Mathematische Grundlagen I
WS 2002/03, CIS

H.Leiß

24. Oktober 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick

Die Aussagen- und Prädikatenlogik, die im Folgenden betrachtet wird, sollte man auch immer als Modellsprachen betrachten, die in überschaubarem Maßstab Probleme behandeln und z.T. lösen, die für natürliche Sprachen noch nicht, viel schwerer, oder überhaupt nicht lösbar sind.

Sprachliche Ausdrücke haben keinen festen Bezug auf eine bestimmte Wirklichkeit, sondern können auf unterschiedliche Weise auf eine Wirklichkeit bezogen werden. Ein Ausdruck φ wird relativ zu einer vorgestellten Wirklichkeit $\mathcal{A}$ *interpretiert* und hat dadurch eine *Bedeutung* $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}}$.

Unterschiedliche Arten sprachlicher Ausdrücke werden normalerweise durch unterschiedliche Arten von abstrakten „Gegenständen" der Wirklichkeit interpretiert, etwa:

Interpretation

Sprache		Wirklichkeit
Aussagen	$\mapsto$	Sachverhalte
Aussageformen	$\mapsto$	Beziehungen
Eigennamen	$\mapsto$	Objekte
Gattungsnamen	$\mapsto$	Mengen
Namenformen	$\mapsto$	Funktionen

Auf der sprachlichen Seite unterscheiden wir den *syntaktischen Aufbau* von Ausdrücken aus ihren Teilausdrücken. Eine *Grammatik* sagt, was die unzerlegbaren, atomaren Ausdrücke sind und was die erlaubten Konstruktionen zusammengesetzter Ausdrücke sind.

Auf der semantischen Seite unterscheiden wir verschiedene *Typen* von abstrakten Gegenständen, die in der „Wirklichkeit" vorkommen, haben aber i.a. keine eindeutige Zusammensetzung dieser Gegenstände aus einfacheren Teilen.

Bei der *Interpretation* eines Ausdrücks dient die syntaktische Form des Ausdrucks dazu, die Bedeutung zusammengesetzter Ausdrücke aus der Bedeutung ihrer Teilausdrücke zu bestimmen. Wie das geht und was die Bedeutung der atomaren Ausdrücke ist, muß für jede Sprache und jede gewählte „Wirklichkeit" eigens festgelegt werden.

Wir werden das am einfachsten Beispiel der Aussagenlogik sehen, wo wir auf der syntaktischen Seite nur eine Art von Ausdrücken haben, eben die Aussagen, und auf der semantischen Seite nur zwei Sachverhalte, die Wahrheitswerte 1 (*wahr*) und 0 (*falsch*).

Das nächstschwierigere Beispiel ist die Prädikatenlogik, wo wir auf der syntaktischen Seite mindestens zwei Arten von Ausdrücken haben, die Namen oder Objektbezeichner und die Aussage(forme)n, mit denen über Objekte gesprochen wird. Um hier die Interpretation der Ausdrücke anzugeben, braucht man einige mathematische Begriffe wie Mengen, Funktionen, Relationen, die wir im

Laufe des Kurses behandeln werden.

Mit Hilfe dieser mathematischen Begriffe kann man dann genau festlegen, was eine Interpretation der prädikatenlogischen Ausdrücken ist. (Das heißt noch nicht, daß man die Bedeutung eines Ausdrucks effektiv ausrechnen kann.) Die Semantik der Prädikatenlogik kann eine Idee davon vermitteln, wie man eine Semantik für Teile der natürlichen Sprachen festlegen könnte, die für die Sprachverarbeitung mit einem Rechner verwendet werden könnte.

Es ist aber klar, daß auch die Semantik der Prädikatenlogik noch zu starke Vereinfachungen macht, als daß sie zur Interpretation natürlicher Sprachen dienen könnte. Einerseits hat sie mit Objekten, Mengen, Funktionen und Relationen viel zu wenig Typen abstrakter Gegenstände, als daß man damit so etwas wie Ereignisse, Handlungen, Absichten, Begriffe usw. darstellen könnte, die in der Semantik natürlicher Sprachen eine große Rolle spielen. Dem kann man durch die Betrachtung einer Typenlogik in gewissem Umfang begegnen.

