3.4 Partielle Ordnungen und monotone Funktionen

Definition 3.42 Sei $R \subseteq A \times A$ eine zweistellige Rekation auf A.

(a) R ist *antisymmetrisch*, falls $R^{-1} \cap R \subseteq 1_A$, d.h. falls

$$\forall a, b \in A(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, a\rangle \in R \rightarrow a = b).$$

(b) R ist *irreflexiv*, falls $1_A \cap R = \emptyset$, d.h. falls

$$\forall a \in A \ \ \langle a, a\rangle \notin R.$$

Die Relation R ist eine *Quasiordnung*, falls R reflexiv und transitiv ist. R ist eine *partielle Ordnung*, falls R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Eine partielle Ordung R ist eine *lineare* oder *totale Ordnung*, falls

$$\forall a, b \in A \ (\langle a, b\rangle \in R \vee \langle b, a\rangle \in R).$$

d.h. falls je zwei Elemente aus A vergleichbar sind.

Beispiel 3.43 (a) Sei M eine Menge. Die Teilmengenrelation

$$A \subseteq B :\Longleftrightarrow \ \forall m \in M(m \in A \rightarrow m \in B)$$

ist eine partielle Ordnung auf 2^M, die aber keine totale Ordnung ist.

(b) Sei $A = \mathbb{N}$ und $n \leq m :\Longleftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{N}\ n + k = m$. Dann ist $\leq$ eine partielle, sogar eine totale Ordnung auf A.

(c) Sei $A = \Sigma^*$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet Σ. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ sei $|w|$ die *Länge* von w. Dann ist $v \preceq w :\Longleftrightarrow \ |v| \leq |w|$ eine Quasiordnung, aber keine partielle Ordnung.

Definition 3.44 Seien $(A, \leq^A)$ und $(B, \leq^B)$ je eine Menge mit einer partiellen Ordnung darauf. Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist *monoton* bezüglich $\leq^A$ und $\leq^B$, falls

$$\forall a, a' \in A \ (a \leq^A a' \rightarrow f(a) \leq^B f(a')).$$

Beispiel 3.45 (a) Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $f(n) = n^2$ definiert. Dann ist f eine monotone Funktion, bezüglich der üblichen totalen Ordnung auf $\mathbb{N}$.

(b) Sei $|\cdot| : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Mächtigkeit von Mengen natürlicher Zahlen, mit $n \leq \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist

$$A \subseteq B \subseteq \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |A| \leq |B|,$$

also ist $|\cdot|$ eine monotone Funktion. Beachte aber, daß hierin $A \neq B$ und trotzdem $|A| = |B|$ sein kann, z.B. bei $A = \{\, 2n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ und $B = \mathbb{N}$.

(c) Sei $f : 2^M \to 2^M$ definiert durch $f(A) = A \cup B$ für eine bestimmte Menge $B \subseteq M$. Dann ist f monoton bezüglich $\subseteq$, da ja $A \cup B \subseteq A' \cup B$, wenn $A \subseteq A'$ ist.

Beispiel 3.46 Sei $(B, \leq^B)$ eine Menge mit einer partiellen Ordnung, und $(A, \leq^A) = (\mathbb{N}, \leq)$ die natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung. Für Abbildungen $f : A \to B$ definiere

$$f \preceq g :\iff \exists a \in A\ \forall c \in A\ (a \leq^A c \to f(c) \leq^B g(c)).$$

Diese Relation, f *dominiert* g *schließlich*, ist eine partielle Ordnung auf B^A, aber keine totale Ordnung.

Können wir die Ordnung einer Menge auf eine andere übertragen?

Beispiel 3.47 Sei $(B, \leq^B)$ eine partielle Ordnung und $f : A \to B$. Definiere

$$a \preceq^A a' :\iff f(a) \leq^B f(b).$$

Dann ist $\preceq^A$ ein Quasiordnung auf A, aber i.a. keine partielle Ordnung.

