Argumenttypen $(s \to B')$ übersetzt, außer bei den Kategorien CN und IV.

Nach den Abkürzungen der Kategorien erhalten wir zum Beispiel:

$$\begin{array}{rclcl}
T' & = & (t/IV)' & = & (s \to IV') \to t \\
 & & & = & (s \to (e \to t)) \to t \\
TV' & = & (IV/T)' & = & (s \to T') \to IV' \\
 & & & = & (s \to ((s \to (e \to t)) \to t)) \to (e \to t) \\
DET' & = & (T/CN)' & = & (s \to CN') \to T' \\
 & & & = & (s \to (e \to t)) \to ((s \to (e \to t)) \to t)
\end{array}$$

8.4.4 Basisausdrücke und ihre Übersetzung

Definition 8.23 Die syntaktischen Kategorien enthalten folgende Basisausdrücke (neben denen aus Definition 8.4):

(a) *believe*, *claim* sind von der Kategorie IV/t (transitive Verben mit Komplementsatz),

(b) *try*, *want* sind von der Kategorie $IV/\!/IV$ (transitive Verben mit Infinitivkomplement)

(c) *possibly*, *necessarily* sind von der Kategorie t/t (Satzadverbien),

(d) *slowly*, *rapidly*, *voluntarily* sind von der Kategorie IAV (Adverbien)

Da die Argumente von Kategorien der Form A/B oder $A/\!/B$ in Terme vom Typ $s \to B'$ übersetzt werden, wird bei der Anwendung von Funktionen das Argument stets eine Intension sein. Deshalb muß die Übersetzung der Konstanten etwas modifiziert werden:

Definition 8.24 (Übersetzung der Basisausdrücke) Variable und nicht-logische Konstante einer Kategorie A werden in Variable bzw. Konstante des Typs A' übersetzt, z.B.:

$$\begin{array}{rcl}
(he_n^e)' & := & x_n : e \\
(John^e)' & := & John' : e, \\
(man^{CN})' & := & man'^{\,e\to t} : CN' \\
(walk^{IV})' & := & walk'^{\,e\to t} : IV' \\
(seek^{IV/T})' & := & seek' : (s \to T') \to IV' \\
(believe^{IV/t})' & := & believe' : (s \to t) \to IV'
\end{array}$$

Logische Konstante erhalten eine besondere Übersetzung, z.B.:

$$\begin{array}{rcl}
(a^{DET})' & := & \lambda P^{s\to(e\to t)}\lambda Q^{s\to(e\to t)}\exists x^e[{}^\vee P(x) \wedge {}^\vee Q(c)] : DET' \\
(every^{DET})' & := & \lambda P^{s\to CN'}\lambda Q^{s\to IV'}\forall x^e[{}^\vee P(x) \to {}^\vee Q(x)] : DET'.
\end{array}$$

8.4.5 Bildung und Übersetzung zusammengesetzer Ausdrücke

Definition 8.25 Die Bildung und Übersetzung *zusammengesetzter Ausdrücke* erfolgt mit den Regeln aus Tabelle 3. (Die Regeln (S 15) und (T 15) zur Behandlung des Tempus haben wir weggelassen.)

(S 1) $\dfrac{\alpha : e}{\alpha : T}$	(T 1) $\dfrac{\alpha' : e}{\lambda P^{s\to(e\to t)}[{}^\vee P(\alpha')] : T'}$
(S 2) $\dfrac{\delta : DET, \quad \xi : CN}{\delta\ \xi : T}$	(T 2) $\dfrac{\delta' : (s \to CN') \to T', \quad \xi' : CN'}{\delta'({}^\wedge\xi') : T'}$
(S 3_n) $\dfrac{\xi : CN, \quad \varphi : t}{\xi \textit{ such that } \varphi[he_n/he] : CN}$	(T 3_n) $\dfrac{\xi' : CN', \quad \varphi' : t}{\lambda x_n^e(\xi'(x_n) \wedge \varphi') : CN'}$
(S 4) $\dfrac{\alpha : T, \quad \delta : IV}{\alpha\ \delta^{3.sg} : t}$	(T 4) $\dfrac{\alpha' : (s \to IV') \to t, \qquad \delta' : IV'}{\alpha'({}^\wedge\delta') : t}$

