3.4 Die Lindenbaumalgebra einer Theorie

Es kommt oft vor, daß wir uns durch Beobachtung davon überzeugt haben, daß eine gewisse Menge R von Aussagen wahr ist, eine andere Menge U von Aussagen aber nicht, ohne daß wir verstehen, *warum* die Aussagen $\varphi \in R$ wahr, aber die Aussagen $\psi \in U$ falsch sind.

Um uns diesen Unterschied zu erklären, stellen wir eine Theorie T auf, d.h. wir machen gewisse Annahmen (die vielleicht gar nicht direkt durch Beobachtung geprüft werden können). Diese Theorie T *erklärt* den Unterschied zwischen R und U, wenn

$$T \models \varphi \text{ für alle } \varphi \in R \qquad \text{und} \qquad T \not\models \psi \text{ für alle } \psi \in U.$$

Es kann natürlich viele verschieden Theorien T geben, die den Unterschied zwischen R und U in diesem Sinn erklären, und zwischen wählen wir dann nach anderen Kriterien aus. Z.B. ist $T := R \cup \{\, \neg\psi \mid \psi \in U \,\}$ nicht gerade erhellend.

Die wichtigste Frage, die man nach der Aufstellung einer Theorie lösen muß, ist: gibt es eine Interpretation dieser Theorie, oder hat sie keine Interpretation, d.h. ist sie „ohne Bedeutung“, weil sie in sich widersprüchlich ist? Wenn es keine Interpretation von T gibt, folgt ja *jede* Aussage aus T, insbesondere $T \models R \cup U$.

Betrachten wir das Problem, ob T überhaupt eine Interpretation hat, für den einfachsten Fall, wo T eine Menge von Sätzen der Aussagenlogik ist.

Beispiel 3.23 Sei $T = \{\, A_i \leftrightarrow A_{i+3} \mid i \in I\!N \,\}$. Eine Interpretation ist eine Belegung der Aussagenvariablen, bei der alle Aussagen von T wahr sind. Da T unendlich ist und unendlich viele Variablen hat, können wir nicht einfach eine Tabelle aller möglichen Belegungen aufstellen. Trotzdem ist klar, daß es nicht viele verschiedene Interpretationen h von T geben kann, denn es muß gelten:

$$\begin{array}{ll} h(A_1) = h(A_4) = h(A_7) = \cdots & \in \{0,1\} \\ h(A_2) = h(A_5) = h(A_8) = \cdots & \in \{0,1\} \\ h(A_3) = h(A_6) = h(A_9) = \cdots & \in \{0,1\} \end{array}$$

Die Theorie erzwingt, daß viele der Aussagenvariablen als „im Wesentlichen dieselbe Aussage“ behandelt werden. In diesem Sinne haben wir nur 3 verschieden Grundaussagen A_1, A_2, A_3 (und natürlich aussagenlogische Kombinationen davon) und erhalten so doch einen Überblick über alle möglichen Interpretationen: es gibt höchstens 2^3 verschiedene Interpretationen h von T.

Definition 3.24 Sei *Fml* die Menge der aussagenlogischen Formeln und $T \subseteq$ *Fml* eine aussagenlogische Theorie. Definiere für aussagenlogische Formeln φ und ψ die Relation

$$\begin{array}{rcl} \varphi \equiv_T \psi & :\Longleftrightarrow & T \models (\varphi \leftrightarrow \psi), \\ [\varphi]_T & := & \{\, \psi \mid \varphi \equiv_T \psi \,\}. \end{array}$$

Definition 3.25 Die Lindenbaum-Algebra von T ist die Algebra

$$\mathcal{L}_T = (Fml/\equiv_T, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$$

mit den Operationen

$$\begin{array}{rcl} 0 & := & [A_1 \wedge \neg A_1]_T, \\ 1 & := & [A_1 \vee \neg A_1]_T, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} [\varphi]_T + [\psi]_T & := & [\varphi \vee \psi]_T, \\ [\varphi]_T \cdot [\psi]_T & := & [\varphi \wedge \psi]_T, \\ \overline{[\varphi]_T} & := & [\neg\varphi]_T. \end{array}$$

Die Operationen der Lindenbaum-Algebra sind wohldefiniert: sind etwa $[\varphi]_T = [\varphi']_T$ und $[\psi]_T = [\psi']_T$, so ist

$$T \models (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'),$$

wie man sich leicht überlegt, und daher auch $[\varphi \vee \psi]_T = [\varphi' \vee \psi']_T$; also ist $+$ wohldefiniert. Ebenso für die anderen Operationen.

Proposition 3.26 Die Lindenbaumalgebra einer Theorie T ist eine Boole'sche Algebra.

Beweis: Man zeigt, daß die Axiome erfüllt sind. Beispielsweise sind $+$ und $\cdot$ idempotent, da

$$T \models (\varphi \wedge \varphi) \leftrightarrow \varphi, \qquad \text{und} \qquad T \models (\varphi \vee \varphi) \leftrightarrow \varphi$$

gelten. Beachte, daß $[\varphi]_T = 1$ für jedes $\varphi \in T$ gilt, denn für solche φ ist ja $T \models \varphi$, also auch $T \models \varphi \leftrightarrow (A_1 \vee \neg A_1)$. Für alle von T widerlegbaren Aussagen φ, d.h. für alle φ mit $T \models \neg\varphi$, ist andererseits $[\varphi]_T = 0$. □

Natürlich gilt im allgemeinen nicht für jedes φ eine der beiden Behauptungen $T \models \varphi$ oder $T \models \neg\varphi$. Daher hat $\mathcal{L}_T$ im allgemeinen mehr als 2 Elemente. Wir haben früher gesehen, wie man eine Boole'schen Algebra homomorph auf die Algebra $\mathbb{B}$ abbilden kann. Die Homomorphismen von $h : \mathcal{L}_T \to \mathbb{B}$ sind gerade die Belegungen der Aussagenvariablen, die T erfüllen.

Im obigen Beispiel hat $\mathcal{L}_T$ neben $[A_1]_T$, $[A_2]_T$ und $[A_3]_T$ noch Elemente wie $[A_1 \wedge A_2 \wedge A_3]$, $[A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3]$ usw., und man erhält $\mathcal{L}_T = 2^8$.