Wenn z.B. $f : A \to B$ die Wortlänge $|\cdot| : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ ist, ist $\preceq^A$ nicht antisymmetrisch, da etwa

$$|abc| = |bac|, \qquad \text{aber} \qquad abc \neq bac.$$

3.4.1 Fixpunkte und Hüllenoperatoren

Definition 3.48 Ein Element $a \in A$ ist ein *Fixpunkt* einer Funktion $f : A \to A$, falls $f(a) = a$ ist.

Beispiel 3.49 Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n^2$ hat zwei Fixpunkte, nämlich $0 = f(0)$ und $1 = f(1)$. Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = n + 3$ hat keinen Fixpunkt. Die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h(n) = n$ hat *nur* Fixpunkte.

Definition 3.50 Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $f : A \to A$. Ein Element $a \in A$ ist ein *Präfixpunkt von* f, falls $f(a) \leq a$. Die Funktion f heißt

(a) *erweiternd*, falls $\forall a \in A\ a \leq f(a)$,

(b) *monoton*, falls $\forall a, a' \in A\ (a \leq a' \to f(a) \leq f(a'))$,

(c) *idempotent*, falls $\forall a \in A\ f(f(a)) = f(a)$.

Die Funktion f ist ein *Hüllenoperator*, falls sie erweiternd, monoton und idempotent ist.

Beispiel 3.51 Sei M eine Menge und $(2^M, \subseteq)$ die partiell geordnete Menge ihrer Teilmengen. Sei $B \subseteq M$.

(a) Die durch $f(A) := A \cup B$ definierte Funktion ist erweiternd, monoton, und idempotent, also eine Hüllenoperation. A ist genau dann ein Fixpunkt von f, wenn $B \subseteq A$.

(b) Die durch $g(A) := A \cap B$ definierte Funktion ist monoton und idempotent, aber nur dann erweiternd, wenn $B = M$ ist. Jedes $A \subseteq M$ ist ein Präfixpunkt von g. A ist ein Fixpunkt von g, wenn $A \subseteq B$.

Lemma 3.52 Sei $f : 2^M \to 2^M$ eine monotone Funktion bezüglich der partiellen Ordnung $\subseteq$ auf 2^M.

(a) f hat mindestens einen Präfixpunkt, nämlich M.

(b) Ist $\mathcal{P}$ eine nicht-leere Menge von Präfixpunkten von f, so ist auch $\bigcap \mathcal{P}$ ein Präfixpunkt von f.

(c) Ist f auch erweiternd, so ist jeder Präfixpunkt von f ein Fixpunkt von f.

Beweis:

(a) Da $f(M) \in 2^M$ ist, ist $f(M) \subseteq M$ (auch wenn f gar nicht monoton ist).

(b) Da f monoton ist, gilt für jedes $P \in \mathcal{P}$:

$$\bigcap \mathcal{P} \subseteq P \quad \Rightarrow \quad f(\bigcap \mathcal{P}) \subseteq f(P) \subseteq P,$$

und da $f(\bigcap \mathcal{P}) \subseteq P$ für alle $P \in \mathcal{P}$ gilt, folgt $f(\bigcap \mathcal{P}) \subseteq \bigcap \mathcal{P}$.

(c) Ist P ein Präfixpunkt von f, so ist $f(P) \subseteq P$. Falls f erweiternd ist, ist auch $P \subseteq f(P)$, also $P = f(P)$ (auch wenn f gar nicht monoton ist).

Offenbar ist jeder Fixpunkt einer Funktion auch einer ihrer Präfixpunkte. □

Korollar 3.53 Sei $f : 2^M \to 2^M$ eine monotone und erweiternde Funktion. Sei $A \subseteq M$ und $\mathcal{P} := \{ P \mid A \subseteq P \subseteq M \wedge f(P) \subseteq P \} \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcap \mathcal{P}$ der kleinste Fixpunkt von f oberhalb A.

Beweis: Aus Lemma 3.52 folgt, daß $\bigcap \mathcal{P}$ ein Fixpunkt von f ist, und offenbar ist $A \subseteq \bigcap \mathcal{P}$. Ist $P \supseteq A$ irgend ein (Prä-)Fixpunkt von f, so ist $P \in \mathcal{P}$ und daher $\bigcap \mathcal{P} \subseteq P$. Also ist $\bigcap \mathcal{P}$ der kleinste Fixpunkt von f oberhalb von A. □

Satz 3.54 Sei $\varphi(X)$ eine Eigenschaft von Teilmengen $X \subseteq M$.