(S 5) $\dfrac{\delta : TV, \quad \beta : T}{\delta\ \beta^{acc}\ : IV}$	(T 5) $\dfrac{\delta' : (s \to T') \to IV', \quad \beta' : T'}{\delta'({}^\wedge\beta') : IV'}$
(S 6) $\dfrac{\delta : IAV/T, \quad \alpha : T}{\delta\ \alpha^{acc} : IAV}$	(T 6) $\dfrac{\delta' : (s \to T') \to IAV', \quad \alpha' : T'}{\delta'({}^\wedge\alpha') : IAV'}$
(S 7) $\dfrac{\alpha : IV/t, \quad \varphi : t}{\alpha\ that\ \varphi : IV}$	(T 7) $\dfrac{\alpha' : (s \to t) \to IV', \quad \varphi' : t}{\alpha'({}^\wedge\varphi') : IV'}$
(S 8) $\dfrac{\delta : \mathrm{IV}/\!/\mathrm{IV}, \quad \beta : IV}{\delta\ to\ \beta : IV}$	(T 8) $\dfrac{\delta' : (s \to IV') \to IV', \quad \beta' : IV'}{\delta'({}^\wedge\beta') : IV'}$
(S 9) $\dfrac{\delta : t/t, \quad \varphi : t}{\delta\ \varphi : t}$	(T 9) $\dfrac{\delta' : (s \to t) \to t, \quad \varphi' : t}{\delta'({}^\wedge\varphi') : t}$
(S 10) $\dfrac{\delta : IV/IV, \quad \beta : IV}{\beta\ \delta : IV}$	(T 10) $\dfrac{\delta' : (s \to IV') \to IV', \quad \beta' : IV'}{\delta'({}^\wedge\beta') : IV'}$
(S 11a) $\dfrac{\varphi : t, \quad \psi : t}{\varphi \text{ and } \psi : t}$	(T 11a) $\dfrac{\varphi' : t, \quad \psi' : t}{(\varphi' \wedge \psi') : t}$
(S 11b) $\dfrac{\varphi : t, \quad \psi : t}{\varphi \text{ or } \psi : t}$	(T 11b) $\dfrac{\varphi' : t, \quad \psi' : t}{(\varphi' \vee \psi') : t}$
(S 12a) $\dfrac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ and } \gamma : IV}$	(T 12a) $\dfrac{\delta' : e \to t, \quad \gamma' : e \to t}{\lambda x^e(\delta'(x) \wedge \gamma'(x)) : e \to t}$
(S 12b) $\dfrac{\delta : IV, \quad \gamma : IV}{\delta \text{ or } \gamma : IV}$	(T 12b) $\dfrac{\delta' : e \to t, \quad \gamma' : e \to t}{\lambda x^e(\delta'(x) \vee \gamma'(x)) : e \to t}$
(S 13) $\dfrac{\alpha : T, \quad \beta : T}{\alpha \text{ or } \beta\ : T}$	(T 13) $\dfrac{\alpha' : T', \qquad \beta' : T'}{\lambda P^{s \to (e \to t)}(\alpha'(P) \vee \beta'(P)) : T'}$
(S 14_n) $\dfrac{\alpha : T, \qquad \varphi : t}{\varphi[he_n/\alpha] : t}$	(T 14_n) $\dfrac{\alpha' : T', \quad \varphi' : t}{\alpha'({}^\wedge\lambda x_n.\varphi') : t}$
(S 16_n) $\dfrac{\alpha : T, \quad \delta : IV}{\delta[he_n/\alpha] : IV}$	(T 16_n) $\dfrac{\alpha' : T', \quad \delta' : IV'}{\lambda y^e.\alpha'({}^\wedge\lambda x_n.\delta'(y)) : IV'}$

Tabelle 3: Syntax- und Übersetzungsregeln (intensionale Teilsprache)

Objekte β eines Verbs α werden *als Intensionen* ${}^\wedge(\beta')$ an die Funktion α' übergeben; analog bei anderen Konstruktionen. Bei der Anwendung des Subjekts $(\alpha^T)'$ auf eine Verbalphrase $(\beta^{IV})'$ oder ein $(\beta^{CN})'$ wird zuerst von ${}^\wedge(\beta')$ zur Extension ${}^{\vee\wedge}(\beta') = \beta'$ übergegangen. Auf diese Weise wird das Subjekt extensional, alle anderen Argumente intensional behandelt.