Andererseits ist aber der in der Mathematik sinnvolle Standpunkt, Begriffe, Funktionen usw. *extensional* zu verstehen, z.B. einen Begriff mit seinem Umfang oder eine Funktion mit ihrem Wertverlauf gleichzusetzen, nicht brauchbar, wenn man eine durch Maschinen verwendbare Semantik natürlicher Sprachen entwickeln will, da z.B. die Begriffsumfänge von Anwendung zu Anwendung verschieden sind und neu repräsentiert werden müßten. Man muß vermutlich eher eine *intensionale* Semantik konstruieren, die Begriffe durch Definitionen, Funktionen durch Programme usw. interpretiert.

Insgesamt sind natürliche Sprachen so umfangreich und so schwer zu verstehen, daß man sich nur mit einer vereinfachenden Vorgehensweise dem Ziel, natürliche Sprachen genau zu beschreiben und sie einer Verwendung oder Behandlung durch Maschinen zugänglich zu machen, Schritt für Schritt annähern kann.

Dieser Kurs zu den mathematischen Grundlagen soll immerhin einige wesentliche begriffliche Hilfsmittel bereitstellen, die man in der Computerlinguistik und für die Programmierung braucht.

2 Aussagenlogik

2.1 Syntax

Sei $At = \{ A_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ eine unendliche Menge von „Aussagevariablen“.

Definition 2.1 Die Menge der *aussagenlogischen Formeln* ist die kleinste Menge F mit

(a) $\{\top, \bot\} \subseteq F$, d.h. die beiden Aussagekonstanten $\bot$ und $\top$ sind in F,

(b) $At \subseteq F$, d.h. jede Aussagenvariable ist in F,

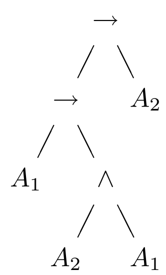
(c) F ist abgeschlossen unter $\neg, \wedge, \vee$ und $\rightarrow$, d.h. sind α und β in F, so auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \rightarrow \beta)$.

Man gibt eine solche Definition oft durch eine Kurzschreibweise an, die die möglichen Formen der definierten Objekte andeutet. Für die aussagenlogischen Formeln lautet die Kurzschreibweise:

$$\varphi, \psi \quad ::= \quad A \mid \top \mid \bot \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \mid (\varphi \leftrightarrow \psi),$$

wobei A über die Aussagenvariablen At „läuft“.

Eine Formel kann man auch als *Baum* darstellen, z.B. ist



die Baumdarstellung der Formel $(((A_1 \rightarrow (A_2 \wedge A_1)) \rightarrow A_2)$. Sie drückt die Form oder *syntaktische Struktur* der Formel graphisch aus. (Auch für Aussagen einer natürlichen Sprache stellt man die syntaktische Struktur oft als Baum dar.)

2.2 Semantik

Definition 2.2 Mit $\mathbb{B} := (\{0,1\}, \sqcup, \sqcap, , -)$ ist die Boole'sche Algebra der Wahrheitswerte gemeint (0 für *falsch*, 1 für *wahr*), wobei die Operationen durch

a	b	$a \sqcap b$	$a \sqcup b$	$-a$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

(1)

definiert sind.

Definition 2.3 Eine *Belegung* ist eine Funktion $g : At \to \{0,1\}$. Der *Wert* $[\![\alpha]\!]g$ der Formel α *unter der Belegung* g ist induktiv durch

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\top]\!]g & := & 1 \qquad (2)\\
[\![\bot]\!]g & := & 0 \qquad (3)\\
[\![A]\!]g & := & g(A) \qquad (4)\\
[\![(\alpha \wedge \beta)]\!]g & := & [\![\alpha]\!]g \sqcap [\![\beta]\!]g, \qquad (5)\\
[\![(\alpha \vee \beta)]\!]g & := & [\![\alpha]\!]g \sqcup [\![\beta]\!]g, \qquad (6)\\
[\![(\alpha \to \beta)]\!]g & := & -[\![\alpha]\!]g \sqcup [\![\beta]\!]g \qquad (7)
\end{array}
$$

definiert.