(a) Gilt $\varphi(M)$, so ist die durch

$$H_\varphi(A) := \bigcap\{\, P \mid A \subseteq P \subseteq M \wedge \varphi(P)\,\}$$

definierte Operation $H_\varphi : 2^M \to 2^M$ ein Hüllenoperator.

(b) Ist φ außerdem unter Durchschnitten abgeschlossen, d.h. gilt auch

$$\forall \mathcal{P}(\,\mathcal{P} \subseteq \{\, P \mid P \subseteq M \wedge \varphi(P)\,\} \Rightarrow \varphi(\bigcap \mathcal{P})\,),$$

so ist $H_\varphi(A)$ für jedes $A \subseteq M$ die kleinste Menge $B \supseteq A$ mit $\varphi(B)$.

Beweis: Für jedes $A \subseteq M$ sei $\mathcal{P}_A := \{\, P \mid A \subseteq P \subseteq M \wedge \varphi(P)\,\}$.

(a) H_φ ist erweiternd: Wegen $\varphi(M)$ ist $\mathcal{P}_A \neq \emptyset$, also $A \subseteq \bigcap \mathcal{P}_A = H_\varphi(A)$.
H_φ ist monoton:

$$A \subseteq B \quad\Rightarrow\quad \mathcal{P}_A \supseteq \mathcal{P}_B \;\Rightarrow\; \bigcap \mathcal{P}_A \subseteq \bigcap \mathcal{P}_B \;\Rightarrow\; H_\varphi(A) \subseteq H_\varphi(B).$$

H_φ ist idempotent: Sei $A \subseteq M$. Man hat

$$\begin{array}{rcll} P \in \mathcal{P}_A & \Rightarrow & A \subseteq P \wedge \varphi(P) & \\ & \Rightarrow & H_\varphi(A) \subseteq P \wedge \varphi(P) & \text{nach Def. von } H_\varphi(A) \\ & \Rightarrow & P \in \mathcal{P}_{H_\varphi(A)} & \\ & \Rightarrow & P \in \mathcal{P}_A & \text{wegen } A \subseteq H_\varphi(A). \end{array}$$

Also ist $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_{H_\varphi(A)}$ und daher auch $H_\varphi(A) = H_\varphi(H_\varphi(A))$. Damit ist gezeigt, daß H_φ ein Hüllenoperator ist.

(b) $H_\varphi(A)$ ist das kleinste $B \supseteq A$ mit $\varphi(B)$: Nach der zusätzlichen Voraussetzung ist $\varphi(\bigcap \mathcal{P}_A)$, also $\varphi(H_\varphi(A))$ wegen $H_\varphi(A) = \bigcap \mathcal{P}_A$. Ist $B \supseteq A$ mit $\varphi(B)$, so ist $B \in \mathcal{P}_A$, und daher gilt $H_\varphi(A) = \bigcap \mathcal{P}_A \subseteq B$.

Für (a) genügt statt $\varphi(M)$ auch die Annahme $\forall A \exists P\,(A \subseteq P \wedge \varphi(P))$. □

Die Voraussetzung in Teil (b) gilt nicht für jede Eigenschaft φ. Ist etwa $a \neq b$ und $\varphi(X) := (a \in X \vee b \in X)$, so ist für $a, b \notin A$ ja $H_\varphi(A) \subseteq \{A \cup \{a\}\} \cap \{A \cup \{b\}\} = A$, also gilt $\varphi(H_\varphi(A))$ nicht.

Typische Anwendungen dieses Satzes sind die folgenden:

Beispiel 3.55 Sei $R \subseteq M \times M$. Dann ist

$$R^+ \quad := \quad \bigcap\{\, P \mid R \subseteq P \subseteq M \times M \wedge P \text{ ist transitiv}\,\} \tag{8}$$

die kleinste transitive Relation oberhalb von R. Analog für die symmetrische und die reflexive, oder für die reflexive und transitive Hülle.

