Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

Universität München, CIS, WS 2002/03

Abgabetermin: Mittwoch, 15.1.03

Aufgabe 1 *Sei $F \subseteq \{f \mid f : M \to M\}$ eine nicht-leere Menge von Abbildungen. Wird durch*

$$H_F(A) \ := \ A \cup \{m \in M \mid \exists f \in F \ \exists a \in A \ \exists n \in I\!N \ m = f^n(a)\}$$

ein Hüllenoperator $H_F : 2^M \to 2^M$ definiert? *(3 Punkte)*

Aufgabe 2 *Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und Σ^* die Menge aller Wörter über Σ. Definiere durch*

$$f(A) := A \cup \{\, aawb \mid w \in A\,\}, \qquad \text{für } A \subseteq \Sigma^*,$$

eine Abbildung $f : 2^{\Sigma^*} \to 2^{\Sigma^*}$

(a) Zeige durch Induktion über n, daß $f^n(A) = \{\, a^{2n}wb^n \mid n \in I\!N \wedge w \in A\,\}$ ist. *(2 Punkte)*

(b) Was ist der kleinste Fixpunkt von f? *(1 Punkt)*

(c) Was ist der kleinste Fixpunkt von f oberhalb $B \subseteq \Sigma^*$? *(2 Punkte)*

Aufgabe 3 *Sei $A := I\!N \dot\cup \{\omega, \infty\}$, mit $\infty \neq \omega$ (Omega), und setze für $n, m \in A$*

$$n \leq^A m :\Longleftrightarrow (n \in I\!N \wedge m \in I\!N \wedge n \leq^{I\!N} m) \vee (n \in I\!N \wedge m \notin I\!N) \vee (n = \omega \wedge m = \infty).$$

Dann ist $(A, \leq^A)$ eine partielle Ordnung.

(a) Zeige, daß $D := \{\, n^2 \mid n \in I\!N\,\}$ eine gerichtete Menge ist. *(2 Punkte)*

(b) Was ist $\bigsqcup D$, die kleinste obere Schranke von D, und was ist $\bigsqcup(I\!N \cup \{\omega\})$? *(1 Punkt)*

(c) Ist die durch

$$f(n) := \begin{cases} n+1, & \text{falls } n \in I\!N, \\ \infty, & \text{falls } n \notin I\!N. \end{cases}$$

definierte Funktion $f : A \to A$ (i) monoton, (ii) erweiternd, und (iii) stetig? Was ist der kleinste Fixpunkt von f? *(4 Punkte)*