Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik II

Universität München, CIS, SS 2003

H.Leiß

Abgabetermin: Do, 24.4.2000

Ein *Rahmen* $\mathcal{R} = (W, \prec)$ ist eine nicht-leere Menge W von „möglichen Welten“ mit einer 2-stelligen Relation $\prec \subseteq W \times W$. Statt $r \prec s$ sagt man, „s ist von r aus *erreichbar*“. Eine *Belegung* über $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung $h : W \times \mathit{Var} \to \{0, 1\}$, die jeder Aussagenvariablen A relativ zu einer Situation $w \in W$ einen Wahrheitswert zuordnet.

Aufgabe 1 *Sei W die Menge der partiellen Belegungen $r : \mathit{Var} \to \{0, 1\}$ und $r \prec s :\Longleftrightarrow r \subseteq s$, d.h. s ist von r aus erreichbar, wenn s überall, wo r definiert ist, ebenfalls definiert ist und denselben Wert hat wie r. Betrachte $h : w \times \mathit{Var} \to \{0, 1\}$ mit*

$$h(r, A) := \begin{cases} 0, & \textit{falls } r(A) \textit{ undefiniert ist,} \\ 1 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Sei $r(A) = r(C) = 1$, $r(B) = 0$ und $r(X)$ undefiniert für alle anderen Aussagevariablen $D, E, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind in der Welt r bei der Belegung h wahr?

(a) $\Diamond\neg A$, $\Box(B \vee \neg B)$, $\Diamond\Box(A \leftrightarrow D)$, $\Box\Diamond(A \wedge \neg B)$, $\Diamond(A \wedge D) \to \Diamond\Box(C \wedge D)$ *(5 Punkte)*

(b) $\Box(D \to \Box D)$, $\Box D \to \Box\Box D$, $\Box\Box D \to \Box D$, $\Box(D \to E) \to (\Box D \to \Box E)$ *(4 Punkte)*

Eine modale Aussage φ *gilt* im Rahmen $(W, \prec)$, wenn $[\![\varphi]\!]^h_w = 1$ für alle $w \in W$ und alle $h : W \times \mathit{Var} \to \{0, 1\}$.

Aufgabe 2 *Ein Rahmen $\mathcal{R} = (W, \prec)$ heißt transitiv, wenn $\prec$ eine transitive Relation ist.*

(a) Zeige, daß $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ in jedem transitiven Rahmen gilt. *(3 Punkte)*

(b) Kann $\Box(\neg A \wedge \Diamond A) \wedge \Diamond\top$ in einer Welt in einem transitiven Rahmen gelten? *(3 Punkte)*

Aufgabe 3 *Betrachte die Programmiersprache mit den Programmen*

$$\begin{array}{rcll} \alpha, \beta & ::= & a \mid b \mid c \mid \cdots & \textit{(atomare Befehle)} \\ & \mid & (\alpha + \beta) & \textit{(führe } \alpha \textit{ aus oder führe } \beta \textit{ aus)} \\ & \mid & (\alpha\,;\beta) & \textit{(führe zuerst } \alpha\textit{, dann } \beta \textit{ aus)} \end{array}$$

Jeder Grundbefehl soll einer Programmvariablen $x, y, z, \ldots \in \mathit{ProgVar}$ *einen* Wert $n \in \mathbb{Z}$ *zuweisen, der nur von den Werten endlich vieler Programmvariablen abhängt. (Wir verstehen die Programmvariablen auch als Speicheradressen.) Ein* Speicherzustand $m : \mathit{ProgVar} \to \mathbb{Z}$ *ist eine partielle(!) Belegung, die manchen Programmvariablen einen Wert zuordnet. (Wir schreiben* $m(x)\downarrow$ *für „x liegt im Definitionsbereich von m“ oder „$m(x)$ existiert“.)*