Offenbar ist $M \times M$ transitiv (bzw. reflexiv, symmetrisch), und in Lemma 3.35 wurde gezeigt, daß der Durchschnitt beliebig vieler transitiver (bzw. reflexiver, symmetrischer) Relationen auf M transitiv (bzw. reflexiv, symmetrisch) ist.

Beispiel 3.56 Sei $g : M^k \to M$ eine totale Funktion. Dann wird durch

$$H_g(A) := \bigcap\{ B \mid A \subseteq B \subseteq M \wedge \forall b_1, \dots, b_k \in B\ g(b_1, \dots, b_k) \in B \}$$

ein Hüllenoperator definiert, und $H_g(A)$ ist die kleinste Menge $B \subseteq M$, die A umfaßt und unter Anwendungen von g abgeschlossen ist.

3.4.2 Vollständige partielle Ordnungen

Definition 3.57 Sei $(A, \leq)$ eine partielle Ordnung und $D \subseteq A$. Ein Element $a \in A$ ist eine *obere Schranke von* $D \subseteq A$, falls $\forall d \in D\ d \leq a$. D hat eine *kleinste obere Schranke*, falls es eine obere Schranke $\bigsqcup D$ von D gibt, so daß $a \leq \bigsqcup D$ für jede obere Schranke a von D. (Es gibt höchstens ein solches $\bigsqcup D$.)

Eine Menge D heißt *gerichtet*, falls $D \neq \emptyset$ und

$$\forall a \in D \forall b \in D \exists c \in D (a \leq c \wedge b \leq c).$$

Die partielle Ordnung $(A, \leq)$ heißt *vollständig*, falls jede gerichtete Teilmenge eine kleinste obere Schranke hat.

Da in jeder vollständigen partiellen Ordnung $(A, \leq)$ die Menge A aller Objekte gerichtet ist, gibt es stets ein größtes Element, $\bigsqcup A$. Für gerichtete Mengen D verlangt man $D \neq \emptyset$, denn sonst gäbe es stets auch ein kleinstes Element, $0 := \bigsqcup \emptyset$, was man manchmal nicht haben möchte.

Beispiel 3.58 (a) Die partielle Ordnung $(2^M, \subseteq)$ hat ein kleinstes Element, nämlich $\emptyset$, und ist „sehr“ vollständig: für jedes(!) $D \subseteq 2^M$ ist

$$\bigsqcup D := \bigcup D = \{ a \in M \mid \exists A \in D\ a \in A \}$$

die kleinste obere Schranke von D.

(b) Die totale Ordnung $(\mathbb{R}, \leq)$ ist nicht vollständig: $D = \mathbb{R}$ hat keine obere Schranke. Aber für $a < b$ ist

$$[a, b] := \{ r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b \} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}_{\leq a} := \{ r \in \mathbb{R} \mid r \leq a \}$$

mit der üblichen Ordnung $\leq$ jeweils eine vollständige totale Ordnung.

(c) Das Intervall $[0, 2] := \{ q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq 2 \}$ rationaler Zahlen mit der üblichen Ordnung $\leq$ ist dagegen *nicht* vollständig: die Teilmenge $D := \{ q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q < \sqrt{2} \} \neq \emptyset$ ist gerichtet, hat aber keine kleinste obere Schranke. (Als Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ existiert aber $\bigsqcup D = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.)

Die Vollständigkeit der partiellen Ordnung sichert die Existenz von Fixpunkten für alle monotonen Funktionen:

Satz 3.59 (A.Tarski) Sei $(A, \leq, 0)$ eine vollständige partielle Ordnung mit einem kleinsten Element $0 \in A$. Dann hat jede monotone Funktion $f : A \to A$ einen kleinsten Fixpunkt.