Beispiel 8.26 Da Eigennamen und Pronomen nach (S 1) komplexe Ausdrücken der Kategorie T sind, ergibt deren Übersetzung jetzt (im Unterschied zum extensionalen Fragment):

$$\begin{array}{rcl} ((John^e)^T)' & =_1 & \lambda P^{s\to(e\to t)}[{}^\vee P((John^e)')] \\ & = & \lambda P^{s\to(e\to t)}[{}^\vee P(John'^e)] : (s \to IV') \to t \\ (he_n^T)' & := & \lambda P^{s\to IV'}[{}^\vee P(x_n^e)] : T' \end{array}$$

Dadurch erhalten wir für einfache Sätze mit intransitiven Verben das gleiche Übersetzungsergebnis wie im extensionalen Fall:

$$\begin{array}{rcl} ((John^T\ talks^{IV})^t)' & =_4 & (John^T)'({}^\wedge(talks^{IV})') \\ & = & \lambda P^{s\to IV'}[{}^\vee P(John'^e)]({}^\wedge(talk'^{IV'})) \\ & =_\beta & {}^\vee({}^\wedge(talk'^{IV'}))(John'^e) \\ & =_{\vee\wedge} & (talk'^{e\to t})(John'^e). \end{array}$$

Transitive Verben mit Satzkomplement

Verben wie *believe* drücken offenbar keine Relationen zwischen Individuen und Wahrheitswerten aus: da dasselbe Individuum von zwei Aussagen mit gleichem Wahrheitswert die eine glauben kann, ohne die andere zu glauben, ist

$$\gamma(\varphi) = \textit{John believes that } \varphi$$

ein intensionaler Kontext. Bei der Auswertung von $\gamma(\varphi)$ sollte also nicht die Bedeutung $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{D}}_{g,i} \in \{0,1\}$, sondern –wie Frege sagte– *der durch φ ausgedrückte Gedanke* eine Rolle spielen, d.h. die Intension oder Proposition $\{\!|\,\varphi\,|\!\}^{\mathcal{D}}_g \in D_{s\to t}$.[13]

Das Verb *believe* sollte durch eine situationsabhängige Relation zwischen Individuen und Propositionen interpretiert werden, also durch ein Element von $D_{s\to((e\times(s\to t))\to t)}$. Da keine Tupel verwendet werden und der Komplementsatz enger ans Verb gebunden wird als das Subjekt, wird stattdessen ein Element

$$believe^{\mathcal{D}} \in D_{s\to((s\to t)\to(e\to t))}$$

verwendet, nämlich die Interpretation der Konstanten

$$(believe^{(IV/t)})' = believe'^{(s\to t)\to(e\to t)}.$$

Beispiel 8.27 Komplementsätze von Verben, die eine „Einstellung zu Propositionen" ausdrücken, stehen in einem intensionalen Kontext; bei der Übersetzung

[13] Diese „Propositionen" fassen logisch äquivalente Aussagen zusammen; ob dadurch noch hinreichend feine Unterschiede zwischen „Gedanken" wiedergegeben werden, ist fraglich!

ist also ein Übergang zur Intension des Komplementsatzes nötig:

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{((\textit{John}^T\ (\textit{believes that Mary talks})^{IV})^t)'} \\
=_4 & (\textit{John}^T)'(^\wedge((\textit{believes that Mary talks})^{IV})') \\
= & \lambda P^{s\to IV'}[^\vee P(\textit{John}'^{\,e})](^\wedge((\textit{believes that Mary talks})^{IV})') \\
=_\beta & (^{\vee\wedge}((\textit{believes that Mary talks})^{IV})')(\textit{John}'^{\,e}) \\
=_{\vee\wedge} & ((\textit{believes}^{IV/t}\ \textit{that}\ (\textit{Mary talks})^t)^{IV})'(\textit{John}'^{\,e}) \\
=_7 & (\textit{believes}^{IV/t})'(^\wedge((\textit{Mary talks})^t)')(\textit{John}'^{\,e}) \\
=_{4,\beta} & (\textit{believes}^{IV/t})'(^\wedge(\textit{talk}'(\textit{Mary}')))(\textit{John}'^{\,e}) \\
= & \textit{believes}'^{\,(s\to t)\to IV'}(^\wedge(\textit{talk}'(\textit{Mary}')))(\textit{John}'^{\,e})
\end{array}$$

Man sieht, daß hier –anders als beim Subjekt– kein Übergang von der Intension zur Extension des Objektsatzes vorgenommen wird.

Auf entsprechende Weise werden komplexere Komplementsätze behandelt. Enthält der Komplementsatz eingebettete quantifizierte Terme, so entsteht eine Mehrdeutigkeit:

(a) *de-dicto*-Lesart: die Quantoren sind als Teil des eingebetteten Satzes zu verstehen, wie in

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{((\textit{John}^T\ (\textit{believes that a woman talks})^{IV})^t)'} \\
= & \textit{believes}'^{\,(s\to t)\to IV'}(^\wedge\exists x^e(\textit{woman}'^{\,e}(x) \wedge \textit{talk}'(x)))(\textit{John}'^{\,e})
\end{array}$$

In diesem Fall versteht man die Aussage so, daß *John* nur glaube, *irgend eine* Frau spreche, z.B. der Stimme nach zu urteilen, ohne daß er eine bestimmte Frau meint; vielleicht gibt es in der Situation gar keine Frau.

(b) *de-re*-Lesart: die Quantoren sind als Teil des übergeordneten Satzes zu verstehen, wie in

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{((\textit{John}^T\ (\textit{believes that a woman talks})^{IV})^t)'} \\
= & \exists x^e[\textit{woman}'^{\,e\to t}(x) \wedge \textit{believes}'^{\,(s\to t)\to IV'}(^\wedge(\textit{talk}'(x)))(\textit{John}'^{\,e})]
\end{array}$$

In diesem Fall gibt es eine Frau, *von der* dieser *John* glaubt, sie spreche.

Um die *de-re*-Lesart zu erhalten, muß man mit (S 14) den quantifizierten Term aus dem eingebetteten Satz extrahieren, so daß bei der Übersetzung ein Quantor mit weitem Wirkungsbereich entsteht.

Transitive Verben mit Infinitivkomplement

Verben mit Infinitivkomplement lassen sich ähnlich wie solche mit Satzkomplement behandeln: der eingebettete Infinitiv ist im wesentlichen ein Satz, dessen (implizites) Subjekt das Subjekt des übergeordneten Verbs ist.

Beispiel 8.28

$$
\begin{aligned}
&((\textit{Mary}^T\ (\textit{wants to marry a millionaire})^{IV})^t)' \\
&\quad =_4 \quad (\textit{Mary}^T)'(^\wedge((\textit{wants to marry a millionaire})^{IV})') \\
&\quad =_\beta \quad {}^\vee(^\wedge((\textit{wants to marry a millionaire})^{IV})')(\textit{Mary}^e) \\
&\quad =_{\vee\wedge} \quad ((\textit{wants}^{IV/\!/IV}\ \textit{to}\ (\textit{marry a millionaire})^{IV})^{IV})'(\textit{Mary}^e) \\
&\quad =_8 \quad (\textit{wants}^{IV/\!/IV})'(^\wedge((\textit{marry a millionaire})^{IV})')(\textit{Mary}^e) \\
&\quad = \quad \textit{wants}'^{(s\to IV')\to IV'}(^\wedge((\textit{marry}^{TV}\ (\textit{a millionaire})^T)^{IV})')(\textit{Mary}^e) \\
&\quad =_5 \quad \textit{wants}'^{(s\to IV')\to IV'}(^\wedge((\textit{marry}^{TV})'(^\wedge((\textit{a millionaire})^T)')))(\textit{Mary}^e) \\
&\quad =_5 \quad \textit{wants}'^{(s\to IV')\to IV'}(^\wedge(\textit{marry}'^{(s\to T')\to IV'}(^\wedge((\textit{a millionaire})^T)')))(\textit{Mary}^e)
\end{aligned}
$$

