3.5 Unterstrukturen und Homomorphismen

Sei $\Sigma = (Fun, Rel, Con)$ eine *Signatur*, d.h. $Fun = \langle f_i^{(n_i)} \mid i \in I\rangle$ eine Familie von Funktionszeichen, $Rel = \langle {R_j}^{(m_j)} \mid j \in J\rangle$ eine Familie von Relationszeichen, und $Con = \langle c_k \mid k \in K\rangle$ eine Familie von Konstanten.

Definition 3.64 Eine *Struktur* $\mathcal{A}$ der Signatur Σ,

$$\mathcal{A} = (A, \langle f_i^{\mathcal{A}} \mid i \in I\rangle, \langle R_j^{\mathcal{A}} \mid j \in J\rangle, \langle c_k^{\mathcal{A}} \mid k \in K\rangle),$$

besteht aus einer nicht-leeren Menge A von Objekten oder *Individuen*, einer totalen Funktion $f_i^{\mathcal{A}} : A^{n_i} \to A$ für jedes $f_i^{(n_i)} \in Fun$, einer Relation $R_j^{\mathcal{A}} \subseteq A^{m_j}$ für jedes $R_j^{(m_j)} \in Rel$, und einem Element $c_k^{\mathcal{A}} \in A$ für jedes $c_k \in Con$.

Die Struktur $\mathcal{A}$ heißt *Relationalstruktur*, wenn Fun leer ist, und *Algebra*, wenn Rel leer ist.

Wenn die Funktionen, Relationen oder Konstanten in einer Struktur $\mathcal{A}$ eine übliche Bezeichnung haben, läßt man den oberen Index $\mathcal{A}$ weg.

Beispiel 3.65 (a) Die Teilmengenalgebra $\mathcal{A} = (2^M, \cup, \cap, \emptyset, M)$ ist eine Algebra der Signatur Σ mit $Fun = \langle \cup^{(2)}, \cap^{(2)}\rangle$ und $Con = \langle 0, 1\rangle$, wobei $\emptyset = 0^{\mathcal{A}}$, $1^{\mathcal{A}} = M$ usw.

(b) Die partielle Ordnung $\mathcal{A} = (2^M, \subseteq, \emptyset)$ ist eine Relationalstruktur der Signatur Σ mit $Rel = \langle \leq^{(2)}\rangle$ und $Con = \langle 0\rangle$, wobei $\subseteq\, = \,\leq^{\mathcal{A}}$ und $\emptyset = 0^{\mathcal{A}}$.

Definition 3.66 Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Strukturen derselben Signatur Σ. Dann ist $\mathcal{A}$ eine *Unterstruktur* von $\mathcal{B}$, kurz: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, wenn $A \subseteq B$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

(a) für jedes $f^{(n)} \in Fun$ ist $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)$,

(b) für jedes $R^{(m)} \in Rel$ ist $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in R^{\mathcal{A}} \iff \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in R^{\mathcal{B}}$,

(c) $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$ für jedes $c \in Con$.

Man definiert die Bedeutung oder den *Wert* $[\![t]\!]_h^{\mathcal{A}}$ des Terms $t(x_1, \ldots, x_n)$ und den Wert $[\![\varphi]\!]_h^{\mathcal{A}}$ der Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ in der Struktur $\mathcal{A}$ bei der Belegung h wie üblich [8]. Wenn $h(x_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$, schreibt man oft

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] & \text{statt} & [\![t]\!]_h^{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] & \text{statt} & [\![\varphi]\!]_h^{\mathcal{A}} = 1. \end{array}$$

[8] Das haben wir in der Vorlesung definiert, lasse ich hier im Moment weg.

Lemma 3.67 Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $h : Var \to A$ eine Belegung mit $h(x_i) = a_i$.

(a) Für jeden Term $t(x_1, \ldots, x_n)$ ist $t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n]$.