Beweis: (Spezialfall) Wir setzen zusätzlich voraus, daß A endlich ist. Definiere $f^n(a)$ induktiv durch $f^0(a) = a$ und $f^{n+1}(a) = f(f^n(a))$. Da 0 das kleinste Element ist, ist $0 \leq f(0)$. Da f monoton ist, folgt hieraus $f(0) \leq f(f(0))$. Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ schon $f^n(0) \leq f^{n+1}(0)$, so folgt aus der Monotonie von f auch $f^{n+1}(0) \leq f^{n+2}(0)$. Durch Induktion haben wir also

$$0 \leq f(0) \leq f^2(0) \leq \ldots \leq f^n(0) \leq f^{n+1}(0) \leq \ldots \tag{9}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $D = \{ f^n(0) \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist also gerichtet und hat daher eine kleinste obere Schranke, $\bigsqcup D$. Wir zeigen[7]

$$\bigsqcup D \leq f(\bigsqcup D), \tag{10}$$

wozu es nachzuweisen genügt, daß $f(\bigsqcup D)$ eine obere Schranke von D ist. Aber das ist klar: für jedes $d \in D$ gibt es offenbar ein $a \in D$ mit $d \leq f(a)$, und wegen $a \leq \bigsqcup D$ folgt dann $d \leq f(a) \leq f(\bigsqcup D)$ aus der Monotonie von f.

Falls A endlich ist, ist es auch D, und dann ist $\bigsqcup D \in D$, etwa $\bigsqcup D = f^m(0)$. Dann ist $f(\bigsqcup D) = f(f^m(0)) \in D$, also

$$f(\bigsqcup D) \leq \bigsqcup D \tag{11}$$

ein Präfixpunkt von f. Zusammen mit (10) ist $\bigsqcup D$ also ein Fixpunkt von f.

Sei a irgend ein Fixpunkt von f. Dann ist wegen $0 \leq a = f(a)$ nach Induktion $f^n(0) \leq f^n(a) = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also a eine obere Schranke von D und damit $\bigsqcup D \leq a$. Also ist $\bigsqcup D$ der kleinste Fixpunkt von f.

Bemerkung: Falls A unendlich ist, erhält man zwar aus $0 \leq f(0)$ noch wie im Beweis $0' := \bigsqcup D \leq f(\bigsqcup D) = f(0')$ nach (10), aber nicht $f(0') \leq 0'$, die Präfixpunkteigenschaft (11). Dann ist aber $0 < 0' < f(0')$, und man kann mit $D' := \{ f^n(0') \mid n \in \mathbb{N} \}$ genauso zeigen, daß $0' < 0'' := \bigsqcup D' \leq f(0'')$. Man erhält so „immer größere" Elemente a mit $a < f(a)$. Es kann sein, daß man das öfter wiederholen muß, als es natürliche Zahlen gibt, aber „irgendwann" kommt man so auf ein a mit $a = f(a)$. □

Die Vollständigkeit der partiellen Ordnung ist wesentlich: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(r) := r + 1$ ist monoton, hat aber keinen Fixpunkt.

Für welche $f : A \to A$, bei unendlichem A, ist die kleinste obere Schranke der aufsteigenden Folge (9) denn tatsächlich der kleinste Fixpunkt? In vielen Anwendungen, insbesondere wenn $A = 2^M$ und $M = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ, ist ein f mit folgender ausreichender Eigenschaft gegeben:

[7] Beachte, daß wir (10) erhalten, ohne daß f erweiternd sein muß.

Definition 3.60 Eine Funktion $f : A \to A$ auf einer vollständigen partiellen Ordnung $(A, \leq)$ heißt *stetig*, falls sie monoton ist und

$$f(\bigsqcup D) = \bigsqcup \{ f(d) \mid d \in D \}$$

für jede gerichtete Menge $D \subseteq A$ gilt.