Hier ist $(\textit{to marry } x^T)^{IV}$ ein intensionaler Kontext für x^T, der selbst im intensionalen Kontext $(\textit{want } y^{IV})^{IV}$ steht.

Der quantifizierte Objektterm *a millionaire* erlaubt –wie die quantifizierten Terme in Objektsätzen– eine *de-dicto* und eine *de-re*-Lesart des Infinitivs: je nachdem, ob es um einen beliebigen oder um einen bestimmten Millionär geht.

Um nun sicherzustellen, daß das implizite Subjekt von *marry* gerade das Subjekt des Matrixverbs *want* ist, braucht man Einschränkungen an die Interpretationen der Konstanten, sogenannte *Bedeutungspostulate*. Es werden nur solche Typstrukturen $\mathcal{D}$ betrachtet, in denen diese Bedeutungspostulate (bei jeder Belegung und für jede Situation) gelten.

Im vorliegenden Fall müssen wir fordern, daß jedes Individuum, das eine Handlung ausführen will, sie in einer zukünftigen Situation selbst ausführt:

$$\text{(MP 10)} \qquad \forall x^e \forall P^{s\to IV'} \Box[\textit{want}'^{(s\to IV')\to IV'}(P)(x) \to F(^\vee P(x))],$$

wobei F für den Temporaloperator *irgendwann in der Zukunft* steht, der natürlich in den Typstrukturen geeignet zu interpretieren wäre. (Dazu sollte man die Situationen strukturieren, also D_s aus anderen Bereichen wie einer Zeitordnung aufbauen.)

Ein anderes Bedeutungspostulat besagt, daß die Interpretation der *Individuen*konstanten $c : e$ eine konstante Funktion ist, d.h. $c^{\mathcal{D}}(i) \in D_e$ soll für alle $i \in D_s$ dasselbe Element sein:

$$\text{(MP 2)} \qquad \exists x^e \Box(x = c), \qquad \text{für jede Konstante } c : e.$$

Diese Konstanten c^e sind die in den Übersetzungen der Eigennamen wie $\textit{John}'^e$.

Mit einem Eigennamen muß man sich demnach in allen Situationen auf dasselbe Individuum beziehen. Die Individuen verlieren beim Übergang zu einer anderen Situation nicht ihre Identität, sondern „nur“ ihre Eigenschaften, Beziehungen zu anderen Individuen, Einstellungen zu Propositionen usw.

Transitive Verben mit intensionalem Nominalobjekt

Während die Objektsätze stets in einem intensionalen Kontext stehen, ist das bei den Objekt-Nominalphrasen seltener der Fall. Ein transitives Verb mit intensionalem Nominalobjekt ist nach Montague das Verb $seek^{TV}$:

Beispiel 8.29

$$\begin{array}{rl} ((John\ seeks\ a\ unicorn)^t)'. & \\ =_4 & (John^T)'(^\wedge((seek^{TV}\ (a\ unicorn)^T)^{IV})') \\ =_\beta & ^\vee(^\wedge((seek^{TV}\ (a\ unicorn)^T)^{IV})')(John'^e) \\ =_{\vee\wedge} & ((seek^{TV}\ (a\ unicorn)^T)^{IV})'(John'^e) \\ =_5 & seek'^{(s\to T')\to IV'}(^\wedge((a\ unicorn)^T)')(John'^e). \end{array}$$

Die dargestellte Analyse entspricht der *de-dicto*-Lesart der Verbalphrase, nach der nach einem *beliebigen* Einhorn suchen, auch wenn es vielleicht gar keine Einhörner gibt. Eine *de-re*-Lesart bekommt man wieder, indem man zuerst das Objekt mit (S 14) extrahiert.