(b) Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Formel, die aus atomaren und negierten atomaren Formeln mit $\wedge, \vee, \exists$ aufgebaut ist, so gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]. \tag{14}$$

Beweis:

(a) Durch Induktion über den Aufbau der Terme.

(b) Durch Induktion über den Aufbau von φ.

$\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_m)$: Mit (a) erhält man

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_m)[a_1, \ldots, a_n]} \\
\iff & \langle t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]\rangle \in R^{\mathcal{A}} \\
\iff & \langle t_1^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n]\rangle \in R^{\mathcal{A}} \\
\iff & \langle t_1^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathcal{B}}[a_1, \ldots, a_n]\rangle \in R^{\mathcal{B}} \\
\iff & \mathcal{B} \models R(t_1, \ldots, t_m)[a_1, \ldots, a_n].
\end{array}$$

Dasselbe gilt für $\varphi \equiv t_1 \doteq t_2$. Daraus folgt (14) für atomare und negiert atomare φ.

$\varphi \equiv \exists x_{n+1}\psi$: Mit Hilfe der Induktionsannahme erhalten wir:

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]} \\
\iff & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \models (\exists x_{n+1}\psi)[a_1, \ldots, a_n]} \\
\iff & \text{Für ein } a_{n+1} \in A : & \mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_{n+1}] \\
\Longrightarrow & \text{Für ein } a_{n+1} \in A : & \mathcal{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_{n+1}] \\
\Longrightarrow & \text{Für ein } a_{n+1} \in B : & \mathcal{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_{n+1}] \\
\Longrightarrow & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \models (\exists x_{n+1}\psi)[a_1, \ldots, a_n]} \\
\iff & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].}
\end{array}$$

Die Fälle $\varphi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ und $\varphi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ gehen analog.

□

Korollar 3.68 Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$. Ist die Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ aus atomaren und negierten atomaren Formeln nur mit $\wedge, \vee, \forall$ aufgebaut, so gilt:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]. \tag{15}$$

Beweis: Da $\neg\forall x\psi$ zu $\exists x\neg\psi$, $\neg(\psi_1 \vee \psi_2)$ zu $(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$ und $\neg\neg\psi$ zu ψ äquivalent[9] sind, ist die Formel $\neg\varphi$ äquivalent zu einer Formel $\widetilde{\varphi}$, die aus atomaren und negiert atomaren Formeln mit $\wedge, \vee, \exists$ aufgebaut ist. Nach dem Lemma gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \neg\varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models \widetilde{\varphi}[a_1, \ldots, a_n] \\ &\implies \quad \mathcal{B} \models \widetilde{\varphi}[a_1, \ldots, a_n] \\ &\iff \quad \mathcal{B} \models \neg\varphi[a_1, \ldots, a_n].\end{aligned}$$

Aber

$$\mathcal{A} \models \neg\varphi[a_1, \ldots, a_n] \qquad \implies \qquad \mathcal{B} \models \neg\varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

ist zur der Behauptung (15) äquivalent. □

Beispiel 3.69 Sei $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{R}, \leq^{\mathbb{R}})$. Dann gilt mit der Abkürzung $x < y := (x \leq y \wedge \neg(x \doteq y))$ z.B.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \forall z(z \leq x_1 \vee x_2 \leq z)[4, 5] \quad &\not\Rightarrow \quad \mathcal{B} \models \forall z(z \leq x_1 \vee x_2 \leq z)[4, 5], \\ \mathcal{A} \models \exists z(x_1 < z \wedge z < x_2)[4, 6] \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{B} \models \exists z(x_1 < z \wedge z < x_2)[4, 6].\end{aligned}$$

Für $\varphi(x) := \forall y(y < x \to \exists z(y < z \wedge z < x))$ ist

$$\mathcal{B} \models \varphi[5] \quad \not\Rightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi[5].$$

Aus dem Korollar folgt also, daß φ zu keiner Formel äquivalent ist, die aus atomaren und negiert atomaren Formeln nur mit $\vee, \wedge, \forall$ aufgebaut ist.