Satz 3.61 (Fixpunktsatz)(S.C.Kleene,D.Scott) Sei $(A, \leq)$ eine vollständige partielle Ordnung. Jede stetige Funktion $f : A \to A$ hat für jedes $a \in A$ mit $a \leq f(a)$ einen kleinsten Fixpunkt oberhalb von a, nämlich

$$\bigsqcup \{ f^n(a) \mid n \in \mathbb{N} \}, \tag{12}$$

wobei $f^n(a)$ für jedes $a \in A$ induktiv durch $f^0(a) := a$ und $f^{n+1}(a) := f(f^n(a))$ definiert ist. Falls $(A, \leq)$ ein kleinstes Element 0 hat, hat f einen kleinsten Fizpunkt, nämlich (12) für $a = 0$.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $a = 0$. Sei wieder $D = \{ f^n(0) \mid n \in \mathbb{N} \}$. Es genügt, wenn wir im Beweis von Satz 3.59 den Nachweis von (11) mit der Stetigkeit von f statt der Endlichkeit von A führen. Wegen der Stetigkeit von f und weil $\{ f(d) \mid d \in D \} \subseteq D$ ist, gilt aber offensichtlich

$$f(\bigsqcup D) = \bigsqcup \{ f(d) \mid d \in D \} \leq \bigsqcup D.$$

Der Rest des Beweises geht wie bei Satz 3.59, der Fall $a \neq 0$ geht analog. □

Beispiel 3.62 Sei $R \subseteq M \times M$ und (vgl. Beispiel 3.55)

$$R^+ := \bigcap \{ S \subseteq M \times M \mid R \subseteq S \wedge S \circ S \subseteq S \}$$

ihre transitive Hülle. Sei $f : 2^{M \times M} \to 2^{M \times M}$ die durch

$$f(S) := S \cup (S \circ S)$$

definierte Funktion. Wir zeigen, daß f stetig ist: Sei $\mathcal{D} \subseteq 2^{M \times M}$ eine gerichtete Menge von Relationen auf M. Dann gibt es zu $S_0, S_1, S_2 \in \mathcal{D}$ ein $S \in \mathcal{D}$ mit $S_0 \cup S_1 \cup S_2 \subseteq S$. Daher ist für alle $\langle a, c \rangle \in M \times M$:

$$\begin{aligned}
\langle a, c \rangle \in f(\bigcup \mathcal{D}) \quad &\iff \quad \langle a, c \rangle \in \bigcup \mathcal{D} \ \vee \ \langle a, c \rangle \in (\bigcup \mathcal{D}) \circ (\bigcup \mathcal{D}) \\
&\iff \quad \langle a, c \rangle \in \bigcup \mathcal{D} \\
&\qquad\quad \vee\ \exists b \in M \ (\langle a, b \rangle \in \bigcup \mathcal{D} \wedge \langle b, c \rangle \in \bigcup \mathcal{D}) \\
&\iff \quad \exists S_0 \in \mathcal{D}\ \langle a, c \rangle \in S_0 \\
&\qquad\quad \vee\ \exists b \in M\ \exists S_1, S_2 \in \mathcal{D}(\langle a, c \rangle \in S_1 \wedge \langle b, c \rangle \in S_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \exists S_0, S_1, S_2 \in \mathcal{D}\ \ (\langle a,c\rangle \in S_0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vee\ \exists b \in M\ (\langle a,c\rangle \in S_1 \wedge \langle b,c\rangle \in S_2)) \\
&\iff \exists S \in \mathcal{D}(\langle a,c\rangle \in S \vee \exists b \in M(\langle a,b\rangle \in S \wedge \langle a,c\rangle \in S)) \\
&\iff \exists S \in \mathcal{D}\,\langle a,c\rangle \in S \cup (S \circ S) = f(S) \\
&\iff \langle a,c\rangle \in \bigcup\{\, f(S) \mid S \in \mathcal{D}\,\}.
\end{aligned}$$

Damit ist $f(\bigsqcup \mathcal{D}) = \bigsqcup\{\, f(S) \mid S \in \mathcal{D}\,\}$, also f stetig. Da $R \subseteq f(R)$ und $f^n(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$ ist, ist nach dem Fixpunktsatz 3.61

$$\bigcup\{\, f^n(R) \mid n \in \mathbb{N}\,\} \quad = \quad \bigcup\{\, R^n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$$

der kleinste Fixpunkt von f oberhalb von R. Wegen

$$f(S) = S \iff S \cup (S \circ S) = S \iff S \circ S \subseteq S,$$

sind die Fixpunkte von f aber genau die transitiven Relationen auf M. Also ist der kleinste Fixpunkt von f oberhalb von R die transitive Hülle R^+ von R nach Beispiel 3.55, so daß gilt:

$$\bigcup\{\, R^n \mid n \in \mathbb{N}\,\} = R^+ = \bigcap\{\, S \mid R \subseteq S \wedge S \circ S \subseteq S\,\}.$$

Man kann also R^+ einerseits „von unten" als Vereinigung kleinerer Mengen „konstruieren" und andererseits „von oben" als Durchschnitt größerer Mengen beschreiben.