Anschaulich berechnet man $[\![\varphi]\!]g$ aus der Bedeutung der atomaren Teilaussagen, indem man die Blätter A_i des Baums mit ihren Werten $g(A_i)$ markiert und dann die Werte der Verzweigungsknoten aus den Werten ihrer „Nachfolgerknoten“ berechnet, hier für die Formel $\varphi := (((A_1 \to (A_2 \wedge A_1)) \to A_2)$ und eine Belegung g mit $g(A_1) = 0, g(A_2) = 1$:

```
            → : 1
            /   \
       → : 1     A2 : 1
       /   \
  A1 : 0    ∧ : 0
            /   \
       A2 : 1    A1 : 0
```

An der Wurzel des Baums erhält man als Markierung den Wert $[\![\varphi]\!]g$. Die syntaktische Struktur der Formel und die Bedeutung ihrer atomaren Teile bestimmen also die Bedeutung der Formel (Kompositionsprinzip).

Lemma 2.4 (Koinzidenzlemma) Sei $V(\alpha)$ die Menge der in α vorkommenden Aussagevariablen. Sind g_1, g_2 zwei Belegungen mit $g_1(A_i) = g_2(A_i)$ für alle $A_i \in V(\alpha)$, so gilt $[\![\alpha]\!]g_1 = [\![\alpha]\!]g_2$, d.h. stimmen die Belegungen auf den Variablen von α überein, so stimmen auch die Werte von α unter den Belegungen überein.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau. (Übungsaufgabe) □

Definition 2.5 Eine Formel γ ist *allgemeingültig* oder eine *Tautologie*, wenn sie bei jeder Belegung den Wert 1 hat. Eine Formel γ (oder eine Formelmenge Γ) ist *erfüllbar*, wenn sie (bzw. alle $\gamma \in \Gamma$) bei mindestens einer Belegung den Wert 1 hat. Zwei Formeln α und β sind *äquivalent*, geschrieben: $\alpha \equiv \beta$, wenn ihre Werte bei allen Belegungen übereinstimmen.

Satz 2.6 Es gibt ein Verfahren, mit dem man für jede Formel α feststellen kann, ob α allgemeingültig ist.

Beweis: Man stellt fest, welche Aussagenvariablen in α vorkommen; dies seien etwa $A_1, \ldots, A_n$. Nach dem Koinzidenzlemma hat α unter allen Belegungen, die auf $A_1, \ldots, A_n$ übereinstimmen, denselben Wert. Daher genügt es, die Tabelle

A_1	$\cdots$	A_{n-1}	A_n	α
0	$\cdots$	0	0	$f_\alpha(0, \ldots, 0)$
0	$\cdots$	0	1	$f_\alpha(0, \ldots, 1)$
	$\vdots$			$\vdots$
1	$\cdots$	1	1	$f_\alpha(1, \ldots, 1)$

aufzustellen, wobei $f_\alpha(b_1, \ldots, b_n) := [\![\alpha]\!]g$ für die Belegungen g mit $g(A_1) = b_1, \ldots, g(A_n) = b_n$. Falls in der rechten Spalte stets der Wert 1 auftritt, ist α allgemeingültig, sonst nicht. □

Für große Formeln ist das Verfahren zu aufwendig: die Tabelle hat 2^n Zeilen. Es sind aber keine Verfahren bekannt, die für beliebige Formeln mit weniger Aufwand die Antwort liefern.

Den Wert $[\![\alpha]\!]g$ einer Formel α unter der Belegung g berechnet man praktischerweise so, daß man die Formel als Baum darstellt, dann die mit A_i beschrifteten Blätter mit dem Wert $g(A_i)$ markiert, und anschließend die inneren Knoten k des Baums mit dem Wert markiert, der sich aus dem Wert der direkten Teilbäume durch Anwenden der Wahrheitsfunktion $-, \sqcap, \sqcup$ ergibt, der dem Junktor $\neg, \wedge, \vee$ am Knoten k entspricht.

Um die obige Tabelle aufzustellen, schreibt man praktischerweise die Werte der Teilformeln in einer Spalte unter den Hauptjunktor der Teilformel.

Definition 2.7 Sei $\alpha(X/\delta)$ die Formel, die aus α entsteht, wenn man jedes Vorkommen der Aussagenvariable X duruch die Formel δ ersetzt.

Lemma 2.8 (Ersetzungslemma) Seien α, β, γ aussagenlogische Formeln. Wenn $\beta \equiv \gamma$ ist, so ist $\alpha(X/\beta) \equiv \alpha(X/\gamma)$.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau. (Übung!) □

Definition 2.9 Sei T eine Menge von Formeln. Eine Belegung g *erfüllt* T, wenn $[\![\gamma]\!]g = 1$ für jedes $\gamma \in T$. Die Formel α *folgt aus* T, geschrieben $T \models \alpha$, wenn jede Belegung, die T erfüllt, auch α erfüllt.