Transitive Verben mit extensionalem Nominalobjekt

Montague führt transitive Verben mit *extensionaler* Objekt-Nominalphrase auf den Fall mit intensionalem Objekt zurück. Dazu fordert er für die betreffenden Konstanten $c^{TV'}$ der logischen Sprache, etwa $find'^{TV'} = (find^{TV})'$, besondere Bedeutungspostulate, nach denen es zur (situationsabhängigen) Relation $(c^{TV'})^{\mathcal{D}} \in D_{s\to((t/e)/T)'}$ eine geeignete (situationsabhängige) extensionale Relation $C \in D_{s\to(e\to(e\to t))}$ gibt, so daß das Verb $c^{TV'}$ genau dann auf sein (extensionales) Subjekt x^e und das intensionale Objekt P zutrifft, wenn die Intension der durch C und x^e bestimmten extensionalen Eigenschaft $\lambda y^e[^\vee C(y)(x^e)]$ von Individuen die von der jeweiligen Extension $^\vee P : T' = (t/IV)' = (s \to (e \to t)) \to t$ des Objekts getestete Eigenschaft hat:

$$\text{(MP 1)} \qquad \exists C^{s\to(e\to(e\to t))}\forall x^e \forall P^{s\to T'} \Box\, (c^{TV'}(P)(x) \leftrightarrow {}^\vee P(^\wedge\lambda y^e[^\vee C(y)(x)])).$$

Für $^\vee C$ wird auch c_* geschrieben.

Satzadverbien

Die Satzadverbien $necessarily^{t/t}$ und $possibly^{t/t}$ werden als logische Konstanten betrachtet und erhalten eine besondere Übersetzung:

$$\begin{array}{rcl} (necessarily^{t/t})' & := & \lambda p^{s\to t}(\Box^\vee p) : (s\to t)\to t \\ (possibly^{t/t})' & := & \lambda p^{s\to t}(\Diamond^\vee p) : (s\to t)\to t \end{array}$$

Dadurch wird die Notwendigkeit durch die Wahrheit der eingebetteten Aussage in allen Situationen interpretiert, die Möglichkeit durch ihre Wahrheit in mindestens einer Situation:

$$\begin{aligned}
&((Possibly\ Mary\ talks)^t)' \\
&\quad =_9 \quad (possibly^{t/t})'(^\wedge((Mary\ talks)^t)') \\
&\quad =_4 \quad \lambda p^{s\to t}[\Diamond{}^\vee p](^\wedge(talks^{e\to t}(Mary^e))) \\
&\quad =_\beta \quad \Diamond{}^\vee(^\wedge(talks^{e\to t}(Mary^e))) \\
&\quad =_{\vee\wedge} \quad \Diamond(talks^{e\to t}(Mary^e)).
\end{aligned}$$

Temporaladverbien wie *jetzt*, *niemals*, *irgendwann* oder Adverbien wie *oft*, *selten*, *immer wieder* oder *wahrscheinlich* ließen sich bei geigneter Struktur der Situtationen D_s ebenfalls in bestimmte λ-Terme übersetzen.

Andere Satzadverbien wie *vermutlich* oder *dummerweise* werden in Konstante übersetzt, deren Interpretation in der Typstruktur $\mathcal{D}$ festgelegt wird.

Adverbien

Verbmodifizierende Adverbien werden als Ausdrücke der Kategorie $IAV : IV/IV$ klassifiziert. Ausdrücke, die solche Adverbien enthalten, werden mit (S 10) gebildet und mit (T 10) übersetzt.