Entsprechend kann man die reflexive und transitive Hülle oder die symmetische Hülle als Fixpunkt von stetigen Funktionen darstellen.

Beispiel 3.63 Sei $A \subseteq M$ und $R \subseteq M^{k+1}$, z.B. kann R eine partielle k-stellige Funktion $R : M^k \to M$ sein. A heißt *abgeschlossen unter* R falls

$$\forall a_1 \dots \forall a_k \forall b\ (a_1 \in A \wedge \dots \wedge a_k \in A \wedge R(a_1, \dots, a_k, b) \to b \in A).$$

Die Funktion $f : 2^M \to 2^M$ mit

$$f(A) := \{\, b \mid \exists a_1 \in A \dots \exists a_k \in A\ R(a_1, \dots, a_k, b)\,\}$$

ist monoton (aber i.a. nicht erweiternd). Beachte, daß A genau dann unter R abgeschlossen ist, wenn $f(A) \subseteq A$.

Die Funktion f ist auch stetig: Ist $\mathcal{D} \subseteq 2^M$ eine gerichtete Teilmenge von 2^M, so gilt für jedes b:

$$\begin{aligned}
b \in f(\bigcup \mathcal{D}) &\iff \exists a_1 \dots \exists a_k \in \bigcup \mathcal{D}\ R(a_1, \dots, a_k, b) \\
&\iff \exists A_1 \dots A_k \in \mathcal{D}\ \exists a_1 \in A_1 \dots \exists a_k \in A_k\ R(a_1, \dots, a_k, b) \\
&\iff \exists A' \in \mathcal{D}\ \exists a_1 \dots \exists a_k \in A'\ R(a_1, \dots, a_k, b) \\
&\iff \exists A' \in \mathcal{D}\ b \in f(A') \\
&\iff b \in \bigcup\{\, f(A') \mid A' \in \mathcal{D}\,\},
\end{aligned}$$

denn da $\mathcal{D}$ gerichtet ist, gibt es zu $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{D}$ ein Element $A' \in \mathcal{D}$ mit $A_1 \cup \cdots \cup A_k \subseteq A'$.

Man hat $A \subseteq f(A)$ genau dann, wenn $\forall b \in A \exists a_1 \ldots \exists a_k \in A\ R(a_1, \ldots, a_k, b)$. Für solche A hat f einen kleinsten Fixpunkt oberhalb A, $\bigcup\{\, f^n(A) \mid n \in \mathbb{N}\,\}$. Der kleinste Fixpunkt von f ist $\emptyset = f(\emptyset)$, wenn $k \geq 1$ ist, und $R = f(R)$, wenn $k = 0$ ist.

Beachte, daß f nicht erweiternd ist. Man kann aber analog auch für $f'(A) := A \cup f(A)$ die Stetigkeit zeigen. Der kleinste Fixpunkt von f' oberhalb A ist der Abschluß von A unter R.

3.4.3 Fixpunkte und Semantik

Die Hauptanwendung der Fixpunkte monotoner Funktionen besteht darin, den induktiven Defintionen von Sprachen durch Grammatiken und den rekursiven Definitionen von Funktionen durch Programme eine Bedeutung zu geben.