Sei $M := \{ m \mid m : \mathit{ProgVar} \to \mathbb{Z} \}$ *die Menge aller möglichen Speicherzustände. Die* Bedeutung *eines Programms α ist eine* Speicherveränderung $\xrightarrow{\alpha} \subseteq M \times M$, *die vom Aufbau des Programms abhängt, so daß insbesondere gilt:*

$$
\begin{aligned}
m \xrightarrow{\alpha+\beta} m' \quad &:\iff \quad (m \xrightarrow{\alpha} m') \vee (m \xrightarrow{\beta} m'),\\
m \xrightarrow{\alpha;\beta} m' \quad &:\iff \quad \exists \tilde{m} \in M[(m \xrightarrow{\alpha} \tilde{m}) \wedge (\tilde{m} \xrightarrow{\beta} m')].
\end{aligned}
$$

Wir wollen die drei Grundbefehle a, b, c wie $a := (y := 4)$, $b := (x := \sqrt{y})$, und $c := (y := y + 1)$ verstehen, d.h. es seien

$$
\begin{aligned}
m \xrightarrow{a} m' \quad &:\iff \quad m' = (m \setminus \{\langle y, m(y)\rangle\}) \cup \{\langle y, 0\rangle\}\\
m \xrightarrow{b} m' \quad &:\iff \quad m(y) \downarrow \ \wedge\ m' = (m \setminus \{\langle x, m(x)\rangle\}) \cup \{\langle x, n\rangle \mid n^2 = m(y)\}\\
m \xrightarrow{a} m' \quad &:\iff \quad m(y) \downarrow \ \wedge\ m' = (m \setminus \{\langle y, m(y)\rangle\}) \cup \{\langle y, m(y) + 1\rangle\}
\end{aligned}
$$

(Falls $m(x)$ nicht existiert, sei $m \setminus \{\langle x, m(x)\rangle\} := m$.) Beachte, daß man vom Eingabezustand $m \in M$ mit $\xrightarrow{\alpha}$ evtl. zu verschiedenen Ausgabezuständen m', m'' kommen kann.

Jedem Programm α kann man nun Modaloperatoren $[\alpha]$ und $\langle\alpha\rangle$ zuordnen und $\xrightarrow{\alpha}$ als die jeweilige Erreichbarkeitsrelation verwenden:

$$
\begin{aligned}
m \models [\alpha]\varphi \quad &:\iff \quad \forall m' \in M[m \xrightarrow{\alpha} m' \Rightarrow m' \models \varphi] && (1)\\
&\iff \quad \text{nach jeder Ausführung von } \alpha \text{ gilt } \varphi \text{ (für den Speicherzustand)}\\
m \models \langle\alpha\rangle\varphi \quad &:\iff \quad \exists m' \in M[m \xrightarrow{\alpha} m' \wedge m' \models \varphi] && (2)\\
&\iff \quad \text{nach mindestens einer Ausführung von } \alpha \text{ gilt } \varphi
\end{aligned}
$$

Die Aussagen φ sollen mit den Modaloperatoren und den aussagenlogischen Junktoren aus Gleichungen und Ungleichungen zwischen Zahlausdrücken aufgebaut sein, die wir in $(\mathbb{Z}, <, 0, 1, +, \sqrt{\cdot})$ interpretieren, z.B.

$$
m \models (x < y) \quad :\iff \quad m(x) \downarrow \wedge\ m(y) \downarrow \wedge\ m(x) <^{\mathbb{Z}} m(y)
$$

(a) *Sei m_0 die Speicherbelegung, die jede Variable mit dem Wert 0 belegt. Für welche m gilt $m_0 \xrightarrow{a;b;c} m$?* *(3 Punkte)*

(b) *Warum gilt $\langle a\rangle\varphi \leftrightarrow [a]\varphi$ für jede Speicherbelegung?* *(2 Punkte)*

(c) *Gilt $(0 < x) \to [b](0 < x)$ für jede totale Speicherbelegung m?* *(2 Punkte)*

(d) *Zeige:*

  (a) *$m \models \langle\alpha; \beta\rangle\varphi$ genau dann , wenn $m \models \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle\varphi$.* *(3 Punkte)*

  (b) *$m \models \langle\alpha + \beta\rangle\varphi$ genau dann, wenn $m \models \langle\alpha\rangle\varphi$ oder $m \models \langle\beta\rangle\varphi$* *(3 Punkte)*