Beispiel 8.30

$$\begin{aligned}
&((John\ walks\ slowly)^t)' \\
&\quad =_4 \quad (John^T)'(^\wedge((walks\ slowly)^{IV})') \\
&\quad =_\beta \quad {}^\vee(^\wedge((walks^{IV}\ slowly^{IAV})^{IV})')(John'^e) \\
&\quad =_{\vee\wedge} \quad ((walks^{IV}\ slowly^{IAV})^{IV})'(John'^e) \\
&\quad =_{10} \quad (slowly^{IAV})'(^\wedge((walks^{IV})'))(John'^e) \\
&\quad = \quad slowly'^{(s\to IV')\to IV'}(^\wedge(walks'^{e\to t}))(John'^e)
\end{aligned}$$

Adverbien wie *slowly* oder *fast* fügen der Bedeutung eines Handlungsverb eine Aussage über die Ausführungsgeschwindigkeit der Handlung hinzu. Adverbien wie *gern* fügen der Bedeutung des Handlungsverb etwas über die Einstellung des Handelnden zur Ausführung hinzu. In solchen Fällen wird die Bedeutung des Verbs eingeschränkt, so daß ein Schluß wie

$$\frac{John\ walks\ slowly}{John\ walks} \tag{28}$$

gültig ist. Damit die Korrektheit solcher Schlüsse durch die Gültigkeit in den Typstrukturen $\mathcal{D}$ modelliert werden kann, müssen Zusammenhänge zwischen unmodifizierten und modifizierten Verben durch Bedeutungspostulate an die jeweiligen nicht-logischen Konstanten garantiert werden. Für Konstante für bedeutungseinschränkende Adverbien braucht man ein Postulat der Form

$$\text{(MP 10)} \qquad \forall x^e \forall P^{s\to(e\to t)} \Box\, (c^{IAV'}(P)(x) \to {}^{\vee}P(x)) \quad \text{für Konstante } c : IAV'.$$

Hiermit erhält man im obigen Beispiel eine Abschwächung zu

$$\begin{array}{rl} & \mathit{slowly'}^{(s\to IV')\to IV'}({}^{\wedge}(\mathit{walks'}^{e\to t}))(\mathit{John'}^{e}) \\ \to_{\text{MP 10}} & {}^{\vee}({}^{\wedge}(\mathit{walks'}^{e\to t}))(\mathit{John'}^{e}) \\ =_{\vee\wedge} & (\mathit{walks'}^{e\to t})(\mathit{John'}^{e}) \end{array}$$

Durch die Beschränkung auf solche Typstrukturen, die die Bedeutungspostulate erfüllen, würde also der Schluß (28) korrekt.

Literatur

[1] Kazimir Ajdukiewick. Die syntaktische Konnexität. *Stud. Philos.*, 1:1–27, 1935.

[2] George H. Boole. *An Investigation of the Laws of Thought*. London, 1854.

[3] Chris Brink, Katharina Britz, and Renate A. Schmidt. Peirce algebra. Technical Report MPI-I-92-229, Universität Saarbrücken, 1992.

[4] L. Chin and Alfred Tarski. Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras. University of California Publications 1, No. 9, 1951.

[5] David R. Dowty, Robert E. Wall, and Stanley Peters. *Introduction to Montague Semantics*. D. Reidel, Dordrecht, 1981.

[6] J. Roger Hindly and Jonathan P. Seldin. *Introduction to Combinators and λ-Calculus*. Cambridge University Press, 1986.

[7] Richard Montague. The proper treatment of quantification in ordinary english. In Richmond Thomason, editor, *Formal Philosophy. Selected Papers of Richard Montague*. Yale Univ. Press, 1974.

[8] Charles Sanders Peirce. Die Logik der Relative (The Monist, VII, 1897). In C.J.W.Kloesel and H.Pape, editors, *Semiotische Schriften, Band 1*, stw 1480. Suhrkamp, 2000.

[9] Uwe Schöning. *Logik für Informatiker*. Bibliographisches Institut, 1989.

[10] Ernst Schröder. *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, volume III. ??, New York 1966, 2nd edition, 1895.

[11] Klaus U. Schulz. Mathematische Grundlagen der Informatik und Linguistik. Vorlesungsskriptum, 2001. Universität München, CIS.

[12] Alfred Tarski. On the calculus of relations. *The Journal of Symbolic Logic*, 6(3):73–89, 1941.