Beispiel 2.10 Sei $T := \{\, A_n \to A_{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Die Aussage $\varphi := A_0 \to A_{10}$ ist nicht in T, aber φ folgt aus T. Denn sei g eine Belegung, die T erfüllt. Falls $g(A_0) = 0$ ist, so ist nach den Definitionen $[\![\varphi]\!]g = 1$. Falls $g(A_0) = 1$ ist, muß aber auch $g(A_1) = 1$ sein, denn mit $g(A_1) = 0$ wäre ja $[\![A_0 \to A_1]\!]g = 0$, was aber wegen $(A_0 \to A_1) \in T$ nicht der Fall ist. Da $g(A_1) = 1$ und $[\![A_1 \to A_2]\!]g = 1$ ist, muß ebenso $g(A_2) = 1$ sein, usw., sodaß schließlich auch $g(A_{10}) = 1$ ist. Dann ist aber auch $[\![(A_0 \to A_{10})]\!]g = 1$. Also wird φ bei jeder Belegung g, die T erfüllt, wahr.

Enthält unsere Aussagenlogik alle Junktoren, die durch eine Wahrheitsfunktion $f : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ interpretiert werden können, oder müssen wir neben $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, noch weitere Junktoren hinzunehmen, z.B. *weder – noch*, *sowohl – als auch*? Es gibt z.B. 16 zweistellige Wahrheitsfunktionen, nämlich

a	b	$f_1(a,b)$															$f_{16}(a,b)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Wir haben zwar keine 16 Junktoren, aber wir können alle diese Wahrheitsfunktionen durch die für die vorhandenen Junktoren „ausdrücken", z.B. $f_3(a,b) = a \sqcap -b$. Also ist $(A \wedge \neg B)$ eine Formel mit $[\![(A \wedge \neg B)]\!]g = f_3([\![A]\!]g, [\![B]\!]g)$.

Satz 2.11 Jede k-stellige Wahrheitsfunktion $f : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ kann aus der 0-stelligen Funktion $f() = 0$, der einstelligen Funktion $-$ und der zweistelligen Funktion $\sqcap$ von $\mathbb{B}$ zusammengesetzt werden.

Beweis: Zu f konstruieren wir eine Formpel $\varphi_f(A_1, \ldots, A_K)$ mit

$$[\![\varphi_f(A_1, \ldots, A_k)]\!]g = f(g(A_1), \ldots, g(A_k))$$

für alle Belegungen g. Für jedes $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{B}^k$, wo $f(a_1, \ldots, a_k) = 1$ ist, bilde den Ausdruck

$$(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2 \wedge \cdots \wedge \tilde{A}_k) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}_i := \begin{cases} A_i, & \text{falls } a_i = 1, \\ \neg A_i, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Formel φ_f sei die $\vee$-Verbindung dieser Formeln; falls es kein $(a_1, \dots, a_k)$ mit $f(a_1, \dots, a_k) = 1$ gibt, sei $\varphi_f := \bot$. Ist nun g irgend eine Belegung und $(a_1, \dots, a_k) = (g(A_1), \dots, g(A_k))$, so ist

$$f(a_1, \dots, a_k) = 1 \text{ genau dann, wenn } [\![(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2 \wedge \cdots \wedge \tilde{A}_k)]\!]g = 1.$$

Daraus folgt, daß $f(a_1, \dots, a_k) = [\![\varphi_f]\!]g$ ist. Da eine Formel $(\varphi \vee \psi)$ zu $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ äquivalent ist, kann man in φ_f auch $\vee$ noch mit Hilfe von $\neg$ und $\wedge$ beseitigen. Der Formel φ_f entspricht eine aus $f() = 0$ mit $-$ und $\sqcap$ aufgebaute Wahrheitsfunktion. $\square$

Beispiel 2.12 Die zweistellige Wahrheitsfunktion f_7 der obigen Tabelle hat für die Argumente $(0, 1)$ und $(1, 0)$ den Wert 1, sonst 0. Wir erhalten die Formel

$$\varphi_{f_7} := ((\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)),$$

die (*entweder A oder aber B)* ausdrückt. Wir brauchen also keinen eigenen Junktor *entweder-oder* für das ausschließende *oder*.