Als nächstes betrachten wir Abbildungen zwischen den Individuenbereichen zweier Strukturen und interessieren uns dafür, wann solche Abbildungen „die Struktur erhalten“ oder übertragen:

Definition 3.70 Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Strukturen der Signatur Σ, und $h : A \to B$. Die Abbildung h heißt *Homomorphismus* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, kurz: $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, falls für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_m \in A$:

(a) $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ für jedes $c \in \mathit{Con}$,

(b) $\langle h(a_1), \ldots, h(a_m)\rangle \in R^{\mathcal{B}}$, falls $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in R^{\mathcal{A}}$, für jedes $R^{(m)} \in \mathit{Rel}$,

(c) $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$ für jedes $f^{(n)} \in \mathit{Fun}$.

Ein Homomorphismus ist *stark*, falls zusätzlich

(d) $\langle h(a_1), \ldots, h(a_m)\rangle \notin R^{\mathcal{B}}$, falls $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \notin R^{\mathcal{A}}$, für jedes $R^{(m)} \in \mathit{Rel}$.

[9] Was noch zu beweisen wäre!

Beachte, daß (b) bzw. (d) besagen, daß $h[R^{\mathcal{A}}] \subseteq R^{\mathcal{B}}$ bzw. $h[R^{\mathcal{A}}] = R^{\mathcal{B}} \cap h[A^m]$, und (c) ist ein Spezialfall von (b), wenn man n-stelligen Funktionen als spezielle $(n+1)$-stellige Relationen versteht.

Lemma 3.71 Sei $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

(a) Für jeden Term $t(x_1, \dots, x_n)$ ist $h(t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) = t^{\mathcal{B}}[h(a_1), \dots, h(a_n)]$.

(b) Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel, die aus atomaren Formeln mit $\wedge, \vee, \exists$ aufgebaut ist, so gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)]. \tag{16}$$

Falls h ein starker (bzw. injektiver) Homomorphismus ist, so darf φ auch negierte atomare Formeln der Form $\neg R(t_1, \dots, t_m)$ (bzw. $\neg(t_1 \doteq t_2)$) enthalten.

Beweis:

(a) Durch Induktion über den Aufbau der Terme: Ist $t \equiv c \in Con$, so gilt

$$h(t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) = h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}} = t^{\mathcal{B}}[h(a_1), \dots, h(a_n)].$$

Ist $t \equiv x_i \in Var$, so gilt

$$h(t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) = h(a_i) = t^{\mathcal{B}}[h(a_1), \dots, h(a_n)].$$

Ist $t \equiv f(t_1, \dots, t_k)$, so ist

$$\begin{array}{rcl}
h(t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) & = & h(f(t_1, \dots, t_k)[a_1, \dots, a_n])^{\mathcal{A}} \\
& = & h(f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n], \dots, t_k^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n])) \\
& = & f^{\mathcal{B}}(h(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]), \dots, h(t_k^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n])) \\
& = & f^{\mathcal{B}}(t_1^{\mathcal{B}}[h(a_1), \dots, h(a_n)], \dots, t_k^{\mathcal{B}}[h(a_1), \dots, h(a_n)]) \\
& = & (f(t_1, \dots, t_k))^{\mathcal{B}}[h(a_1), \dots, h(a_n)] \\
& = & t^{\mathcal{B}}[h(a_1), \dots, h(a_n)].
\end{array}$$

(b) Durch Induktion über den Aufbau von φ. Das geht analog zum Teil (b) aus Lemma 3.67.

□

Lemma 3.71 (und seinen Spezialfall Lemma 3.67) nennt man auch einen *Erhaltungssatz*: es besagt, daß Eigenschaften, die sich durch bestimmte Formeln ausdrücken lassen, beim Übergang von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ *erhalten* bleiben bzw. mit h von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ übertragen werden.

Beachte, daß ein Homomorphismus zwar Gleichungen $t_1 \doteq t_2$ erhält, aber i.a. keine Ungleichungen $\neg(t_1 \doteq t_2)$.