2.3 Gentzen-Kalkül

Wir stellen einen Kalkül vor, mit dem man die Wahrheit von Aussagen *unter gewissen Annahmen* nachweisen kann. Wir trennen die Annahmen Γ von den Behauptungen Δ durch ein Trennzeichen $\triangleright$.

Definition 2.13 Eine *Sequenz* $\Gamma \triangleright \Delta$ besteht aus zwei endlichen Formelmengen[1] , Γ und Δ. Eine Sequenz $\Gamma \triangleright \Delta$ heißt *gültig*, wenn die Formel $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ allgemeingültig ist. (Γ heißt das *Antezedenz* und Δ das *Sukzedenz* der Sequenz.)

Ist $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, so steht $\bigwedge \Gamma$ für $\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ und $\bigvee \Gamma$ für $\gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$. Ist Γ leer, so sei $\bigwedge \Gamma := \top$ (denn *alle* alle Aussagen aus Γ sind wahr) und $\bigvee \Gamma := \bot$ (denn es ist falsch, daß *mindestens eine* Aussage aus Γ wahr ist). Wir schreiben statt $\Gamma \cup \{\alpha\}$ einfacher Γ, α.

Definition 2.14 Der Gentzen-Kalkül hat folgende Axiome, für alle Γ, Δ, α:

$$\begin{aligned} \Gamma, \alpha &\triangleright \alpha, \Delta \\ \Gamma, \bot &\triangleright \Delta \\ \Gamma &\triangleright \top, \Delta \end{aligned}$$

und folgende Schlußregeln, für beliebige $\Gamma, \Delta, \alpha, \beta$:

$$\frac{\Gamma \triangleright \Delta}{\Gamma, \top \triangleright \Delta}\,(\top L) \qquad \frac{\Gamma \triangleright \Delta}{\Gamma \triangleright \bot, \Delta}\,(\bot R)$$

$$\frac{\Gamma \triangleright \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg\alpha \triangleright \Delta}\,(\neg L) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \triangleright \Delta}{\Gamma \triangleright \neg\alpha, \Delta}\,(\neg R)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \triangleright \Delta}{\Gamma, (\alpha \wedge \beta) \triangleright \Delta}\,(\wedge L) \qquad \frac{\Gamma \triangleright \alpha, \Delta \qquad \Gamma \triangleright \beta, \Delta}{\Gamma \triangleright (\alpha \wedge \beta), \Delta}\,(\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \triangleright \Delta \qquad \Gamma, \beta \triangleright \Delta}{\Gamma, (\alpha \vee \beta) \triangleright \Delta}\,(\vee L) \qquad \frac{\Gamma \triangleright \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \triangleright (\alpha \vee \beta), \Delta}\,(\vee R)$$

$$\frac{\Gamma \triangleright \alpha, \Delta \qquad \Gamma, \beta \triangleright \Delta}{\Gamma, (\alpha \to \beta) \triangleright \Delta}\,(\to L) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \triangleright \beta, \Delta}{\Gamma \triangleright (\alpha \to \beta), \Delta}\,(\to R)$$

Beachte, daß in jeder Obersequenz einer Regel ein Junktor oder eine Aussagenkonstante weniger vorkommt als in der Untersequenz.

[1] Man kann auch mit Formel*folgen* arbeiten, daher der Name *Sequenz*; dann braucht man aber weitere Regeln, die sicherstellen, daß es auf die Anordnung der Aussagen und auf Wiederholungen der gleichen Aussage in einer Sequenz nicht ankommt.

Definition 2.15 Ein *Beweis* der Sequenz $\Gamma \rhd \Delta$ im Kalkül G ist ein endlicher Baum, dessen Knoten so mit Sequenzen beschriftet sind, daß gilt:

(a) an der Wurzel steht $\Gamma \rhd \Delta$,

(b) jede Sequenz an einem Blatt des Baums ist ein Axiom, und

(c) jede Sequenz an einem inneren Knoten ist die Untersequenz einer Regel, und deren Obersequenzen stehen an den direkten Nachfolgerknoten.

Einen Beweis für $\Gamma \rhd \Delta$ konstruiert man von der Wurzel aus. Hat man schon eine Sequenz an einem Knoten, so wählt man in ihr eine Formel aus und wendet die auf ihren Hauptjunktor passende Regel „von unten nach oben“ an: falls die Formel im Antezedenz lag, die entsprechende Linksregel, sonst die Rechtsregel.

Beispiel 2.16

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\beta,\alpha \rhd \alpha}{\neg\beta \rhd \alpha,\neg\alpha}\,(\neg R) \qquad \dfrac{\beta \rhd \beta,\neg\alpha}{\beta,\neg\beta \rhd \neg\alpha}\,(\neg L)}{(\alpha \to \beta),\neg\beta \rhd \neg\alpha}\,(\to L)}{(\alpha \to \beta) \rhd (\neg\beta \to \neg\alpha)}\,(\to R)$$

Da die Sequenzen an den Blättern Axiome sind, ist dies ein Beweis der Sequenz an der Wurzel des Baums. (Beachte, daß eine vollständige Wahrheitstafel zur Überprüfung der Allgemeingültigkeit von $((\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha))$ sehr groß wird, wenn in α, β viele verschiedene Aussagenvariable vorkommen.)