Bedeutung von induktiven Sprachdefinitionen

Mit einer Grammatik will man die syntaktische korrekten Ausdrücke einer Sprache definieren. Man versteht man unter einem komplexen Ausdruck w eine *Folge* von elementaren Ausdrücken. Ist Σ die Gesamtheit der elementaren Ausdrücke, z.B. der Wörter (oder der Phoneme), und hat man diese in gewisse Klassen

$$D, A, N, V \subseteq \Sigma$$

wie Artikel, Adjektive, Nomina, Verben, unterschieden, so sollen durch die Grammatikregeln Ausdrucksmengen

$$NP, VP, AP \subseteq \Sigma^*$$

wie Nominalphrasen, Verbalphrasen, Adjektivphrasen, definiert werden.

Eine Menge von Grammatikregeln wie

$$\begin{array}{lcl} NP & \to & D\ AP\ N, \\ NP & \to & NP \text{ und } NP, \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} AP & \to & A, \\ AP & \to & \text{sehr } A, \\ AP & \to & AP \text{ und } AP, \end{array}$$

kann man als ein System von Mengenungleichungen

$$\begin{array}{lcl} NP & \supseteq & F_1(NP, AP) := (D \cdot AP \cdot N) \cup (NP \cdot \{\text{und}\} \cdot NP), \\ AP & \supseteq & F_2(NP, AP) := A \cup (\{\text{sehr}\} \cdot A) \cup (AP \cdot \{\text{und}\} \cdot AP) \end{array}$$

verstehen, wobei $A \cdot B := \{\, ab \mid a \in A, b \in B\,\}$ die elementweise Verkettung ist. Die durch die Grammatik *definierten* Ausdrucksmengen sind der *kleinste*

Fixpunkt der komponentenweise monotonen Abbildung

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad 2^{\Sigma^*} \times 2^{\Sigma^*} \to 2^{\Sigma^*} \times 2^{\Sigma^*}, \\ F(NP, AP) \quad &:= \quad (NP \cup F_1(NP, AP),\ AP \cup F_2(NP, AP)). \end{aligned}$$

Im allgemeinen hat ein solches F viele Fixpunkte.

Bedeutung rekursiver Funktionsdefinitionen

Sei $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ die Menge aller *partiellen* Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Da wir 1-stellige Funktionen als spezielle 2-stellige Relationen definiert haben, ist

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \ \subseteq \ \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Daher setzt man für $f, g : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$

$$f \leq^{\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}} g \quad :\iff \quad f \subseteq^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} g.$$

und erhält eine vollständige partielle Ordnung $(\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}})$.

In Programmiersprachen kann man Funktionen *rekursiv* definieren, indem man eine Bedingung dafür angibt, wie der Funktionswert beim Argument n mit den Funktionswerten bei anderen Argumenten zusammenhängt, z.B.

$$f(n) \quad := \quad \textit{if } n = 0 \textit{ then 1 else if } n \leq 5 \textit{ then } f(n-1) \textit{ else } f(n+1). \quad (13)$$

Betrachte die Funktion

$$F : (\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}),$$

die durch

$$F(g) \quad := \quad g \ \cup \{ \langle n, m \rangle \mid m = \begin{cases} \textit{if } n = 0 \textit{ then 1 else} \\ \textit{if } n \leq 5 \textit{ then } g(n-1) \textit{ else } g(n+1) \ \} \end{cases}$$

definiert ist. Die mit der Definition (13) gemeinte Funktion erfüllt die Bedingung $f = F(f)$, ist also ein Fixpunkt von F. Aber für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$g_k := \{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (n \leq 5 \wedge m = 1) \vee (n > 5 \wedge m = k) \}$$

ein Fixpunkt von F. Mit der Definition (13) ist *der kleinste Fixpunkt von F* gemeint, und das ist die Funktion

$$f := \{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq 5 \wedge m = 1 \}.$$

Beachte, daß $f \subseteq g_k$ für jedes k, aber für $k \neq k'$ stets $g_k \not\subseteq g_{k'}$ ist.

In beiden Fällen reicht die Bedingung $x = F(x)$ nicht, um ein *eindeutig bestimmtes* Objekt x in $2^{\Sigma^*} \times 2^{\Sigma^*}$ bzw. $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ festzulegen. Der *kleinste* Fixpunkt von F zeichnet unter den Lösungen von $x = F(x)$ eine als die Bedeutung der jeweiligen Definition aus.