Beispiel 2.17

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,B,B,C \rhd}{(A \wedge B),B,C \rhd}\,(\wedge L)}{B,C \rhd \neg(A \wedge B)}\,(\neg R) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{C \rhd C,\neg(A \wedge B)}\,(\neg R)}{\neg C,C \rhd \neg(A \wedge B)}\,(\neg L)}{(B \vee \neg C),C \rhd \neg(A \wedge B)}\,(\vee L) \qquad \dfrac{\dfrac{A,B,C \rhd A}{(A \wedge B),C \rhd A}\,(\wedge L)}{C \rhd A,\neg(A \wedge B)}\,(\neg R)}{(A \to (B \vee \neg C)),C \rhd \neg(A \wedge B)}\,(\to L)$$

Da am linken Blatt kein Axiom vorliegt, man aber auch keine Regel mehr anwenden kann, kann dieser Baum nicht zu einem Beweis der Sequenz an der Wurzel fortgesetzt werden!

Satz 2.18 Der Kalkül ist *korrekt* und *vollständig*: jede beweisbare Sequenz ist gültig, und jede gültige Sequenz ist beweisbar.

Beweis: (Skizze) Man überlegt sich zuerst:

(a) Jedes Axiom ist eine gültige Sequenz.

(b) Die Untersequenz einer Regel ist genau dann gültig, wenn die Obersequenz(en) gültig sind (Beweis s.u.).

Daraus folgen die Behauptungen: 1. Der Kalkül korrekt: gibt es einen Beweis für $\Gamma \rhd \Delta$, so sind alle Sequenzen an den Knoten des Beweisbaumes gültig, also auch die Sequenz an der Wurzel.

2. Der Kalkül ist vollständig: Sei $\Gamma \rhd \Delta$ eine gültige Sequenz. Konstruiere einen Baum, an dessen Wurzel $\Gamma \rhd \Delta$ steht. Solange noch ein Junktor in der Sequenz an einem Blatt k des Baums vorkommt, ist die Sequenz die Unterseqenz einer Regel. Erweitere den Baum um einen (bzw. zwei) Nachfolgerknoten von k, und schreibe die Obersequenz(en) daran. Entsprechend behandelt man $\top$ im Antezedenz und $\perp$ im Sukzedenz der Seqenz an einem Knoten. Da in jedem Schritt die Obersequenz(en) weniger Junktoren oder Aussagekonstanten enthalten als die Untersequenz, gelangt man schließlich zu Knoten, deren Sequenzen keine Junktoren und die Konstante $\top$ höchstens im Sukzedenz, die Konstante $\perp$ höchstens im Antezedenz enthalten. Da diese Sequenzen gültig sind, aber keine Junktoren enthalten, sieht man, daß es Axiome sind. Daher ist der Baum ein Beweisbaum für $\Gamma \rhd \Delta$. $\square$

Zum Nachweis von (b) betrachten wir nur eine der Regeln, etwa $(\to L)$. Wir zeigen zuerst, daß die Untersequenz $\Gamma, (\alpha \to \beta) \rhd \Delta$ gültig ist, wenn die Obersequenzen $\Gamma \rhd \alpha, \Delta$ und $\Gamma, \beta \rhd \Delta$ gültig sind. Sei g eine Belegung. Wenn eine der Annahmen bei g falsch wird, wird die Aussage $(\bigwedge \Gamma \wedge (\alpha \to \beta)) \to \bigvee \Delta$ wahr. Seien also alle der Annahmen $\Gamma, (\alpha \to \beta)$ bei g wahr. Es bleibt zu zeigen, daß eine der Behauptungen Δ bei g wahr ist. Alle Aussagen aus $\Gamma, (\alpha \to \beta)$ sind bei g wahr. Da $(\alpha \to \beta)$ bei g wahr ist, muß bei g α falsch oder β wahr sein. Wird α falsch, so ist wegen der Gültigkeit der Obersequenz $\Gamma \rhd \alpha, \Delta$ eine der Aussagen aus α, Δ bei g wahr, also sogar eine der Aussagen aus Δ. Ist β bei g wahr, so ist wegen der Gültigkeit von $\Gamma, \beta \rhd \Delta$ auch eine der Aussagen aus Δ bei g wahr. In jedem Fall ist eine der Behauptungen aus Δ bei g wahr.

Nun zeigen wir, daß beide Obersequenzen $\Gamma \rhd \alpha, \Delta$ und $\Gamma, \beta \rhd \Delta$ gültig sind, wenn die Untersequenz $\Gamma, (\alpha \to \beta) \rhd \Delta$ gültig ist. Sei g eine Belegung. (i) g macht die Aussage $\bigwedge \Gamma \to (\alpha \vee \bigvee \Delta)$ wahr: wenn nicht alle Aussagen aus Γ bei g wahr sind, ist das klar. Im anderen Fall sind alle Aussagen aus Γ bei g wahr. Wenn auch α bei g wahr ist, ist ebenfalls $\bigwedge \Gamma \to (\alpha \vee \bigvee \Delta)$ wahr. Wenn α bei g falsch ist, ist aber $(\alpha \to \beta)$ wahr, und wegen der Gültigkeit von $\Gamma, (\alpha \to \beta) \rhd \Delta$ muß dann auch eine der Behauptungen aus Δ bei g wahr sein. (ii) g macht die Aussage $(\bigwedge \Gamma \wedge \beta) \to \bigvee \Delta$ wahr. Wir brauchen nur den Fall zu behandeln, in dem alle Aussagen aus Γ, β bei g wahr sind. Dann sind auch alle Aussagen von $\Gamma, (\alpha \to \beta)$ bei g wahr, also wegen der Gültigkeit der Untersequenz auch mindestens eine Aussage aus Δ. Da (i) und (ii) für beliebige Belegungen gezeigt wurde, ist insgesamt die Gültigkeit der Obersequenzen gezeit.

Ebenso muß man die Behauptung (b) für alle anderen Schlußregeln nachweisen.